На правах рукописи

Санеева Людмила Ивановна

О НЕКОТОРЫХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2007

Работа выполнена в Восточно-Сибирском государственном технологическом университете (г. Улан-Удэ).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Шойнжуров Цырендаша Базарович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Половинкин Владимир Ильич
кандидат физико-математических наук,
Шатохина Лариса Владимировна

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН

Защита состоится 14 ноября 2007г. в 14 часов на заседании совета К212.099.06 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук в Сибирском федеральном университете по адресу: 660074 Красноярск, ул. Акад. Киренского, 26, ауд. Г 4-17.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки Политехнического института СФУ, ул. Акад. Киренского, 26.

Автореферат разослан «___» октября 2007г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
д.ф.-м.н. К.В. Сафонов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования.

В связи с появлением в 1974 году монографии «Введение в теорию кубатурных формул» С.Л. Соболева интерес к задачам приближенного интегрирования с помощью кубатурных формул, точных на многочленах степени не выше заданного числа m, сильно возрос в последние десятилетия.

Этот факт отчетливо проявляется в работах не только математиков, но и ряда других специалистов.

В работе С.Л. Соболева [13] исследование кубатурных формул ведется на основе современных функционально-аналитических методов. Основным результатом С.Л. Соболева по теории кубатурных формул является доказательство асимптотической оптимальности кубатурных формул с регулярным пограничным слоем на решетке в пространстве L_2^m.

Исследования С.Л. Соболева по асимптотически оптимальным формулам были продолжены в различных функциональных пространствах М.Д. Рамазановым, В.И. Половинкиным, Ц.Б. Шойнжуровым, В.Л. Васкевичем, А.В. Войтишек, Н.Н. Осиповым и другими.

Актуальность темы диссертации определяется необходимостью дальнейшего развития методов приближенного вычисления интегралов.

Цель работы: В диссертационной работе целью является построение и исследование кубатурных формул, содержащих значения функции и ее производных с коэффициентами, зависящими от уравнения границы.

Основные задачи исследования:

1. Определение оптимального распределения узлов в зависимости от поведения подынтегральной функции и ее производных;
2. Построение формул с переменным шагом интегрирования для произвольной области интегрирования с гладкой границей. Функционалы погрешности полученных формул должны быть асимптотически оптимальны;
3. Построение кубатурных формул с пограничным слоем на решетке и коэффициентами в пограничном слое, зависящими от уравнения гладкой границы области;
4. Построение эрмитовых кубатурных формул с коэффициентами, зависящими от уравнения границы области. Функционалы погрешности построенных формул, учитывающих значение первой производной, должны быть асимптотически оптимальны.

Объект исследования. В данной работе объектом исследования являются формулы приближенного вычисления многомерных интегралов, в которых участвуют как значения самой функции, так и значения ее производных, область интегрирования Ω при этом ограничена гладкой поверхностью конечной площади в $n-$мерном евклидовом пространстве.

Теоретико-методологическая основа исследования

Методы исследования: Основные результаты получены благодаря функционально-аналитическому подходу. Это предполагает, что подынтегральные функции принадлежат некоторому банахову пространству, а разность между интегралом и приближающей его комбинацией значений подынтегральной функций и значением ее производных рассматривается как результат действия некоторого линейного функционала. Этот функционал, называемый функционалом погрешности кубатурной формулы общего вида является непрерывным. Знание численного значения его нормы позволяет получать гарантированные оценки точности кубатурной формулы общего вида на элементах выбранного пространства.

При функциональном подходе лучшей считается та формула, функционал погрешности которой имеет наименьшую норму.

Достоверность результатов. Достоверность результатов диссертации обеспечена доказательствами всех утверждений, сформулированных в данной работе и численными расчетами интегралов.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту: На защиту выносятся следующие результаты:

1. Определено оптимальное распределение узлов в зависимости от поведения подынтегральной функции и ее производных;
2. Построены формулы с переменным шагом интегрирования для произвольной области интегрирования с гладкой границей. Функционалы погрешности полученных формул асимптотически оптимальны;
3. Построены кубатурные формулы с пограничным слоем на решетке и коэффициентами в пограничном слое, зависящими от уравнения гладкой границы области;
4. Построены эрмитовы кубатурные формулы с коэффициентами, зависящими от уравнения границы области. Функционалы погрешности построенных формул, учитывающих значение первой производной, асимптотически оптимальны.

Все основные результаты и выводы диссертации являются новыми.

В первой главе рассматривается оптимизация расположения узлов. В работе Н.С. Бахвалова рассмотрены аналогичные вопросы в одномерном случае, в данной работе исследовано оптимальное распределение узлов в произвольной области с гладкими границами в $n-$мерном случае.

В этой работе область Ω разбивается на k различных частей и в каждой области строятся кубатурные формулы с различными шагами интегрирования. Доказаны лемма 1 и теорема 1 для нахождения оптимального шага интегрирования для каждой области Ω_j. В лемме 1 получена оценка нормы функционала погрешности с переменным шагом интегрирования для пространства W_∞^m

$$\|l_\Omega\|_{W_\infty^{m^*}} = B_0 \sum_{j=1}^{k} |\Omega_j| h_j^m \left(1 + o(1)\right).$$

Данная оценка для пространства W_∞^m получена впервые.

Также в одномерном случае построены квадратурные формулы с переменным шагом интегрирования, причем в отличие от многомерного случая на границе соединения строится пограничный слой с одной стороны, для которого вычисляются коэффициенты.

Далее исследуется одномерный случай, где подынтегральная функция принадлежит классу $B_F = \left\{ f \in C^m \right\}$. У Н.С. Бахвалова рассмотрено при $m = 2$ (формула трапеции). Оптимальное распределение узлов определяется из дифференциального уравнения $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\left(t'(\varphi)\right)^{m+1}} F(\varphi) \right) = 0$ или $F(\varphi)\left(\varphi'(t)\right)^{m+1} = const.$ Решение находится по формуле

$$t(x) = \frac{\int_0^x F^{\frac{1}{m+1}}(x)dx}{\int_0^1 F^{\frac{1}{m+1}}(x)dx}.$$

Рассматриваются кубатурные формулы для $n-$мерного куба с переменным шагом интегрирования. Отличие от работ Л.В. Войтишек заключается в том, что в пограничном слое на границе разбиения односторонние пограничные слои, полученные в одномерном случае. Коэффициенты кубатурной формулы получены в явном виде.

