СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ЯНЧЕНКО Михаил Васильевич

F-ЛОКАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ В ГРУППАХ С ОБОБЩЁННО КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск-2007

Работа выполнена в Институте архитектуры и строительства Сибирского государственного университета

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор Созутов А.И.
доктор физико-математических наук,
профессор Шунков В.П.

Официальные оппоненты:

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Мазуров В.Д.
доктор физико-математических наук,
профессор Шлепкин А.К.

Ведущая организация:

Институт математики и механики УрО РАН

Защита состоится "10" ноября 2007 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "____"

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент ____________________ Голованов М.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Если множество элементов конечного порядка в бесконечной группе G конечно, то ввиду известного результата Дицмана [3] они составляют конечную вполне характеристическую подгруппу группы G. Если же множество таких элементов в G бесконечно, то естественно возникают различные вопросы об их расположении в группе [19].

Многие исследования в теории бесконечных групп посвящены доказательствам существования в группе "хороших" бесконечных подгрупп. Так по известной теореме Каргаполова-Холла-Кулатилаки [4, 22] любая бесконечная локально конечная группа содержит бесконечную абелеву подгруппу. Существует определённая параллель между подгруппами Силова в конечных группах и хорошими подгруппами в бесконечных группах, позволяющими применять при изучении бесконечных групп методы локального анализа. Учитывая важность таких подгрупп, на первом Всесоюзном симпозиуме по теории групп М.И.Каргаполовым был поставлен вопрос о существовании бесконечной абелевой подгруппы в произвольной бесконечной группе (вопрос 1.24 из [5]).

В 1967 г. В.П. Шунков [14] доказал существование бесконечных подгрупп с нетривиальным центром в периодических группах с инволюциями. В том же году С.П. Струнков положительно решил вопрос М.И. Каргаполова в классе бинарно конечных групп [12, 13]. П.С.Новиков и С.И.Адян [1] показали, что вопрос М.И. Каргаполова в общем случае решается отрицательно. Однако вопрос Каргаполова актуален для каждого конкретного класса групп. В 1974 г. В.П. Шунков доказал существование бесконечных абелевых подгрупп в бипримитивно конечных группах [16] и сопряженно бипримитивно конечных группах [17].

С вопросом М.И.Каргополова тесно связан вопрос С.П. Стрункова 2.75 из [5]: *Пусть периодическая группа G содержит бесконечное множество конечных подгрупп, общее пересечение которых содержит нединичные элементы. Содержится ли тогда в G нееденичный элемент, централизатор которого бесконечен?*

Как показал К.И.Лоссов [6, 7], в общем случае ответ на вопрос С.П.Стрункова отрицателен. С другой стороны, несомненный, а для групп со слабыми условиями конечности — значительный интерес, представляют необходимые и достаточные условия положительного (отрицательного) решения вопроса С.П.Стрункова для каждой конкретной группы.

В настоящей диссертации вопросы М.И. Каргаполова и С.П.Стрункова решаются положительно при более слабых условиях конечности, чем в указанных выше работах.

После решения в 1970 г. В.П. Шунковым ряда известных проблем минимальности в классе локально конечных групп, активизировались исследования групп, удовлетворяющих условиям конечности более слабым, чем локальная конечность. В настоящее время известно бесконечно много классов групп с различными условиями конечности [2, 8, 9]. Вопросы М.И. Каргаполова и С.П. Стрункова решались В.П. Шунковым для различных классов групп [14]-[20], опираясь на конечность и разрешимость подгрупп вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$. Такой элемент a называется в диссертации *конечным разрешимым.* Если указанные условия выполняются почти для всех элементов a^g, то элемент a называется *почти конечным разрешимым.* В большинстве результатов диссертации в основу положено условие почти конечности и разрешимости подгрупп вида $L_g = \langle a, b^g \rangle$, где элементы a, b могут оказаться не сопряжёнными и различных порядков.

Пусть G — произвольная бесконечная группа. Любую ее бесконечную подгруппу H с нетривиальным локально конечным радикалом назовем f-локальной подгруппой. Если при этом H содержит бесконечно много элементов конечного порядка, назовём её *насыщенной.* Неединичный элемент a конечного порядка произвольной бесконечной группы G назовём *обобщённо конечным*, если a принадлежит основанию веера конечных подгрупп, амальгама которого почти полностью содержит неединичный класс сопряжённых элементов группы G. Другими словами почти для всех элементов c некоторого неединичного класса b^G подгруппы $\langle a, c \rangle$ конечны, т.е. выполняется (a, b)-условие конечности [19].

В случае, когда свойство обобщённой конечности справедливо для всех элементов простого порядка из G и наследуется всеми ее подгруппами и фактор-группами по периодическим нормальным подгруппам, назовем G *обобщенно конечной группой.*

Цель диссертации. Найти достаточные условия существования в группе насыщенных f-локальных подгрупп, содержащих фиксированный элемент, и доказать существование бесконечных периодических абелевых подгрупп в обобщённо конечных группах.

