На правах рукописи

ШМИДТ
Ольга Олеговна

Обобщенная модель процесса восстановления в теории надежности использования информационных технологий

05.13.17 — теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск 2008

Работа выполнена в Институте космических и информационных технологий Сибирского федерального университета

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент
Вайнштейн Исаак Иосифович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Добронец Борис Станиславович

доктор физико-математических наук, доцент
Васкевич Владимир Леонтьевич

Ведущая организация: Сибирский государственный аэрокосмический университет (г. Красноярск)

Защита состоится 27 июня 2008 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.11 ФГОУ ВПО "Сибирский федеральный университет" по адресу: 660074,Красноярск, ул. академика Киренского, 26, ауд. Г418.
Факс: (3912) 430-692
E-mail: pok@fivt.krgtu.ru
Телефон: (3912) 497-561

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке по техническим наукам Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан 27 мая 2008 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат технических наук, доцент Л.И. Покидышева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность. В связи с информатизацией всех сфер деятельности человека проблема обеспечения высокой надежности использования информационных технологий (ИТ) является одной из наиболее значимых в развитии научно-технического прогресса. Надежность использования ИТ определяется надежностью ее взаимодействующих компонент – программного обеспечения, аппаратных устройств и методов их применения.

Применительно к надежности аппаратных составляющих ИТ используются методы классической теории надежности, изложенные в работах Б.В.Гнеденко, И.А.Ушакова, Д.Кокса, Р.Барлоу, В.Смита, Ф.Байхельта, Е.Ю.Барзиловича и других авторов. В этих работах процесс функционирования объекта рассматривается как процесс восстановления, при котором функции распределения наработок на отказ после каждого восстановления не изменяются.

Для аппаратных компонент ИТ характерны различные способы восстановлений, которые связаны с изменяющимися затратами и приводят объект в различные состояния. Таким образом, приходим к моделям процессов восстановления с изменяющимися функциями распределения наработок на отказ, затратами на восстановления и эффективностями заменяемых объектов. Обобщающие модели процесса восстановления были предложены М.Броуном и Ф.Прошаном, М.Кийама и У.Сумита, К.Дорадо и другими авторами. Однако эти модели не вполне достаточны для описания процессов функционирования аппаратных средств в теории надежности использования ИТ.

Вопросам надежности использования ИТ применительно к программным компонентам посвящены работы Г.Майерса, Р.Гласса, Т.Тейера, В.В.Липаева, В.В.Шуракова, И.Б.Герцбаха. В этих работах надежность рассматривается как внутреннее свойство программы. Наиболее известными математическими моделями надежности программного обеспечения являются модели Шумана, Джелинского-Моранды, Шика-Вольвертона, Вайса, Коркорена, Нельсона и другие. Предполагается, что исходное число ошибок в программе постоянно и может уменьшаться по мере того, как ошибки исправляются. В большинстве случаев рассматривается экспоненциальный закон распределения наработок на отказ с неизменяющейся интенсивностью отказов в процессе восстановления.

Следует отметить, что отказы программных компонент возникают не только из-за ошибок, заложенных в коде программы, но и в связи с ее некорректным использованием, а также с изменением взаимодействующих с программой компонент ИТ в процессе использования. Так же, как и в моделях процессов восстановления для аппаратных средств, после восстановлений изменяются функции распределения наработок на отказ программных средств, эффективность использования программ и затраты на восстановления.

Так как основные показатели надежности закладываются на этапах разработки, проектирования и тестирования, то одной из возможностей поддержания характеристик надежности при использовании ИТ на требуемом уровне является применение оптимальных стратегий восстановления, например, когда наряду с аварийными проводятся профилактические восстановления. Здесь также следует учитывать специфику ИТ.

Таким образом, необходимость обеспечения высокого уровня показателей надежности приводит к построению обобщенных моделей процессов восстановления и стратегий эксплуатации в теории надежности использования ИТ.

Целью работы является исследование процессов восстановления в теории надежности использования информационных технологий.

Исходя из поставленной цели были определены следующие **задачи исследования**:

1. Разработка обобщенной модели процесса восстановления применительно к теории надежности использования информационных технологий.

2. Нахождение и исследование характеристик надежности использования информационных технологий на основе моделей процессов восстановления.

3. Разработка и исследование стратегий восстановления в теории надежности использования информационных технологий.

Основные научные результаты, выносимые на защиту

1. Разработана и обоснована модель процесса восстановления в теории надежности использования информационных технологий, обобщающая известные модели процессов восстановления, учитывающая изменяющиеся в результате восстановлений функции распределения наработок на отказ, затраты на восстановления и эффективность заменяемых элементов.