Во второй главе построены кубатурные формулы для областей с гладкими границами. Вычисление коэффициентов, в построенных формулах проще, чем в работах М.Д. Рамазанова, А.Н. Игнатьева.

Во втором параграфе второй главы построены эрмитовы кубатурные формулы. Функционалы погрешности построенных формул, учитывающих значение первой производной, асимптотически оптимальны.

Отличие от работ других авторов заключается во введение производных в кубатурные формулы.

Построенные формулы легко программируются и дают небольшую погрешность.

Личный вклад автора. Все результаты, включенные в диссертацию, принадлежат лично диссертанту. В совместных работах вклад соавторов равнозначен.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в дальнейших исследованиях кубатурных формул общего вида с пограничным слоем. Полученные в диссертации кубатурные формулы можно применять для приближенного вычисления интегралов.

Апробация результатов исследования. Результаты, изложенные в диссертации, докладывались на VIII Международном семинаре-совещании «Кубатурные формулы и их приложения» в г.Улан-Удэ (2005г.), на Международной конференции «Математика, ее приложения и математическое образование» в г.Улан-Удэ (2002г.), на II Всероссийской конференции с международным участием «Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы» в г.Улан-Удэ (2006г.), на ежегодных научно-практических конференциях Восточно-Сибирского государственного технологического университета (2004-2005гг.), на научном семинаре кафедры «Прикладная математика» Красноярского государственного технического университета (2006г.), на Уфимской международной математической конференции «Теория функций, дифференциальные уравнения, вычислительная математика» (Satellite Conference "Cubature Formulae and Their Applications") (2007г.).

Публикации. Основные результаты опубликованы в 9 работах, список которых помещен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложений. В тексте диссертации имеется 17 рисунков, 15 таблиц. Список литературы включает 96 наименований. Объем работы - 139 машинописных страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационного исследования, показана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, приведены основные определения и постановка задач, дается общее описание основных результатов по теории кубатурных формул в функционально-аналитическом направлении, а также краткое изложение результатов диссертационной работы.

В **первой главе** рассматривается задача об оптимальном распределении узлов в зависимости от поведения подынтегральной функции и ее производных, строятся кубатурные формулы с переменным шагом интегрирования для произвольной области интегрирования Ω с гладкой границей.

В **параграфе 1.1** приведены основные понятия теории кубатурных формул, определены основные пространства $W_p^m\left(E_n\right)$, $\overline{W}_p^m(\overline{\Omega})$, $W_\infty^m(E_n)$.

В диссертационной работе рассматривается пространство $W_p^m\left(E_n\right)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{W_p^m(E_n)} = \left[\int\limits_{E_n} \sum_{|\alpha|\le m} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \left|D^\alpha \varphi(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \le p < \infty. \tag{1}$$

Аналогично определяется норма функции $\varphi\left(x\right)$ в $W_p^m(\Omega)$

$$\|\varphi\|_{W_p^m(\Omega)} = \left[\int_{\Omega}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{2}$$

Определено пространство $W_\infty^m(E_n) = W_\infty^m$.

Пространство W_∞^m есть множество всех измеримых и существенно ограниченных на E_n функций $\varphi(x)$, имеющих всевозможные обобщенные производные $D^\alpha\varphi(x),\ |\alpha|\le m$ до $m-$го порядка включительно и удовлетворяющих условию

$$\varlimsup_{p\to\infty}\|\varphi\|_{W_p^m} = \varlimsup_{p\to\infty}\left[\int_{E_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{3}$$

В данном параграфе доказана следующая лемма:

Лемма 1. *Если существует верхний предел в норме (3) и* $\varphi\in W_p^m(E_n)$ *для достаточно больших* p *и имеет место* $\varlimsup_{p\to\infty}\|\varphi\|_{W_p^m} < \infty,$ *то функции* $D^\alpha\varphi(x),\ |\alpha|\le m$ *существенн ограничены на* E_n

Норма функции в $W_\infty^m(E_n)$ определяется предельным неравенством

$$\|\varphi\|_{W_\infty^m(E_n)} = \lim_{p\to\infty}\left[\int_{E_n}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\left|D^\alpha\varphi(x)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{4}$$

Экстремальная функция функционала $\rho(x)$ в $W_p^m(E_n)$ определяется равенством

$$\varphi_\rho(x) = \sum_{|\alpha|\le m}\left(D^\alpha G_{2m}(x)\right)*\left[\left|D^\alpha G_{2m}(x)*\rho(x)\right|^{\frac{1}{p-1}}\right]\operatorname{sgn}\left(D^\alpha G_{2m}(x)*\rho(x)\right), \tag{5}$$

где $G_{2m}(x) = F^{-1}\left[\dfrac{1}{\left(1+|2\pi\varepsilon|^2\right)^m}\right]$ - фундаментальное решение $m-$метагармонического уравнения $(1-\Delta)^m = \sum_{\alpha=0}^{m}(-1)^\alpha\dfrac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!}\Delta^\alpha,\quad pm>n$.

Функция $G_{2m}(x)$ убывает на бесконечности по экспоненциальному закону, а в начале координат имеет такие же свойства, как у фундаментального решения полигармонического уравнения.

Норма финитного функционала $\rho(x)$ в $W_p^m(E_n)$ равна

$$\|\rho(x)\|_{W_p^{m*}(E_n)} = \left[\int_{E_n}\sum_{|\alpha|\le m}\left|D^\alpha G_{2m}(x)*\rho(x)\right|^{p'}dx\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что норма финитного функционала $\rho(x)$ в $W_\infty^m(E_n)$ равна

$$\|\rho(x)\|_{W_\infty^{m*}(E_n)} = \int_{E_n}\sum_{|\alpha|\le m}\left|D^\alpha G_{2m}(x)*\rho(x)\right|dx \tag{7}$$

и экстремальная функция $\varphi_\rho(x)$ в W_∞^m выражается формулой

$$\varphi_\rho(x) = \sum_{|\alpha|\le m}D^\alpha G_{2m}(x)*\operatorname{sgn}\left(D^\alpha G_{2m}(x)*\rho(x)\right) \tag{8}$$

Рассмотрим разбиение единицы в n – мерном пространстве.

