На правах рукописи

Медведева Мария Ивановна

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА

01.01.07 — вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2009

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Половинкин Владимир Ильич**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Кытманов Александр Мечиславович**
	кандидат физико-математических наук, **Шатохина Лариса Владимировна**
Ведущая организация:	Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

Защита состоится 23 октября 2009 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 в Сибирском федеральном университете по адресу:

660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, корпус Ж, ауд. 1-15.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки Сибирского федерального университета, ул. Киренского, 26.

Автореферат разослан «____» сентября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук, доцент **К. А. Кириллов**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Теория квадратурных формул и их многомерных аналогов — кубатурных формул является достаточно хорошо развитой областью математического анализа и вычислительной математики. Построением правил приближённого интегрирования занимались такие великие математики прошлого, как И. Ньютон, Л. Эйлер, К. Ф. Гаусс, П. Л. Чебышёв и др. Весомый вклад в современную теорию квадратурных и кубатурных формул, во многом определивший её развитие, внесли академики Н. С. Бахвалов, С. Н. Никольский, С. Л. Соболев и созданные ими школы.

Можно указать на три важнейших направления, которые прослеживаются в данной тематике. Первое направление состоит в построении и изучении формул, точных на конечномерных подпространствах алгебраических, тригонометрических или сферических многочленов. Второе направление характеризуется построением формул на основе теоретико-вероятностного подхода (метод Монте-Карло). Третье направление, к которому относится настоящая диссертация, связано с непосредственным применением методов функционального анализа и теории функций к выводу оценок погрешностей формул приближённого интегрирования.

Последний подход к изучению квадратурных и кубатурных формул осуществлялся в работах многих учёных, в частности, С. М. Никольского [1], С. Л. Соболева [2], а также его учеников и последователей: В. Л. Васкевича [3], В. И. Половинкина [4, 5], М. Д. Рамазанова [6, 7], Ц. Б. Шойнжурова [8, 9] и др.

Интерес к задачам, связанным с теорией кубатурных и квадратурных формул, не ослабевает. Это доказывает обилие научных публикаций, а также регулярное проведение научных конференций и семинаров, посвященных кубатурным формулам и их приложениям.

Цель работы. Вывод и анализ оценок погрешностей квадратурных и кубатурных формул из последовательностей функционалов с пограничным слоем на функциях, представимых в виде потенциала Рисса. Эти потенциалы хорошо известны [10, 11] и находят применение во многих прикладных задачах. Многие интегрируемые функции представимы в виде данных потенциалов.

Методика исследования. В диссертации использовались методы математического и функционального анализа, теории функций и вычислительной математики. Для проведения символьных вычислений применялась система компьютерной алгебры MAPLE.

Научная новизна и положения, выносимые на защиту. Все основные результаты диссертации являются новыми, получены автором лично, снабжены полными доказательствами и состоят в следующем.

1) Для квадратурных формул из последовательностей с пограничным слоем при стремлении шага сетки узлов к нулю получены асимптотические выражения погрешностей на классах $A^\alpha(L_p(a,b))$, $1 < p < \infty$, состоящих из функций, представимых в виде потенциала Рисса, плотность которого принадлежит $L_p(a,b)$.

2) Найден наилучший порядок сходимости произвольных квадратурных формул на классах $A^\alpha(L_p(a,b))$.

3) Установлено, что у всех решетчатых последовательностей функционалов с пограничным слоем главные члены точных верхних оценок на классах $A^\alpha(L_p(a,b))$ одинаковые.