2. Получены и обоснованы методы нахождения характеристик обобщенной модели процесса восстановления с различными законами распределения наработок на отказ. Получена асимптотическая оценка функции затрат.

3. Разработаны модели стратегий восстановления в теории надежности использования ИТ при проведении аварийных и профилактических восстановлений.

Теоретическая значимость. В рамках диссертационной работы получены теоретические результаты по построению и обоснованию обобщенной модели процесса восстановления в теории надежности использования информационных технологий.

Практическая значимость. Работа имеет практическую направленность. Результаты могут быть использованы для прогнозирования, планирования и оптимизации использования информационных технологий.

Достоверность результатов. Достоверность результатов определяется учетом особенностей работы компонент информационных технологий, корректным применением математических методов при решении рассматриваемых задач. Все результаты работы снабжены строгими доказательствами.

Методика исследования. В диссертационной работе использовались теоретические основы информационных систем и технологий, методы математической теории надежности, теории восстановления, теории вероятностей и случайных процессов, теории интегральных уравнений, теории информации.

Апробация работы. Основные результаты исследования докладывались на межвузовской научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Информатика и информационные технологии" (Красноярск, 2003), Всероссийской научной конференции молодых ученых "Наука. Технологии. Инновации" (Новосибирск, 2005), Всероссийской научно-методической конференции "Повышение качества высшего профессионального образования" (Красноярск, 2007), Международной научной школе "Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах" (Санкт-Петербург, 2007), Всероссийской конференции "Финансово-актуарная математика и смежные вопросы" (Красноярск, 2007), на семинарах кафедры прикладной математики Сибирского федерального университета (Красноярск, 2003-2007).

Публикации и личный вклад автора. По теме диссертационной работы опубликовано 7 работ, из них 5 статей, в том числе одна в периодическом издании по перечню ВАК. Основные результаты диссертации получены лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и библиографии. Текст изложен на 125 страницах, дополнен 9 иллюстрациями. Библиография включает 104 наименования.

Диссертационная работа выполнена при поддержке гранта ККФН №18G131.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы, излагается современное состояние вопроса, цель и задачи работы, отмечается научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, формулируются основные положения, выносимые на защиту, кратко описано содержание диссертации по главам, приводятся данные о публикациях и личном вкладе автора.

В первой главе приводятся сведения об информационных технологиях – основные термины, определения, а также требования, предъявляемые к информационным технологиям. Рассматриваются проблемы обеспечения надежности использования информационных технологий. Приводятся основные положения теории восстановления, описывающей процесс функционирования информационных средств, подверженных отказам. Приводится обзор существующих моделей процессов восстановления. Обосновывается необходимость создания обобщенной модели процессов восстановления в теории надежности использования информационных технологий.

Рассмотрим математическую модель процесса функционирования восстанавливаемого объекта.

Объект начинает свою работу в момент времени $T_0 = 0$ и работает случайное время X_1 до первого отказа. Затем элемент восстанавливается (ремонтируется или заменяется новым) и работает случайное время X_2 до второго отказа и так далее. Таким образом, имеем последовательность неотрицательных взаимно независимых случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ – наработок на отказ и связанную с ней последовательность моментов отказов $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$, $T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$. В математической теории надежности последовательность $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется *процессом восстановления.*

Известны различные модели процессов восстановления. Различия между моделями определяется законами изменения функций распределения случайных величин X_i $F_i(t) = P(X_i < t)$. Наиболее изученной является модель полных восстановлений – когда все наработки восстанавливаемых элементов имеют одну и ту же функцию распределения.

В результате анализа надежности аппаратных и программных компонент информационных технологий отмечено, что изменение технологии в целом и внешней среды, влияние человеческого фактора приводят к изменению функций распределения наработок на отказ заменяемых элементов. Это существенно сужает сферу применения модели с полными восстановлениями к изучению надежности использования информационных технологий.

Имеется ряд моделей процессов восстановления, учитывающих изменение функций восстановления. В работе рассматривается модель процесса восстановления порядка (k_1, k_2), которая учитывает характер изменения функций распределения наработок на отказ компонент информационных технологий. Функции распределения наработок на отказ для данной модели удовлетворяют условию

$$F_i(t) = F_j(t) \quad \text{при } i \equiv j \ (mod\ k_2),\ i, j \geq k_1,$$

здесь k_1 – число наработок, связанных с приработочными отказами рассматриваемого объекта, k_2 – число наработок, образующих периодическую (повторяющуюся) часть процесса восстановления.