Сначала остановимся на одномерном случае.

Пусть $\omega(x)$ – шапочка, обладающая следующими свойствами:

$\omega(x)\in C^m(E_1),\ \omega(x)>0,\ |\omega(x)|\le 1,\ \omega(x)=\omega(-x),\ \mathrm{supp}\,\omega(x)=[-1,1],$ и $\omega(x)=1$ при $|x|\le\frac{1}{2}.$

Пусть ε – достаточно малое положительное число.

Рассмотрим следующее разложение единицы

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}\omega\left(\frac{x}{\varepsilon}-\frac{3}{2}\beta\right)=1,\quad \forall x\in E_1. \tag{9}$$

Разложение единицы в n – мерном пространстве имеет следующий вид:

$$\prod_{i=1}^{n}\sum_{\beta_i=-\infty}^{\infty}\omega\left(\frac{x_i}{\varepsilon}-\frac{3}{2}\beta_i\right)=1. \tag{10}$$

В формуле (9) группируем в отдельную функцию $\Phi_j(x)$ те слагаемые, носители которых пересекаются с $\Omega_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Если слагаемое попадает в несколько группировок, то относим его в какую-нибудь из них.

В **параграфе 1.2** рассматривается задача об оптимальном распределении узлов в зависимости от поведения подынтегральной функции и ее производных, строятся кубатурные формулы с переменным шагом интегрирования для произвольной области интегрирования Ω с гладкой границей.

Построены кубатурные формулы, используя идею из монографии Ц.Б. Шойнжурова ([16], стр.188-192) и схемы из работ Н.С. Бахвалова [1] и Л.В. Войтишек [2] по теории кубатурных формул.

Пусть область Ω с гладкой границей разбита на k частей $\Omega_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Для каждой области строятся кубатурные формулы с пограничным слоем. Пограничным слоем функционала $l_\Omega(x)$ будем называть множество точек $h\beta$, где коэффициенты C_γ отличны от единицы или которые лежат вне области Ω.

Значения N_j должны быть целыми, поэтому в формулах берем целую часть N_j, т.е. $[N_j]$.

Введем класс функций B_1:

$$B_1=\left\{\varphi\in W_\infty^m \mid \sup_{x\in\bar{\Omega}_j,|\alpha|\le m} vrai\left|D^\alpha\varphi\right|=M_j.\left|D^\alpha\varphi\right|\le M_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k\right\}. \tag{11}$$

Доказана следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть Ω- область определения с гладкой границей и разбивается на* k *частей* $\Omega_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,\quad \frac{|\Omega_j|}{N_j}=h_j^n,\quad B_0=\int\limits_\Delta\sum_{\beta\ne 0}\sum_{|\alpha|\le m}\frac{(2\pi i\beta)^\alpha e^{2\pi i\beta x}}{|2\pi\beta|^{2m}}dx,\quad \sum_{j=1}^{k}N_j=N,$

$l_\Omega(x)=\sum_{j=1}^{k}l_{\Omega_j}^{h_j}(x)$, *где* $l_{\Omega_j}^{h_j}(x)$ *- функционалы погрешности с пограничным слоем для* Ω_j.

Тогда имеет место при $N\to\infty$ *асимптотическое равенство*

$$\|l_\Omega\|_{W_\infty^{m*}}=B_0\sum_{j=1}^{k}|\Omega_j|h_j^m(1+o(1)). \tag{12}$$

Теорема 1. *При выполнении условия леммы лучший размер сетки в классе функций* B_1 *определяется равенством*

$$h_j = \left[\frac{1}{N^{\frac{m+n}{n}} M_j} \sum_{i=1}^{k} M_i \left|\Omega_i\right|^{\frac{m+n}{n}} \right]^{\frac{1}{m+n}} \tag{13}$$

Отсюда видно, что размер сетки области меньше там, где норма больше.

Рассмотрим одномерный случай.

Сначала была формула с симметричным пограничным слоем с мелким шагом h.

$$l_{(0,1)}^h(x) = \varepsilon_{(0,1)}(x) - h \sum_{hs \in \{x | \rho([0,1],x) \le Lh\}} C_s \delta(x - hs).$$

Разбили отрезок $[0,1]$ на непересекающиеся интервалы с концами $\{t_j\}$ в некоторых узлах $h\beta$: $[0,1] = \bigcup_{j=1}^{k} \Omega_j$, $\Omega_j = (t_j^{(1)}, t_j^{(2)})$. Для каждого интервала Ω_j взяли свой функционал погрешности с шагом h_j более крупным, кратным h, $\frac{h_j}{h} = k_j$ - целые числа.

$$l_{\Omega_j}^{h_j}(x) = \varepsilon_{\Omega_j}(x) - h_j \sum_{h_j \beta \in [t_j^{(1)}, t_j^{(2)}]} K_\beta(j) \delta(x - h_j \beta).$$

Условия для вычисления коэффициентов $K_\beta(j)$ таковы.

Пусть $\frac{|\Omega|}{N} = h$ и $l_\Delta^h(x)$ – функционал с симметричным пограничным слоем с узлами на решетке с шагом h, $\Delta = [0,1]$.

Разобьем Δ на непересекающиеся интервалы Ω_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ с концами в узлах $h\beta \in [0,1]$, $\Delta = \sum_{j=1}^{k} \Omega_j$ и $\left|\Omega_j\right| > 0$.