Методы исследования. Применяются теоретико-групповые методы исследования.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая ценность. Результаты, изложенные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть использованы как в дальнейших исследованиях в теории групп, так и при чтении специальных курсов по алгебре.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения и четырех глав основного текста. Список литературы состоит из 67 наименований. Работа изложена на 75 страницах текста, набранного в редакционно-издательской системе LaTeX.

Основные результаты.

В п. 1 – 3 рассматриваемая группа G содержит бесконечно много элементов конечного порядка.

1. Доказана вложимость почти конечного разрешимого элемента простого нечётного порядка и порядка 4 группы G в насыщенную f-локальную подгруппу.

2. При условиях конечности и разрешимости подгрупп $L_g = \langle a, b^g \rangle$ почти для всех элементов b^g, где порядки $|a|$, $|b|$ либо просты, либо равны 2 и 4, доказана вложимость хотя бы одного из этих элементов в насыщенную f-локальную подгруппу.

3. Доказано существование бесконечных локально конечных подгрупп в обобщённо конечной группе G, а также вложимость 2-элементов в бесконечные локально конечные подгруппы, когда G имеет период $2^m \cdot n$ (n — нечетно) и все группы периода n локально конечны.

Содержание диссертации.

В первой главе приведены результаты и методы, используемые при доказательстве основных результатов диссертации. Напомним, что смешанная группа G обладает *периодической частью*, если все её элементы конечного порядка составляют подгруппу [19].

В главе 2 доказаны 3 теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — бесконечная группа, a и b — инволюции, $a \notin b^G$ и почти для всех элементов $c \in b^G$ подгруппы $\langle a, c \rangle$ конечны. Тогда либо G обладает конечной периодической частью, либо инволюции a и b принадлежат насыщенным f-локальным подгруппам.*

Приведены примеры групп, удовлетворяющие всем условиям теоремы 1, за исключением условия $a \notin b^G$, для которых она не верна.

Теорема 2. *Пусть G — бесконечная группа, a — элемент простого порядка $p > 2$ из G и почти для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо G обладает конечной периодической частью, либо элемент a принадлежит насыщенной f-локальной подгруппе.*

Теорема 2 очень близка по содержанию к одному из основных результатов монографии [19] (теорема 4.1). Однако в условиях теоремы 4.1 из [19] требуется конечность всех подгрупп $\langle a, a^g \rangle$. Кажущаяся очевидной равносильность слабого и сильного условий (a, a)-конечности до сих пор не доказана [5] (вопрос 13.53). Кроме того, теорема 2 существенно используется в доказательстве теоремы 5 диссертации, поскольку доказать конечность всех подгруппп вида $\langle b, b^g \rangle$ не удалось. Конечность таких подгрупп доказана только почти для всех элементов b^g.

Теорема 3. *Пусть G — бесконечная группа, a — инволюция, b — элемент простого порядка $p > 2$ из G и почти для всех элементов $c \in b^G$ подгруппы $\langle a, c \rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо G обладает конечной периодической частью, либо хотя бы один из элементов a, b принадлежит насыщенной f-локальной подгруппе.*

В теореме 4 главы 3 даются основы метода обобсобленных ядер Фробениуса. Пусть G — произвольная группа. Для неединичного элемента $x \in G$ через N_x будем обозначать множество всех элементов из ядер конечных фробениусовых подгрупп группы G, дополнением в которых является подгруппа $\langle x \rangle$. Допустим, что элемент x не содержится в насыщенной f-локальной подгруппе. Согласно этому предположению каждая конечная x-допустимая подгруппа $F_0 \subset N_x$ содержится в конечной максимальной подгруппе $F \subset N_x$. Рассмотрим веер F_x всех максимальных фробениусовых подгрупп с дополнениями, содержащими элемент x.

Теорема 4. *Пусть G — группа, F_x — бесконечный веер конечных максимальных фробениусовых подгрупп группы G, T — основание веера и элемент $x \in T$ простого порядка не содержится в насыщенной f-локальной подгруппе. Тогда существует разбиение $F_x = Y \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ веера*

F_x на конечный или пустой веер Y и конечное число n правильных вееров X_i с основаниями T_i. При этом каждая подгруппа $H \in X_i$ есть группа Фробениуса с неинвариантным множителем T_i $(i = 1, ..., n)$ и ядро любой подгруппы из веера $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ пересекаются тривиально с ядром любой другой подгруппы этого веера.

Далее в главе 3 изучаются группы с обобщённо конечными элементами a, b простых порядков, при $|a| \cdot |b| > 4$.