Пусть $\omega = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ – реализация процесса восстановления, Ω – множество всех реализаций. Определим считающий процесс $N(t)$ (число отказов на интервале от 0 до t), связанный с процессом восстановления через его реализацию $N(t, \omega)$

$$N(t, \omega) = \max\{n; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq t\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Важную роль в теории надежности имеет *функция восстановления* $H(t)$ – математическое ожидание числа отказов $N(t)$ на интервале 0 до t

$$H(t) = M[N(t)], \quad t \geq 0.$$

Функция восстановления имеет представление в виде ряда

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(n)}(t),$$

где $F^{(n)}(t) = (F_1 * F_2 * \ldots F_n)(t)$ – n-кратная свертка функций распределения

$$F^{(n)}(t) = \int_0^t F^{(n-1)}(t-x) dF_n(x), \quad F^{(1)}(t) = F_1(t).$$

При построении математической теории надежности информационных технологий, наряду с числом отказов в процессе восстановления, необходимо рассматривать и другие характеристики, такие как эффективность и затраты в процессе восстановления.

Во второй главе вводится обобщенная модель процесса восстановления в теории надежности использования информационных технологий, учитывающая изменяющиеся затраты на восстановления и эффективности заменяемых объектов. Рассматриваются характеристики надежности, такие как количество отказов, функция затрат и функция эффективности. Получены их представления в виде рядов.

В параграфе 2.1 рассматривается математическая модель процесса восстановления с учетом затрат. С началом работы i-го элемента связана величина c_i – затраты на восстановление, включающая стоимость затрат на возмещение ущерба при отказе.

Определим случайный процесс $C(t)$ (затраты на восстановления на интервале от 0 до t) через его реализацию $C(t,\omega)$

$$C(t,\omega) = \sum_{i=1}^{N(t,\omega)} c_i, \quad \omega \in \Omega.$$

Вводится *функция затрат* – математическое ожидание затрат $C(t)$ на интервале от 0 до t

$$S(t) = M[C(t)], \quad t \geq 0.$$

Получено ее представление в виде ряда

$$S(t) = c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n+1} F^{(n)}(t).$$

В параграфе 2.2 рассматривается математическая модель процесса восстановления с учетом эффективности работы заменяемых элементов.

Пусть r_i – коэффициент эффективности работы i-го элемента и $r_i x$ – эффективность его работы на протяжении времени x после восстановления. Эффективность – количественная оценка выполненной объектом работы, например, количество переданной или обработанной информации.

Определим случайный процесс $V(t)$ (эффективность восстанавливаемого объекта на интервале от 0 до t) через его реализацию $V(t,\omega)$

$$V(t,\omega) = \sum_{i=1}^{N(t,\omega)} r_i x_i + r_{N(t,\omega)+1}\Big(t - \sum_{i=1}^{N(t,\omega)} x_i\Big), \quad \omega \in \Omega.$$

Вводится *функция эффективности* $R(t)$ – математическое ожидание эффективности на интервале от 0 до t

$$R(t) = M[V(t)], \quad t \geq 0.$$

Для функции эффективности получено представление в виде ряда

$$R(t) = r_1 t(1 - F_1(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big((r_k - r_{n+1}) G_k * \Big(F_k^{(n-1)} - F_k^{(n)} \Big) \Big)(t) +$$

$$+ r_{n+1} t \Big(F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t) \Big) \Big),$$

где

$$G_k(t) = \int_0^t x dF_k(x),$$

$F_k^{(n-1)}(t)$ – свертка $(n-1)$ функций распределения за исключением k-ой

$$F_k^{(n-1)}(t) = (F_1 * F_2 * \ldots * F_{k-1} * F_{k+1} * \ldots * F_{n-1} * F_n)(t).$$

В параграфе 2.3 рассматривается процесс восстановления порядка (k_1, k_2). Приводится интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функции восстановления

$$H(t) = G(t) + \int_0^t H(t-x) d\Phi^{(k_2)}(x),$$

где

$$G(t) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} F^{(n)}(t) - \sum_{n=1}^{k_1-1} \Big(F^{(n)} * \Phi^{(k_2)} \Big)(t)$$

и ее интегральное представление

$$H(t) = \sum_{n=1}^{k_1-1} F^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{k_2} \Big(F^{(k_1-1)} * \Phi^{(i)} \Big)(t) + \sum_{i=1}^{k_2} \Big(F^{(k_1-1)} * \Phi^{(i)} * H\Phi^{(k_2)} \Big)(t),$$

где $\Phi_i(x) = F_{k_1+i-1}(t)$ – функции распределения периодической части процесса восстановления, $\Phi^{(n)}(t)$ – их n-кратная свертка, $H\Phi^{(k_2)}(t)$ – функция восстановления процесса восстановления порядка $(1, 1)$, образованного функцией распределения $\Phi^{(k_2)}(t)$.