Функционал с переменным шагом интегрирования представим в виде

$$l_{(0,1)}^h(x) = \sum_{j=0}^{k} l_{\Delta_j}^{h_j}(x). \tag{14}$$

Вспомогательный точечный функционал

$$l_s^j(x) = h\delta(x - hs) - \sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma^s(j) \delta(x - h_j \gamma) h_j, \quad s = 0, 1, 2, \ldots, k_j - 1, \tag{15}$$

должен удовлетворять условиям:

$$\left\langle l_s^j, x^\alpha \right\rangle = 0, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m. \tag{16}$$

Отсюда коэффициенты $C_\gamma^s(j)$ определяется из систем:

$$\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma^s(j) \gamma^\alpha = S^\alpha \left(\frac{h}{h_j} \right)^{\alpha+1}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, m, \quad s = 0, 1, \ldots, k_j - 1 \tag{17}$$

Вычисление показывает, что

$$C_\gamma^s(j) = \frac{h}{h_j} \cdot \frac{(-1)^{m-\gamma} \eta(\eta-1)\ldots(\eta-m)}{\gamma(m-\gamma)!(\eta-\gamma)}, \tag{18}$$

где $\eta = s\dfrac{h}{h_j} = \dfrac{s}{k_j} < 1,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ k_j - 1.$

Обозначим через $t_j^{(1)}$ и $t_j^{(2)}$ соответственно левые и правые концы интервалов Ω_j, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Суммируя функционалы по $h_j\beta \in \Omega$ и s, имеем

$$l_j(x) = \sum_{h_j\beta = t_j^{(1)}}^{t_j^{(2)}} \sum_{\gamma=0}^{m} \sum_{s=0}^{k_j-1} h_j C_\gamma^s(j)\,\delta\big(x - h_j(\beta+\gamma)\big) = \sum_{h_j\beta = t_j^{(1)}}^{t_j^{(2)}+m-1} h_j K_\beta(j)\,\delta\big(x - h_j\beta\big), \tag{19}$$

$$\text{где } K_\beta(j) = \begin{cases} \sum\limits_{\gamma=0}^{m}\sum\limits_{s=0}^{k_j-1} C_\gamma^s(j),\ t_j^{(1)} \le h_j\beta \le (m-1)h_j + t_j^{(1)}, \\ 1, \qquad t_j^{(1)} + mh_j \le h_j\beta < t_j^{(2)}, \\ \sum\limits_{\gamma=0}^{t_j^{(2)}+m-1-\beta} \ \sum\limits_{s=0}^{k_j-1} C_{m-\gamma}^s(j),\ t_j^{(2)} \le h_j\beta < t_j^{(2)} + mh_j. \end{cases} \tag{20}$$

Искомый функционал (19) построен.

Особенность этого функционала заключается в том, что он аннулирует точечные функционалы по малым участкам $\left[t_j^{(1)}, t_j^{(2)}\right]$ и заменяет их функционалами с шагами h_j.

Пусть $F(x)$ - модельная функция, характеризующая свойства подкласса B_F m раз непрерывно дифференцируемых функций $\left|f^{(m)}\right| \le F(x)$ на отрезке $[0,1]$.

Теорема 2. *Пусть* $f \in B_F$, $x = \varphi(t)$ *-монотонная, непрерывно дифференцируемая функция,* $\varphi(0) = 0$ *и* $\varphi(1) = 1$ *и* $t = t(x)$ *обратная функция к* $\varphi(t)$, $t(0) = 0,\ t(1) = 1$ *и* $Sf = \sum_{j=1}^{N} S_j f$ *- квадратурная формула с остаточным членом*

$$R = \frac{1}{N^n}\int_0^1 \left[\varphi'(t)\right]^{m+1} B_0 F\left[\varphi(t)\right] dt + o(1).$$

Тогда при $N \to \infty$ *асимптотически оптимальное распределение узлов* x_β *формулы* $Sf = \sum_{j=1}^{N} S_j f$ *выражается формулой* $t(x) = \dfrac{\int_0^x F^{\frac{1}{m+1}}(x)\,dx}{\int_0^1 F^{\frac{1}{m+1}}(x)\,dx}.$

Такой подход позволяет оценить функционалы погрешности на малых участках, в этом заключается отличие от работы Л.В. Войтишек [2].

Рассмотрим $n-$мерный случай.

Построенные функционалы используются для вычисления $n-$кратных интегралов для $n-$мерного куба и в этом направлении вычисления интегралов обобщают исследования Л.В. Войтишек.

Интеграл по кубу Δ сводится к вычислению интегралов

$$\int\limits_{\Delta}\varphi(x)dx=\sum_{\beta_1=0}^{N}\sum_{\beta_2=0}^{N}...\sum_{\beta_n=0}^{N}K_{\beta_1}K_{\beta_2}...K_{\beta_n}h^n\varphi(h\beta_1,h\beta_2,...,h\beta_n)=$$
$$=\prod_{i=0}^{n}\sum_{\beta_i=0}^{N}K_{\beta_i}\varphi(h\beta_1,h\beta_2,...,h\beta_i,...,h\beta_n)h^n. \tag{21}$$

Построена кубатурная формула, содержащая значения функции и ее производных, на плоскости:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1\varphi(x_1x_2)dx_1dx_2\cong h^2\sum_{\gamma_1=0}^{N}\sum_{\gamma_2=0}^{N}C_{\gamma_1}C_{\gamma_2}\varphi(h\gamma_1,h\gamma_2)+h^2\sum_{S_1=0}^{N}\sum_{S_2=0}^{N}K_{S_1}K_{S_2}\varphi'(h\gamma_1,h\gamma_2) \tag{22}$$

Пусть $\Delta - n-$мерный куб, $\frac{1}{N}=h,$ $\Delta_j\in\Delta-$прямоугольные $n-$мерные параллелепипеды, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$ с вершинами в узлах решетки с шагом h с длинами ребер b_j-a_j, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$ где a_j и b_j принадлежат решетке с шагом h_j.

Пусть $l_\Delta^h\left(x\right)-$функционал с симметричным пограничным слоем для Δ.

Построим точечный функционал с пограничным слоем путем суммирования точечных функционалов, построенных выше, с шагом h_j вдоль положительных направлений осей координат. В результате получаем односторонний пограничный слой вдоль Δ_j - $n-$мерного параллелепипеда.

Тогда искомый функционал $l_\Delta^h\left(x\right)$ имеет вид

$$l_\Delta^h\left(x\right)=\varepsilon_\Delta\left(x\right)-\sum_{j=0}^{k}l_{\Delta_j}^{h_j}\left(x\right),$$

где $l_{\Delta_j}^{h_j}\left(x\right)$ - функционал с шагом h_j с точечным пограничным слоем вдоль координатных осей для области Δ_j

Минимизируя норму этого функционала в пространстве $W_\infty^m\left(E_n\right)$ при определенных условиях, указанных в лемме 2, находим лучший размер сетки.

Во **второй главе** исследуются кубатурные формулы с пограничным слоем с коэффициентами, зависящими от уравнения границы.