Теорема 5. *Пусть G — бесконечная группа, a и b — элементы простых порядков из G, $|a| \cdot |b| > 4$ и почти для всех элементов $c \in b^G$ подгруппы $\langle a, c \rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо число элементов конечного порядка в G конечно, либо хотя бы один из элементов a, b принадлежит насыщенной f-локальной подгруппе.*

Теорема 6. *Пусть все конечные подгруппы группы G разрешимы и каждое её сечение по конечной подгруппе либо есть группа без кручения, либо обладает обобщённо конечным элементом простого порядка > 2. Тогда либо G обладает конечной периодической частью, либо G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Из теоремы 6 вытекает

Следствие 1. *Если в обобщённо конечной группе множество элементов конечного порядка бесконечно и все её конечные подгруппы разрешимы, то она содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

В главе 4 рассмотрен случай почти конечного элемента порядка 4 и пары (a, b) при $|a| \cdot |b| = 8$ (теоремы 7, 8). Доказано существование бесконечных локально конечных подгрупп в некоторых обобщенно конечных группах (теорема 9), а также в бесконечных группах периода 12 (теорема 10 и следствие 2).

Теорема 7. *Пусть G — бесконечная группа, a — элемент порядка 4 из G и почти для всех элементов $a^g \in a^G$ подгруппы $\langle a, a^g \rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо группа G обладает конечной периодической частью, либо элемент a принадлежит f-локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка.*

Теорема 8. *Пусть G — бесконечная группа, a, b — элементы из G, один из которых инволюция, а второй — элемент порядка 4, и почти для всех элементов $b^g \in b^G$ подгруппы $\langle a, b^g \rangle$ конечны и разрешимы. Тогда либо группа G обладает конечной периодической частью, либо хотя бы один из элементов a, b принадлежит f-локальной подгруппе, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка.*

Теорема 9. *Если все конечные подгруппы группы G разрешимы и каждое её сечение по конечной подгруппе либо есть группа без кручения, либо обладает обобщённо конечным элементом порядка > 2, то либо G обладает конечной периодической частью, либо G содержит бесконечную локально конечную подгруппу.*

Теорема 10. *Пусть G — бесконечная группа периода $2^m n$, где $m > 0$, n — нечетно и каждая группа периода n локально конечна. Тогда любой 2-элемент группы G содержится в подходящей бесконечной локально конечной подгруппе.*

Благодаря известным результатам Бернсайда, Санова, Холла о локальной конечности групп периода 3, 4, 6, в последние годы усилился интерес к группам периода 12 (см. вопрос Шункова 11.127 [5] и [23]).

Следствие 2. *В бесконечной группе периода* 12 *каждый* 2*-элемент содержится в подходящей бесконечной локально конечной подгруппе.*

Апробация. Результаты диссертации были изложены на Международных конференциях в Томске (2003 г.), Иркутске (2004 г.), в Екатеринбурге (2005 г.) на "Мальцевских чтениях" в Новосибирске (2003 –2005 гг.) и Красноярске "Алгебра и её приложения" (2007 г.). Кроме того, они обсуждались на семинарах при Красноярском Государственном Аграрном Университете и Красноярской Государственной Архитектурно-Строительной Академии, а также на красноярском городском семинаре "Алгебраические системы".

Публикации. Основные результаты по теме диссертации опубликованы в [24] – [32].

Во время работы над диссертацией автор получал поддержку Российского фонда фундаментальных исследований, гранты №99-01-00542, №03-01-00356 и Красноярского краевого фонда науки, грант №9F0132.

Автор выражает благодарность научным руководителям профессорам В.П. Шункову и А.И. Созутову за постановку задачи, помощь в работе и внимание с их стороны.

Список литературы

[1] Адян С.И. Проблема Бернсайда и тождества в группах.– М.: Наука, 1975.

[2] Голод Е.С. О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых группах// Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1964.– Т. 28, N 2.– С. 273-276.

[3] Дицман А.П. О центре p-групп// В сб.Труды семинара по теории групп.– Москва.– 1938.– С. 30-34.

[4] Каргаполов М.И. О проблеме О.Ю.Шмидта// Сиб. матем. ж.– 1963.– Т. 4, N 1.– С. 232-235.

[5] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. – Изд. 15-е.– Новосибирск, 2002.

[6] Лоссов К.И. Достаточные условия вложимости амльгамы в периодическую группу // Тезисы сообщений 19-й Всесоюзной алгебраической конференции. Часть 1. – Львов, 1987. – С. 163.

[7] Ольшанский А.Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах.– М.: Наука, 1989.

[8] Рожков А.В. Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев// Алгебра и логика.– 1998.– Т. 37, N 5.– С. 568 – 605.

[9] Середа В.А., Созутов А.И. Об ассоциативных нильалгебрах и группах Голода// В сб. Труды XXI межвуз. науч.-техн. конф. (апрель 2003 г.). Математика.– Красноярск: КрасГАСА.– 2003.– С. 21-44.