В параграфе 2.4 вводится процесс восстановления порядка (k_1, k_2) с учетом затрат на восстановления. Предполагается, что затраты на восстановления c_i и функции распределения наработок на отказ удовлетворяют условию

$$c_i = c_j, \quad F_i(t) = F_j(t), \quad \text{при } i \equiv j \ (mod\ k_2), \ i, j \geq k_1.$$

Получено интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функции затрат

$$S(t) = G(t) + \int_0^t S(t-x) d\Phi^{(k_2)}(x),$$

где

$$G(t) = c_1 + \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_{n+1}F^{(n)}(t) - \int\limits_0^t \Big(c_1 + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_{n+1}F^{(n)}(t-x)\Big)d\Phi^{(k_2)}(x).$$

Получены интегральные представления функции затрат, в том числе

$$S(t) = c_1 + \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_{n+1}F^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{k_2}\Big(d_{i+1}(F^{(k_1-1)} * \Phi^{(i)} * H\Phi^{(k_2)})(t)\Big),$$

где $d_n = c_{n+k_1-1}$ – затраты на восстановления, составляющие периодическую часть процесса.

Доказана теорема об асимптотическом поведении функции затрат.

Теорема 1. Пусть μ_x, σ_x^2, μ_y, σ_y^2 – математические ожидания и дисперсии суммы наработок периодической и непериодической части процесса восстановления соответственно, $M(Y_j)$ – математическое ожидание j-ой наработки из периодической части процесса восстановления. Если все величины конечные, тогда

$$\lim_{t\to\infty}\left(S(t) - \frac{\sum_{i=1}^{k_2} d_i}{\mu_y}t\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_1-1} c_i + \frac{\sigma_y^2 + \mu_y^2 - 2\mu_y\mu_x}{2\mu_y^2}\sum_{i=1}^{k_2} d_i - \frac{1}{\mu_y}\sum_{i=1}^{k_2}\left(d_i \sum_{j=1}^{i} M(Y_j)\right).$$

Полученная формула ассимптотического поведения позволяет оценивать значения функции затрат при больших значениях t.

В параграфе 2.5 вводится процесс восстановления порядка (k_1, k_2) с учетом эффективностей заменяемых элементов. Предполагается, что коэффициенты эффективности и функции распределения наработок на отказ удовлетворяют условию

$$r_i = r_j, \quad F_i(t) = F_j(t), \quad \text{при } i \equiv j \ (mod\ k_2),\ i, j \geq k_1.$$

Получено интегральное уравнение для функции эффективности

$$R(t) = G(t) + \int\limits_0^t R(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x),$$

где

$$G(t) = r_1 t(1 - F_1(t)) + \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}(r_k - r_{n+1})\Big(G_k * \Big(F_k^{(n-1)} - F_k^{(n)}\Big)\Big)(t) +$$

$$+r_{n+1}t\Big(F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)\Big)\Big)-$$

$$-\Big(\Phi^{(k_2)}*\Big(r_1t(1-F_1(t))+\sum_{n=1}^{k_1-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}(r_k-r_{n+1})G_k*\Big(F_k^{(n-1)}-F_k^{(n)}\Big)+$$

$$+r_{n+1}t\Big(F^{(n)}-F^{(n+1)}\Big)\Big)\Big)\Big)(t)$$

и ее интегральное представление

$$R(t)=K(t)+\int\limits_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x)dL(x),$$

где

$$K(t)=r_1t(1-F_1(t))+\sum_{n=1}^{k_1+k_2-1}\Big(\sum_{k=1}^{n}(r_k-r_{n+1})\Big(G_k*\Big(F_k^{(n-1)}-F_k^{(n)}\Big)\Big)(t)+$$

$$+r_{n+1}t\Big(F^{(n)}(t)-F^{(n+1)}(t)\Big)\Big),$$

$$L(t)=\Big(F^{(k_1-1)}*\sum_{n=1}^{k_2}\Big(\sum_{k=1}^{n}(r_k-r_{n+1})\Big(G_{k_1+k-1}*\Big(\Phi_k^{(n-1)}-\Phi_k^{(n)}\Big)\Big)+$$

$$+r_{n+1}t\Big(\Phi^{(n)}-\Phi^{(n+1)}\Big)\Big)\Big)(t).$$

В третьей главе рассматриваются методы нахождения точных и приближенных значений функции восстановления, функции затрат и функции эффективности.