В **параграфе 2.1** рассматриваются кубатурные формулы с пограничным слоем на решетке с коэффициентами, зависящими от уравнения границы области только в пограничном слое. Ранее в работе [11] М.Д. Рамазанова изучались аналогичные формулы. В данной работе упрощены вычисления коэффициентов.

Пусть $\int\limits_{\Omega}f(x)dx$ - многомерный интеграл, $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$ и $\Delta_{h\beta}$ - куб, сдвинутый на вектор $h\beta$. Сначала дадим пояснения в двумерном случае. $\Delta'_{h\beta}$ - криволинейный параллелограмм, Ω – ограниченная область с гладкой границей $\Gamma=\Gamma(\Omega)$ на плоскости, начало координат $(0,0)\subset\Omega$, все пространство E_2 и область Ω делятся на k частей, $\Omega=\bigcup_{j=1}^{k}\omega_j$.

Для разбиения единицы используем следующие многочлены (из работ М.Д. Рамазанова)

Пусть $\varphi^{(1)}\left(t\right)=\begin{cases}t^m\left(1-t\right)^m, & t\in\left(0,1\right),\\ 0, & t\notin\left(0,1\right),\end{cases}$

$$\varphi^{(2)}\left(t\right)=\int\limits_0^t\varphi^{(1)}\left(\tau\right)d\tau\Big/\int\limits_0^1\varphi^{(1)}\left(\tau\right)d\tau \text{ и } \varphi\left(t\right)=\varphi^{(2)}\left(2+2t\right)\cdot\varphi^{(2)}\left(2-2t\right).$$

Тогда $\varphi(t)\in C^{\infty}$, $\operatorname{supp}\varphi(\mathrm{t})=[-1,1]$,

$\varphi(t)=1$ при $|t|<\dfrac{1}{2}$ и $\varphi(t)=Ch^{m}$, $C>0,$ при $|t|<Lh,\ L>0.$

Разложение единицы в E_n имеет следующий вид:

$\mathop{\Pi}\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{\beta_i=-\infty}^{\infty}\varphi\left(\dfrac{x_i}{\varepsilon}-\dfrac{3}{2}\beta_i\right)=1$, где $\varepsilon>0.$

Слагаемые, носители которых пересекаются с ω_j, в сумме сгруппируем в отдельные функции $\Phi_j(x),\ j=1,2,\dots,k$. Если слагаемое попадает в несколько группировок, то отнесем его к какой-нибудь из них.

Пусть $S_j=\operatorname{supp}\Phi_{\mathrm{j}}(x)$, $\omega_j\subseteq\Omega_j$ и $\Omega=\mathop{\cup}\limits_{j=1}^{k}\omega_j\subset\sum\limits_{j=1}^{k}S_j$.

Для каждой функции $\Phi_j(x),\ j=1,2,\dots,k$ построим свой функционал $\rho_j(x)$так, чтобы функционал $l_{\Omega}^{h}(x)$ с пограничным слоем получился по следующей формуле

$$l_{\Omega}^{h}(x)=\sum_{j=1}^{k}\Phi_j(x)\rho_j(x). \tag{23}$$

$x_2=\lambda(x_1)$ - уравнение границы области Ω.

Замена $\begin{cases}y_2=x_2-\lambda(x_1),\\ y_1=x_1\end{cases}$ преобразует области ω_j в область $\omega_j{}'$, S_j в $S_j{}'$, $\Phi_j(x)$ в $\hat{\Phi}_j(y)$, границу $\Gamma(\omega_j)$ области ω_j в кусок оси $y_2=0$ и криволинейный параллелограмм $\Delta'_{h\beta}$ переходит в прямоугольник $\Delta_{h\beta}$ со стороной h.

В переменных *y* построен следующий функционал

$$\left\langle l_{\Delta_{h\beta}},y^{\alpha}\right\rangle=\int\limits_{\Delta_{h\beta}}y^{\alpha}\left[1-\sum_{\gamma_1\in\Delta_{h\beta_1}}h^2C_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2=0}^{m}C_{\gamma_2}\delta\big(y_1-h(\beta_1+\gamma_1)\big)\delta\big(y_2-h(\beta_2+\gamma_2)\big)\right]dy. \tag{24}$$

Сначала строится функционал с узлами на криволинейной решетке. Для этого функцию $\delta\big(y_2-h(\beta_2+\gamma_2)\big)$ в формуле (24) аппроксимируем с помощью линейной комбинацией функции $\delta\big(y_2-h(\beta_2+\gamma_2+s)+\eta(\beta_1)h\big)$, где $\eta(\beta_1)=\left\{\dfrac{\lambda(h\beta_1)}{h}\right\}$ дробная часть числа $\dfrac{\lambda(h\beta_1)}{h}$.

Элементарный функционал для куба $\Delta_{h\beta}$ принимает вид

$$\left\langle l_{\Delta_{h\beta}},y^{\alpha}\right\rangle=$$
$$=\int\limits_{\Delta_{h\beta}}y^{\alpha}\left[1-\sum_{\gamma_1\in\Delta_{h\beta_1}}h^2C_{\gamma_1}\sum_{s=0}^{m}K_s(\beta_1)\delta\big(y_1-h(\beta_1+\gamma_1)\big)\delta\big(y_2-h(\beta_2+\gamma_2+s)+\eta(\beta_1)h\big)\right]dy, \tag{25}$$

где коэффициенты определяются из следующей системы

$$\sum_{s=0}^{m}K_s s^{\alpha}=\big(\eta(\beta_1)\big)^{\alpha},\ \alpha=0,1,...m \tag{26}$$

Узлы кубатурной формулы, соответствующей функционалу (25), лежат в вершинах криволинейной решетки.

С помощью обратной замены переменных $x_2 = y_2 + \lambda(y_1)$ и $x_1 = y_1$, получен функционал

$$l_{\Delta'_{h\beta}}(x) = \varepsilon_{\Delta'_{h\beta}}(x) -$$
$$- \sum_{\gamma_1 \in \Delta_{h\beta_1}} h^2 \sum_{\gamma_2=0}^{m} C_{\gamma_2} \sum_{s=0}^{m} K_s(\beta_1) \delta\big(x_1 - h(\gamma_1 + \beta_1)\big) \delta\big(x_2 - \sigma(\beta_1)h + h(\gamma_2 + \beta_2 + s)\big), \tag{27}$$

где $\sigma(\beta_1)$ - целая часть числа $\dfrac{\lambda(h\beta_1)}{h}$.