[10] Созутов А.И. О существовании в группе бесконечных подгрупп с нетривиальным локально конечным радикалом// Препринт ВЦ СО АН СССР в г. Красноярске.– 1980.– С. 11-19.

[11] Созутов А.И. О существовании в группе f-локальных подгрупп// Алгебра и логика.– 1997.– Т. 36, N 5.– С. 573-598.

[12] Струнков Н.П. Подгруппы периодических групп// ДАН СССР.– 1966.– Т. 170, N 2.– С. 279-281.

[13] Струнков Н.П. Нормализаторы и абелевы подгруппы некоторых классов групп// Изв. АН СССР. Сер. матем.– 1967.– Т. 31, N 3.– С. 657-670.

[14] Шунков В.П. К теории периодических групп// ДАН СССР.– 1967.– Т. 175, N 6.– С. 1236-1237.

[15] Шунков В.П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией// Алгебра и логика.– 1972.– Т. 11, N 4.– С. 470-494.

[16] Шунков В.П. Об абелевых подгруппах в бипримитивно конечных группах// Алгебра и логика.– 1973.– Т. 12, N 5.– С. 603-614.

[17] Шунков В.П. О бесконечных централизаторах в группах// Алгебра и логика.– 1974.– Т. 13, N 2.– С. 224-226.

[18] Шунков В.П. О достаточных признаках существования в группе бесконечных локально конечных подгрупп// Алгебра и логика.– 1976.– Т. 15, N 6.– С. 716-737.

[19] Шунков В.П. О вложении примарных элементов в группе.– ВО Наука.– Новосибирск, 1992.

[20] Шунков В.П. T_0-группы.– Новосибирск: Наука, Сибирская издательская фирма РАН,– 2000.– 180 с.

[21] Feit W., Thompson J.G. Solvability of groups of odd order// Pacif. J. Math.– 1963.– V. 13.– P. 771-1029.

[22] Hall P., Kulatilaka C.R. A property of locally finite groups // J. London Math. Soc.– 1964.– V. 39.– P. 235-239.

[23] Mamontov A. Involutions in group of period 12// Алгебра и логика: Материалы международного российско-китайского семинара (Иркутск, 6-11 августа, 2007).– С. 127.

[24] Созутов А.И., Янченко М.В. Об одном признаке существования в группе f-локальных подгрупп// Тез. докл. V Международ. конф. "Алгебра и теория чисел: Современные проблемы и приложения" (Тула, 19-20 мая 2003 г.).– Тула.– Изд-во ТГПУ им. Л.Н. Толстого.– 2003.– С. 208-210.

[25] Созутов А.И., Янченко М.В. О существовании в группе f-локальных подгрупп// В сб. Труды XXI межвуз. науч.-техн. конф. (апрель 2003 г.). Математика.– Красноярск: КрасГАСА.– 2003.– С. 45-58.

[26] Созутов А.И., Янченко М.В. О признаках существования в группе f-локальных подгрупп// Тез. докл. Международ. конф. по математике и механике (Томск, 16-18 сентября 2003 г.).– Томск.– Изд-во ТГУ.– 2003.– С. 55-56.

[27] Созутов А.И., Янченко М.В. О f-локальных подгруппах групп с (a, b)-условием конечности// В сб. матер. XXII регион. науч.-техн. конф. "Проблемы архитектуры и строительства".– Красноярск: КрасГАСА.– 2004.– С. 16.

[28] Созутов А.И., Янченко М.В. О некоторых признаках существования f-локальных подгрупп в группе// В сб. матер. XXIII регион. науч.-техн. конф. "Проблемы строительства и архитектуры".– Красноярск: КрасГАСА.– 2005.– С. 215-216.

[29] Янченко М.В. О существовании в группе f-локальных подгрупп // Вестник Красноярской государственной архитектурно-строительной академии.– Красноярск: КрасГАСА.– 2005.– С. 301-302.

[30] Созутов А.И., Янченко М.В. О существовании в группе f-локальных подгрупп// Сиб. матем. журн.– 2006.– Т. 47, №4.– С. 898-913.

[31] А.И. Созутов, М.В. Янченко F-локальные подгруппы в группах с обобщенно конечным элементом порядка 2 и 4// Сиб. матем. журн.– 2007.– Т. 48, №5.– С. 1150-1157.

[32] М.В. Янченко F-локальные подгруппы групп с инволюциями// Сб. тр. сем. "Математические системы".– Красноярск: КрасГАУ.– 2007.– Вып. 6.– С. 122-127.

Подписано в печать
Печать офсетная. Тираж 100 экз.
Заказ №
Отпечатано на ризографе
Ин-та арх. и стр. СФУ
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82.