В параграфе 3.1 рассматривается операционный метод решения интегральных уравнений для функции восстановления, функции затрат и функции эффективности, полученных в главе 2. Эти уравнения являются интегральными уравнениями Вольтерра второго рода и имеют общий вид

$$Z(t)=G(t)+\int_0^t Z(t-x)d\Phi^{(k_2)}(x),$$

где функция $G(t)$ содержит конечное число n-кратных сверток функций распределения наработок на отказ и имеет соответствующие выражения для $H(t)$, $S(t)$, $R(t)$.

В случае, когда все наработки распределены по экспоненциальному закону

$$F_i(t)=\begin{cases}1-e^{-\alpha_i t}, & t\geq 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

с помощью преобразования Лапласа-Стилтьеса получено решение интегрального уравнения для функции затрат.

В частности, для процесса восстановления порядка $(2,1)$ имеем

$$S(t) = c_1 + c_2\Big(1 - e^{-\alpha_1 t}\Big)\Big(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\Big),$$

порядка $(3,1)$ –

$$S(t) = c_1 + c_2 + c_3 + c_3\alpha_3 t - \frac{c_3\alpha_3(\alpha_2+\alpha_1)}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{c_3\alpha_1(\alpha_3-\alpha_2)}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2)}e^{-\alpha_2 t} -$$

$$-c_2 e^{-\alpha_1 t} + \frac{\alpha_2(c_2\alpha_1 - c_3\alpha_3 + c_3\alpha_1)}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)}e^{-\alpha_1 t},$$

порядка $(1,2)$ –

$$S(t) = \frac{\alpha_1(c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1) + c_1(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} +$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2(c_1+c_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}t + \frac{\alpha_1(\alpha_2 c_1 + \alpha_1 c_2)}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}.$$

В параграфе 3.2 рассматривается функция восстановления $H\Phi^{(k_2)}(t)$ процесса восстановления порядка $(1,1)$, организованного последовательностью функций распределения $\Phi^{(k_2)}(t)$.

Полученные в главе 2 интегральные представления для функции затрат и функции эффективности, а также известное интегральное представление для функции восстановления имеют общий вид

$$Z(t) = K(t) + \int_0^t H\Phi^{(k_2)}(t-x)dL(x),$$

где функции $K(t)$ и $L(t)$ содержат конечное число n-кратных сверток функций распределения наработок на отказ и имеют соответствующие выражения для $H(t)$, $S(t)$, $R(t)$.

Для этого представления особое значение имеет функция $H\Phi^{(k_2)}(t)$. В случае, когда она известна, нахождение функций $H(t)$, $S(t)$ и $R(t)$ сводится к вычислению конечного числа сверток.

Для многих компонент информационных технологий характерно распределение наработок на отказ по закону Вейбулла-Гнеденко

$$F_i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{t}{\theta_i}\right)^{\beta_i}}, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(при $\beta < 1$ интенсивность отказов убывает, $\beta > 1$ – возрастает).

Для этого случая имеется формальное решение интегрального уравнения для функции $H\Phi^{(k_2)}(t)$ в виде k_2-кратного ряда

$$H\Phi^{(k_2)}(t) = \sum_{\overline{r}\in\Omega_{k_2,1}} (-1)^{|\overline{r}|-k_2} \frac{A_{\overline{r}}^{(k_2)}}{\Gamma((\overline{\beta},\overline{r})+1)\prod\limits_{i=1}^{k_2}\theta_i^{\beta_i r_i}}\, t^{(\overline{\beta},\overline{r})},$$

где $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k_2})$ – параметры функций распределения, $\Gamma(x)$ – Гамма-функция Эйлера,

$$(\overline{\beta},\overline{r}) = \sum_{i=1}^{k_2}\beta_i r_i, \quad |\overline{r}| = \sum_{i=1}^{k_2} r_i,$$

$$\Omega_{k_2,\ell} = \{\overline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_{k_2})\,|\, n_i \geq \ell\}.$$

Коэффициенты ряда для функции $H\Phi^{(k_2)}(t)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$A_{\overline{s}}^{(k_2)} = B_{\overline{s}}^{(k_2)}, \quad \text{если хотя бы одна из } s_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots, k_2,$$

$$A_{\overline{s}}^{(k_2)} = B_{\overline{s}}^{(k_2)} + (-1)^{k_2} \sum_{\overline{n}\in\Psi_{k_2}(\overline{s})} A_{\overline{s}-\overline{n}}^{(k_2)} B_{\overline{n}}^{(k_2)}, \quad \text{если} \quad \overline{s}\in\Omega_{k_2,2},$$

$$B_{\overline{s}}^{(k_2)} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{k_2}\Gamma(\beta_i s_i + 1)}{\prod\limits_{i=1}^{k_2} s_i!},$$

где

$$\Psi_{k_2}(\overline{s}) = \{\overline{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_{k_2}) | 1 \leq n_i \leq (s_i - 1)\}.$$

Доказана теорема о сходимости ряда для функции $H\Phi^{(k_2)}(t)$.