Для определенности рассматривается одна из областей $\omega_1, \omega_2, ...\omega_k$, например ω_1, в переменных x.

Учитывая срезывающую функцию $\hat{\Phi}_1(y)$, элементарные функционалы $l_{\Delta_{h\beta}}$ суммируем по всем β_1 и β_2, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$. При этом, по свойству функционала $l_{\Delta_{h\beta}}$, коэффициенты при суммировании по β_1 и β_2 будут равны единице.

$$\sum_{\beta_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma_1 \in \Delta_{h\beta_1}} h^2 C_{\gamma_1} \delta\big(y_1 - h(\gamma_1 + \beta_1)\big) \sum_{\gamma_2=0}^{m} C_{\gamma_2} \sum_{s=0}^{m} K_s(\beta_1) \delta\big(y_2 - h(\gamma_2 + \beta_2 + s) + \eta(\beta_1)h\big) =$$
$$= h^2 \sum_{\beta_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta_2=0}^{\infty} C_{\beta_2}(\beta_1) \delta\big(y_2 - h\beta_2 + \eta(\beta_1)h\big) \delta\big(y_1 - h\beta_1\big), \tag{28}$$

где для простоты записи в этом выражении характеристические функции не включены.

После преобразования коэффициенты формулы (28) определяются следующей системой

$$C_{\beta_2}(\beta_1) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{s=0}^{\min(m,\beta_2)} K_s(\beta_1) \sum_{\gamma=0}^{\min(m,\beta_2 - s)} C_\gamma, \ \textit{если}\ 0 \le \beta_2 \le m, \\ \displaystyle\sum_{s=0}^{\mathrm{m}} K_s(\beta_1) \sum_{\gamma=0}^{\min(m,\beta_2 - s)} C_\gamma, \textit{если}\ m < \beta_2 < 2m, \\ 1, \qquad \textit{если}\ \beta_2 \ge 2m, \end{cases} \tag{29}$$

где коэффициенты $K_s(\beta_1)$ и C_γ определяются из систем

$$\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma \gamma^\alpha = \frac{1}{\alpha+1}, \alpha = 0,1,...m \text{ и } \sum_{s=0}^{m} K_s(\beta_1) s^\alpha = \eta^\alpha(\beta_1), \alpha = 0,1,...m. \tag{30}$$

В результате построены функционалы погрешности для областей ω_j, $j = 2,3,...k$.

$$\Phi_j(x)\rho_j(x) = \Phi_j(x)\left[\varepsilon_{\omega_j}(x) - \sum_{h\beta \in \omega_j} h^n C_\beta^j(\beta_1)\delta(x - h\beta)\right]. \tag{31}$$

После вспомогательного построения основных формул $\Phi_j(x)\rho_j(x)$, $j = 1,2,...k$, получена, на основании формулы (23), кубатурная формула с пограничным слоем с узлами на решетке и коэффициентами, зависящими от уравнения границы в пограничном слое.

В качестве примера приведено вычисление двойного интеграла $\iint_\Omega f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \cong \sum_{k=1}^{N} C_k f(x_{1k}, x_{2k})$, где $\Omega = \left\{x_1^2 + x_2^4 \le 1,\ x_1,\ x_2 \in E_2\right\}$.

В **параграфе 2.2** исследуются эрмитовы кубатурные формулы, содержащие значения функции и её производных в направлении одной из координатных осей для областей $\omega_j,\ j=1,2,\ldots,k$ в n-мерном пространстве. Вычисляются коэффициенты в узлах, лежащих на прямой параллельной в указанном направлении, а в других направлениях коэффициенты равны единице.

Пусть выпуклая область Ω имеет гладкую границу $\Gamma=\Gamma(\Omega)\in C^{(m+1)}$ в n-мерном пространстве, любая прямая пересекает границу области не более чем в двух точках и все пространство E_n делится на k частей $\omega_j,\ j=1,2,\ldots,k$, гиперплоскостями параллельными координатным плоскостям и $\omega_{j,h}=\{x\in\omega_j, \rho(x,\Gamma(\omega_j))\le Lh\},\quad j=1,2,\ldots,k$. $\Phi_j(x)$ - срезывающие финитные функции, соответствующие областям ω_j, и $\sum_{j=1}^{k}\Phi_j(x)\equiv 1$ - разложение единицы в $n-$мерном пространстве (из работ М.Д. Рамазанова). $x=(x',\ x_n)$, $x'=(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_{n-1})$, $y'=(y_1,\ y_2,\ \ldots,y_{n-1})$, $\beta'=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, $\gamma'=(\gamma_1,\ \ldots,\gamma_{n-1})$ и граница $\Gamma(\omega_j)$ области ω_j выражается уравнением: $x_n=\lambda_j(x')$.

Замена $y'=x'$ и $y_n=x_n-\lambda_j(x')$ преобразует области ω_j в область ω_j', $\Phi_j(x)$ в $\hat{\Phi}_j(y)$, границу $\Gamma(\omega_j)$ области ω_j в кусок гиперплоскости $y_n=0$ и криволинейный параллелограмм $\Delta'_{h\beta}$ в куб $\Delta_{h\beta}$.

Построен элементарный функционал погрешности в переменных $y=(y',y^n)$.

$$l_{\omega'_1}(y)\hat{\Phi}_1(y)=\hat{\Phi}_1(y)[1-$$
$$-\sum_{\beta'=-\infty}^{\infty}h^n\sum_{\gamma'=0}^{m}C_{\gamma'}\delta(y'-h\gamma'-h\beta')dy'\sum_{\beta_n=0}^{\infty}\sum_{\gamma_n=0}^{m}C_{\gamma_n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{\sigma=0}^{m}K_{s,1}^{\sigma}(\beta_1)(-1)^{\sigma}h^{\sigma}\delta^{(\sigma)}(y_n-h\gamma_n-h\beta_n-hs+h\eta(\beta'))dy_n\Bigg], \tag{32}$$

где $\beta'=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, $\gamma'=(\gamma_1,\ \ldots,\gamma_{n-1})$, $\eta(\beta')=\left\{\dfrac{\lambda_1(h\beta')}{h}\right\}$.