Теорема 2. k_2-кратный ряд для функции $H\Phi^{(k_2)}$ сходится абсолютно при $t \geq 0$ и при любых параметрах функций распределения Вейбулла-Гнеденко.

Доказанная теорема обосновывает возможность непосредственного интегрирования в интегральных представлениях для получения функций $H(t)$, $S(t)$, $R(t)$ в виде рядов.

В параграфе получены квадратурные формулы приближенного вычисления r-кратных сверток и их первых производной с оценкой погрешности. Получены формулы приближенного решения интегральных уравнений для функции восстановления, функции затрат, функции эффективности.

Пусть функции распределения $F_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на промежутке $[0, T]$. Рассмотрим разбиение $t_i = ih,\ h = \frac{T}{n},\ 0 \leq i \leq$

n. Обозначим через $\widetilde{F}^{(r)}(t)$ приближенное значение r-кратной свертки $F^{(r)}(t)$. Получены формулы приближенного вычисления r-кратных сверток функций распределения

$$\widetilde{F}^{(r)}(t_i) = \begin{cases} 0, & i < r, \\ h\sum\limits_{j=1}^{i-r+1} \widetilde{F}^{(r-1)}(h(i-j))F_r'(hj), & i \geq r, \end{cases}$$

$$\widetilde{F}^{(1)}(t_i) = F_1(t_i)$$

и их первых производных

$$\widetilde{F}^{(r)'}(t_i) = \begin{cases} 0, & i < r-1, \\ h\sum\limits_{j=1}^{i-r+2} \widetilde{F}^{(r-1)'}(h(i-j))F_r'(hj), & i \geq r-1, \end{cases}$$

$$\widetilde{F}^{(1)'}(t_i) = F_1'(t_i).$$

Пусть $\Delta^{(k)}$ – погрешность вычисления k-кратной свертки на промежутке от 0 до T

$$\Delta^{(k)} = \max_{1\leq i\leq n} |\widetilde{F}^{(r)}(t_i) - F^{(r)}(t_i)|.$$

Доказана теорема об оценке погрешности.

Теорема 3. Если функции $F_1(t), F_2(t), \ldots, F_k(t)$ дважды непрерывно дифференцируемы на промежутке $[0, T]$, тогда

$$\Delta^{(k)} \leq ATh\sum_{i=0}^{k-1} B^i,$$

где

$$A = \max_{1\leq i\leq k} A_i, \quad B = \max_{1\leq i\leq k} B_i,$$

$$A_i = \left(\max_{x\in[0,T]} F_{i-1}'(x) \max_{x\in[0,T]} F_i'(x) + F_{i-1}(T) \max_{x\in[0,T]} \left|F_i''(x)\right|\right) \prod_{j=1}^{i-2} F_j(T),$$

$$B_i = h\sum_{j=1}^{n} F_i'(t_j).$$

На основании метода конечных сумм для решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода и формул приближенного вычисления сверток получены формулы для вычисления функции восстановления

$$\widetilde{H}(t_i) = \begin{cases} \widetilde{G}_H(t_i) + h\sum\limits_{j=k_2-1}^{i-1} \widetilde{H}(t_i - t_j)\widetilde{\Phi}^{(k_2)'}(t_j), & i \geq k_2 - 1, \\ \widetilde{G}_H(t_i), & i < k_2 - 1, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{G}_H(t_i) = \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} \widetilde{F}^{(n)}(t_i) - h \sum_{n=1}^{k_1-1} \left(\sum_{j=k_2-1}^{i-1} \widetilde{F}^{(n)}(t_i - t_j) \widetilde{\Phi}^{(k_2)'}(t_j), \right),$$

функции затрат

$$\widetilde{S}(t_i) = \begin{cases} \widetilde{G}_S(t_i) + h \sum\limits_{j=1}^{i-1} \widetilde{S}(t_i - t_j) \widetilde{\Phi}^{(k_2)'}(t_j), & i \geq k_2 - 1, \\ \widetilde{G}_S(t_i), & i < k_2 - 1, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{G}_S(t_i) = c_1 + \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} c_{n+1} \widetilde{F}^{(n)}(t_i) -$$

$$-h \sum_{j=k_2-1}^{i-1} \left(c_1 + \sum_{n=1}^{k_1-1} c_{n+1} \widetilde{F}^{(n)}(t_i - t_j) \widetilde{\Phi}^{(k_2)'}(t_j) \right)$$