Коэффициенты вычисляются из следующих систем уравнений

$$\sum_{\gamma_j=0}^{m}C_{\gamma_j}\gamma_j^{\alpha}=\frac{1}{\alpha+1},\ \alpha=0,1,\ \ldots,m,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$$

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{\sigma=0}^{m}K_{s,1}^{\sigma}(\beta_1)\left[Z^{\alpha}\right]^{(\sigma)}=\eta^{\alpha}(\beta'),\ \alpha=0,1,2,\ldots,(m+1)^2-1,$$

где $\left[Z^{\alpha}\right]^{(\sigma)}$ - означает, что взята производная порядка σ от степени y^{α} и вычислена при $y=Z$.

В общем виде построен функционал погрешности $\rho_1(x)$ для области ω_1

$$\Phi_1(x)\rho_1(x)=\Phi(x)\left[1-\sum_{\beta'=-\infty}^{\infty}h^n\delta(x'-h\beta')\sum_{\beta_n=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{m}B_{\beta_n,1}^{\sigma}(\beta')h^{\sigma}\delta^{(\sigma)}\left(x_n-h\beta_n-\left[\frac{\lambda_1(\beta')}{h}\right]h\right)\right], \tag{33}$$

$$\text{где } B_{\beta_n,1}^{\sigma}(\beta')=(-1)^{\sigma}\sum_{s=0}^{\min(m,\beta)}K_s^{\sigma}\sum_{\gamma_n=0}^{\min(m,\beta-s)}C_{\gamma_n}. \tag{34}$$

Аналогичные функционалы погрешностей строятся для остальных областей $\omega_j,\ j=2,3,\ldots,k$. Следовательно, функционал погрешности $l_{\Omega}(x)$ для области Ω построен

$$l_\Omega(x)=\sum_{j=1}^{k}\Phi_j(x)\rho_j(x). \tag{35}$$

Рассмотрен пример при m=3, S=2 и $\sigma=1$ (в нижеследующих преобразованиях для удобства записи индекс n и единица в индексе коэффициента $K_{s,1}^{\sigma}$ пропущены).

Выражение

$$\sum_{\beta=0}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{3}C_\gamma\sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{s=0}^{2-\sigma}K_s^{\sigma}\delta^{(\sigma)}(x-h\beta-h\gamma-hs)=$$
$$=\sum_{\beta=0}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{3}C_\gamma\Big[K_0^0\delta(x-h\beta-h\gamma)+K_1^0\delta(x-h\beta-h\gamma-h)+K_2^0\delta(x-h\beta-h\gamma-2h)+$$
$$+K_0^1h\delta'(x-h\beta-h\gamma)+K_1^1h\delta'(x-h\beta-h\gamma-h)\Big], \tag{36}$$

где коэффициенты C_γ и K_s^σ определяется из систем:

$$\sum_{\gamma=0}^{3}C_\gamma\gamma^\alpha=\frac{1}{\alpha+1},\ \alpha=0,1,2,3\ \text{ и }\ \sum_{\sigma=0}^{1}\sum_{s=0}^{2-\sigma}K_s^\sigma\left[S^\alpha\right]^{(\sigma)}=\eta^\alpha,\ \alpha=0,1,2,3,4. \tag{37}$$

после дальнейших преобразований формула (36) принимает следующий вид:

$$S=\sum_{\beta=0}^{\infty}h^n\left[B_\beta^0(\beta_1)\delta(x-h\beta)+B_\beta^1(\beta_1)h\delta'(x-h\beta)\right], \tag{38}$$

где $B_\beta^0(\beta')=\sum_{s=0}^{\min(2,\beta)}K_s^0\sum_{\gamma=0}^{\min(2,\beta-s)}C_\gamma,\quad B_\beta^1(\beta')=\sum_{s=0}^{\min(1,\beta)}K_s^1\sum_{\gamma=0}^{\min(3,\beta-s)}C_\gamma$ (39)

Построен функционал погрешности для ω_1

$$\Phi_1(x)\rho_1(x)=$$
$$=\Phi_1(x)\left[\varepsilon_{\Omega'_{1,h}}(x)-\sum_{\beta'}h^n\delta(x'-h\beta')\sum_{\beta=0}^{\infty}\left[B_\beta^0(\beta')\delta(x-h\beta)+B_\beta^1(\beta')h\delta'(x-h\beta)\right]\right] \tag{40}$$

Аналогично строятся формулы для других областей.

Рассмотрен функционал $\rho_1(x)$. Вспомогательный функционал имеет вид:

$g_1(x)=\sum_{h\beta\in\Omega^*_{1,h}=S_{1.h}/\Omega_1}l_{\Delta'_{h\beta}}$.

$$\Phi_1(x)\left[\rho_1(x)+g_1(x)\right]=\sum_{\beta'}h^n\delta(x'-h\beta')\sum_{\beta_n=-\infty}^{\infty}\left[\delta(x_n-h\beta_n-K_1h\delta'(x_n-h\beta_n))\right], \tag{41}$$

где $K_1=B_{\beta_n,1}^1(\beta')$.

Преобразуем (41)

$$\Phi_1(x)\left[\rho_1(x)+g_1(x)\right]=\Phi_1(x)\left[\Phi_0\left(\frac{x}{h}\right)-K_1h\Phi'_0\left(\frac{x}{h}\right)\right]. \tag{42}$$

Аналогичные функционалы получаются и для остальных ω_j при $j=2,\ 3,\ \ldots,\ k$. Окончательно имеем

$$\int_\Omega\varphi(x)dx\approx\sum_{j=1}^{k}\Phi_j(x)\rho_j(x). \tag{43}$$

Следовательно, построена кубатурная формула, содержащая в узлах значения функции и значения ее первой производной для областей с гладкими границами.