и функция эффективности

$$\widetilde{R}(t_i) = \begin{cases} \widetilde{G}_R(t_i) + h \sum\limits_{j=1}^{i-1} \widetilde{R}(t_i - t_j) \widetilde{\Phi}^{(k_2)'}(t_j), \\ \widetilde{G}_R(t_i), & i < k_2 - 1, \end{cases}$$

где

$$\widetilde{G_R}(t_i) = r_1 t_i (1 - \widetilde{F_1}(ih)) +$$

$$+h \sum_{n=1}^{k_1+k_2-1} \left(\sum_{k=1}^{n} (r_k - r_{n+1}) \sum_{j=n}^{i} \Big(G_k(t_i - t_j) \Big(F_{\overline{k}}^{'(n-1)}(t_j) - F_{\overline{k}}^{'(n)}(t_j) \Big) \Big)(t) + \right.$$

$$\left. + r_{n+1} t_i \Big(F^{(n)}(t_i) - F^{(n+1)}(t_i) \Big) \right).$$

В параграфе 3.4 рассматривается метод Монте-Карло для нахождения функции восстановления, функции затрат и функции эффективности для произвольных моделей процесса восстановления.

С помощью генератора случайных чисел генерируется K реализаций процесса восстановления ω^j на интервале $[0, t]$ с заданными законами распределения наработок

$$\omega^j = \{x_i^j\}_{i=1}^{N_j}, \quad N_j = \max\{n; \sum_{i=1}^{n} x_i \leq t\}.$$

Для каждой реализации процесса вычисляется значение искомой функции $Z(t,\omega)$ (количество отказов, затраты на восстановления, эффективность процесса) с помощью одной из следующих формул:
число отказов

$$Z(t,\omega) = \max\{n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i \le t\},$$

затраты на восстановления

$$Z(t,\omega) = \sum_{i=1}^{N} c_i, \quad N = \max\{n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i \le t\},$$

эффективности работы

$$Z(t,\omega) = \sum_{i=1}^{N} r_i x_i + r_{N+1}(t - \sum_{i=1}^{N} x_i), \quad N = \max\{n;\ \sum_{i=1}^{n} x_i \le t\}.$$

Значение характеристики вычисляется как среднее значение функций $Z(t,\omega)$ по всем реализациям

$$W(t) \approx \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} Z(t,\omega^j).$$

В четвертой главе для обобщенной модели процесса восстановления порядка (k_1,k_2) рассматриваются стратегии использования информационных технологий:

- стратегия только аварийных восстановлений
- стратегия восстановления блоками, в которой, наряду с аварийными восстановлениями, в фиксированные моменты времени τ, 2τ, $\ldots$ проводятся профилактические восстановления.

Решаются задачи выбора и оптимизации этих стратегий по критериям минимума интенсивности затрат и минимума среднего числа отказов.

В случае, когда проводятся профилактические восстановления для стратегии восстановления блоками, формула для вычисления интенсивности затрат имеет вид

$$I(\tau) = \frac{S(\tau)}{\tau}.$$

С помощью выведенной во второй главе формулы асимптотического поведения $S(t)$, получена формула интенсивности затрат стратегии только аварийных восстановлений

$$I_a = \mu_y \sum_{i=1}^{k_2} d_i,$$

где d_i – затраты на восстановления, μ_y – математическое ожидание суммы наработок периодической части процесса восстановления.

Рассмотрен процесс восстановления порядка $(2,1)$ с наработками распределенными по экспоненциальному закону. Доказано, что при выполнении неравенства

$$\frac{c_1}{c_2} < \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1\right)$$

целесообразно проводить стратегию с профилактическими восстановлениями (стратегия восстановления блоками).

Рассмотрена задача определения оптимальной последовательности замен в периодической и непериодической частях процесса восстановления. Приводится решение задачи для процесса восстановления порядка $(3,1)$ в случае экспоненциального распределения первой и второй наработки (функция распределения третьей наработки $F_3(t)$ – произвольная).

Пусть $c_1 > c_2$. Если $\alpha_1 < \alpha_2$, то при $t < t^*$ оптимальна последовательность замен $F_2(t), F_1(t)$, при $t > t^*$ – последовательность $F_1(t), F_2(t)$, где $t^* = \frac{ln\frac{c_1}{c_2}}{\alpha_2 - \alpha_1}$. Если $\alpha_1 > \alpha_2$, то оптимальна последовательность замен $F_2(t), F_1(t)$ для всех $t > 0$.

В заключении приведены основные результаты и выводы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана и обоснована обобщенная модель процесса восстановления в теории надежности использования информационных технологий, учитывающая изменяющиеся функции распределения наработок на отказ, затраты на восстановления, показатели эффективности заменяемых объектов. Определены характеристики процесса восстановления, имеющие важное значение при использовании информационных технологий – функция восстановления, функция затрат и функция эффективности. Получены представления в виде рядов для функции затрат и функции эффективности.

2. Введен и обоснован процесс восстановления порядка (k_1, k_2), учитывающий изменяющиеся затраты на восстановления и показатели эффективности. Для функции затрат и функции эффективности этого процесса получены интегральные уравнения Вольтерра второго рода, а также интегральные представления через функцию восстановления процесса восстановления порядка $(1,1)$, образованного сверткой функций распределения, образующих периодическую часть процесса восстановления.

3. Предложены методы и выведены формулы нахождения приближенных значений основных характеристик обобщенной модели процесса восстановления для любых законов распределения наработок на отказ. Получены явные формулы функции затрат для частных случаев процессов восстановления. Доказана теорема об асимптотическом поведении функции затрат.

4. Доказана теорема о сходимости ряда для функции восстановления процесса восстановления порядка (1,1), образованного функцией распределения, равной k_2-кратной свертке распределений Вейбулла-Гнеденко с произвольными параметрами. Доказанная теорема обосновывает возможность непосредственного интегрирования в интегральных представлениях для получения функции затрат, функции эффективности, функции восстановления в виде рядов.

5. Получены формулы приближенного вычисления n-кратных сверток и их производных. Доказана теорема об оценке погрешности вычисления n-кратной свертки. Разработаны формулы решения интегральных уравнений для функции восстановления, функции затрат и функции эффективности.

6. Рассмотрены модели стратегий использования информационных технологий. Выведены формулы интенсивности затрат для стратегии только аварийных восстановлений и стратегии восстановления блоками (с проведением профилактических восстановлений в фиксированные моменты времени). Решена задача оптимизации по минимуму интенсивности затрат для процесса восстановления порядка (2,1) в случае экспоненциального распределения наработок. Решена задача о порядке проведения замен по минимуму затрат на восстановления для процесса восстановления порядка (3,1) при экспоненциальном распределении первых двух наработок.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Вайнштейн В.И. Численное нахождение функции восстановления для одной модели процесса восстановления / В.И.Вайнштейн, Е.А.Вейсов, О.О.Шмидт // Вычислительные технологии, т. 10. Спец. выпуск. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2005. – С. 4-9.

2. Вайнштейн В.И. Оптимизация стратегий восстановлений при работе информационно-вычислительный систем / В.И.Вайнштейн, О.О.Шмидт // тез. докл. Всеросс. научн. конф. молодых ученых "Наука. Технологии. Инновации. ч. 1. – Новосибирск: НГТУ, 2006. – С. 270-271.

3. Вайнштейн И.И. Процессы восстановления с учетом стоимости восстановлений / И.И.Вайнштейн, О.О.Шмидт // Вопросы математического анализа. – Красноярск: КГТУ, 2007. – С. 9-13.

4. Вайнштейн И.И. Оптимизация стратегии восстановления с проведением профилактических работ и с учетом стоимости затрат. / И.И.Вайнштейн, О.О.Шмидт // Тр. VI Всеросс. ФАМ конф., ч. 1. – Красноярск.: ИВМ СО РАН, КрасГУ, КГТЭИ, 2007. – С. 32-39.

5. Вайнштейн И.И. Надежность и восстановление остаточных знаний /И.И.Вайнштейн, О.О.Шмидт // Повышение качества высшего профессионального образования: мат. Всеросс. науч.-метод. конф. с межд. участием. – Красноярск, 2007. – С. 82.

6. Шмидт О.О. Оценка рисков при эксплуатации технических систем /О.О.Шмидт //Тр. Межд. Науч. Школы МАБР-2007. – СПб., 2007. – С. 399-402.

7. Вайнштейн И.И. Представление функции восстановления в виде степенных рядов и их сходимость /И.И.Вайнштейн, О.О.Шмидт // Электронный журнал "Исследовано в России" , 2008 – № 48. – С. 549-554. http://zhurnal.gpi.ru/articles/2007/048.pdf