В данном параграфе доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in W_p^m(E_n)$, $pm > n$ *и* $0 \le 1 < m - \dfrac{n}{p}$,

$l_\Omega(x) = \varepsilon_\Omega(x) - \sum_{j=1}^{k} \Phi_j(x)\rho_j(x)$ *- функционал погрешности, где*

$$\rho_j(x) = \sum_{\beta'} h^n \delta(x' - h\beta')\left[\sum_{\beta_n=0}^{\infty} B^0_{\beta_n, j}(\beta')\delta(x_n - h\beta_n) - \sum_{\beta_n=0}^{\infty} B^1_{\beta_n, j}(\beta') h\delta'(x_n - h\beta_n)\right],$$

то при $h \to 0$ *функционал асимптотически оптимален в* W_p^m *и норма функционал равна*

$$\left\| l_\Omega^h \right\|_{W_p^{m*}(E_n)} = \left[|\Omega|^{\frac{p-1}{p}} h^m \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Delta \left| \sum_{\beta \ne 0} \frac{D^\alpha e^{2\pi i \beta x}}{|2\pi\beta|^m} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{\beta \ne 0} \frac{D^\alpha K_j e^{2\pi i \beta x}}{|2\pi\beta|^m} \right|^{p'} dx \right]^{\frac{1}{p'}} + O\left(h^{m+1}\right), \tag{44}$$

где $K_j = B^1_{\beta_n, j}(\beta')$, $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Основные результаты работы

1. Определено оптимальное распределение узлов в зависимости от поведения подынтегральной функции и ее производных;
2. Построены формулы с переменным шагом интегрирования для произвольной области интегрирования с гладкой границей. Функционалы погрешности полученных формул асимптотически оптимальны;
3. Построены кубатурные формулы с пограничным слоем на решетке и коэффициентами, зависящими от уравнения гладкой границы области в пограничном слое;
4. Построены эрмитовы кубатурные формулы с коэффициентами, зависящими от уравнения границы области. Функционалы погрешности построенных формул, учитывающих значение первой производной, асимптотически оптимальны.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору Ц.Б. Шойнжурову за постоянное внимание и помощь в работе.

Список использованных источников

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.
2. Войтишек Л.В. Об одном частном случае построения кубатурных формул с пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – Т.9, №2. – С. 417-419.
3. Войтишек Л.В. Построение кубатурных формул с переменой шага // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики: Труды семинара С.Л. Соболева./ Под ред. С.В.Успенского. - Новосибирск, 1978. - №1. – С.46-53.
4. Васкевич В.Л. Критерий гарантированной точности вычислений многомерных интегралов. – Журн. «Вычислительная технология» - 2003. – Т.9. – С.44-49.
5. Иосида К. Функциональный анализ. – М.:Мир, 1967. -5-624с.
6. Коробов Н.М. Приближенные вычисления кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. – 1957.-№6.-С.1062.
7. Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. –М.: Наука, 1963. –224с.
8. Лебедев В.И. О квадратурах наивысшей алгебраической степени точности ВКН // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики. – Новосибирск, 1973.
9. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. // - М.:Наука, 1981. – 231с.
10. Осипов Н.Н., Петров А.В. Построение решетчатых кубатурных формул, точных на тригонометрических многочленах четырех переменных // Журн. «Вычислительные технологии» - 2004.-Т.9-С.102-110.
11. Рамазанов М.Д. Лекции по теории приближенного интегрирования. – Уфа: Изд-во Башкир. ун-та, 1973. – 174 с.
12. Салихов Г.Н. К теории групп правильных многогранников. // Докл. АН СССР, - 1965.-№3.-Т.163.-С.115-121.
13. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808с.
14. Шойнжуров Ц.Б. Теория кубатурных формул в функциональных пространствах с нормой, зависящей от функции и ее производных: Дис… докт. физ-мат. наук (01.01.01, 01.01.07) / Вост.-Сиб. технолог. ин-т – Улан-Удэ, 1977. – 235 с.
15. Шойнжуров Ц.Б. Асимптотически оптимальные квадратурные и кубатурные формулы. – Новосибирск, 1979. – С. 28. – (Препринт / АН СССР. Сиб. отд-е. ин-т математики; №55)
16. Шойнжуров Ц.Б. Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. – Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005.-247с.

Основные результаты диссертации опубликованы автором в следующих работах:

1. Васильева Е.Г., Инхеева Л.И., Вампилова Н.А. Квадратурные формулы с пограничным слоем при четном m в пространстве $L_p^m(E_1)$ // Математика, ее приложения и математическое образование: Материалы международной конференции. Ч.1. (24-28 июня 2002г., г. Улан-Удэ), - Улан-Удэ: ВСГТУ, 2002. – С. 132-138.
2. Инхеева Л.И., Булгатова Е.Н., Кубатурные формулы для гладких областей // Материалы VIII международного семинара–совещания «Кубатурные формулы и их приложения», изд–во ВСГТУ, 2005.- С.82-91.
3. Санеева Л.И., Формулы с переменным шагом интегрирования // Материалы II Всероссийской конференции с международным участием “Инфокоммуникационные и вычислительные технологии и системы”. Ч.2 , изд-во БГУ, 2006. – С.114-117.
4. Санеева Л.И., Булгатова Е.Н., Кубатурные формулы для гладких и кусочно-гладких криволинейных областей// Вестник ВСГТУ.- 2005.-№4.– С.4-5.
5. Санеева Л.И., Булгатова Е.Н., Экстремальная функция и норма оптимального периодического функционала// Вычислительная технология. -2006.- Т.11, №4.- С.113-117.
6. Шойнжуров Ц.Б., Инхеева Л.И., Цыбенова З.И. Решение одного класса квазилинейных уравнений в дивергентной форме // Математика, ее приложения и математическое образование: Материалы международной конференции. Ч.1. (24-28 июня 2002г., г. Улан-Удэ), - Улан-Удэ: ВСГТУ, 2002. – С. 145-151.
7. Шойнжуров Ц.Б., Инхеева Л.И. Норма периодического функционала погрешности квадратурной формулы в одномерном случае // Сб. научных трудов: Физико-математические науки. — Улан-Удэ: ВСГТУ, 2004.-С. 39–44.
8. Шойнжуров Ц.Б., Инхеева Л.И., Булгатова Е.Н. Построение квадратурных формул с помощью разложения единицы // Сб. научных трудов: Физико-математические науки. — Улан-Удэ: ВСГТУ, 2005. – С.14-21.
9. Шойнжуров Ц.Б., Санеева Л.И. Оптимизация узлов кубатурных формул для областей с кусочно-гладкой границей // Материалы Уфимской международной математической конференции, посвященной памяти А.Ф.Леонтьева, Т.3 Уфа: ИМВЦ, 2007. – С.37-39.