4) Оценена скорость сходимости квадратурных формул с пограничным слоем на конкретных (индивидуальных) функциях из классов $A^\alpha(L_p(a,b))$.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории приближенного интегрирования, а также для конструирования и получения оценок погрешностей квадратурных и кубатурных формул при практическом численном интегрировании.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на

• Международных семинарах-совещаниях «Кубатурные формулы и их приложения» (Красноярск, 2003 г.; Уфа, 2007 г.);

• Всесибирских конгрессах женщин—математиков (Красноярск, 2004 г., 2006 г. и 2008 г.);

• Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, 2008 г.);

• Международной конференции «Вычислительная математика, дифференциальные уравнения, информационные технологии», посвященной памяти чл.-корр. СО АН ВШ, д.ф.-м.н., профессора Ц. Б. Шойнжурова (Улан-Удэ, 2009 г.);

• научных семинарах в Красноярском государственном техническом университете, в Сибирском федеральном университете (Красноярск), в Институте вычислительного моделирования СО РАН (Красноярск).

Часть результатов получена автором

— при финансовой поддержке гранта 6-го конкурса-экспертизы научных проектов молодых ученых РАН (1999 г., грант №3);

— в ходе работ по проектам Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов № 02–01–01167, 03–01–00703, 03–07–90077, 06–01–00597, 07–01–00326).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ. Основные результаты диссертации содержатся в статьях [19, 21, 24, 26, 28], из которых 2 статьи в периодических изданиях по списку ВАК, 3 статьи в сборниках научных трудов. В работах [24, 28] вклад соавторов одинаков.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и списка литературы, содержащего 62 наименования. Объем диссертации (включая пять таблиц) — 91 страница.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение состоит из двух параграфов.

В первом параграфе описывается тематика результатов диссертации и ее структура.

Во втором параграфе приводятся основные обозначения и определения, используемые в тексте диссертации.

Первая глава называется «Асимптотические выражения для функционалов ошибок с пограничным слоем» и состоит из трех параграфов. Она посвящена, главным образом, исследованию вопросов, связанных с нахождением неулучшаемых оценок погрешностей квадратурных формул на классах функций $A^\alpha(L_p(a,b))$, представимых в виде потенциала Рисса.

Пусть $-\infty < a < b < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1,\infty)$, n — натуральное число, $h = (b-a)/n$.

Обозначим через $A^\alpha(L_p(a,b))$ — множество функций f, представимых в виде

$$f(x) = (A^\alpha \varphi_f)(x) = \int\limits_a^b |x-t|^{\alpha-1} \varphi_f(t)\, dt, \qquad (1)$$

где $\varphi_f(t)$ принадлежит пространству $L_p(a,b)$, α не является целым числом, $\alpha p > 1$. Последнее неравенство гарантирует непрерывность на $[a,b]$ функций из $A^\alpha(L_p(a,b))$. Отметим, что данные классы могут быть описаны через классы функций $L_p^\alpha(a,b)$, связанные с левосторонним и правосторонним интегралами Римана–Лиувилля.

Квадратурным формулам с пограничным слоем в классах $L_p^\alpha(a,b)$ посвящены исследования, проводимые в работах [5] и [12].

Пусть l — функционал ошибок квадратурной формулы

$$(l,f) = \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} c_k^N f(x_k^N), \tag{2}$$

где x_k^N, c_k^N — соответственно узлы и коэффициенты данной формулы, $x_k^N \in [a,b]$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$, $a_1 \leqslant b_1$, $[a_1,b_1] \subset [a,b]$.

Множество функционалов l вида (2), точных на многочленах степени не выше целой части числа α, обозначим через $L_{[\alpha]}$.

Введем обозначение:

$$\mathfrak{N}(l) = \sup_{\|\varphi_f\|_{L_p(a,b)} \leqslant 1} |(l,f)| = \sup_{\|\varphi_f\|_{L_p(a,b)} \leqslant 1} |(l, A^\alpha \varphi_f)|,$$

где $l \in L_{[\alpha]}$.

Определение 1. *Последовательность функционалов $\{l^h\}$ называется последовательностью функционалов с пограничным слоем, если существуют числа $r \geqslant 0$ — целое, $K > 0$ и функционалы l, l_0^h, $l_n^h \in L_{[\alpha]}$, удовлетворяющие условиям*

$$\operatorname{supp} l \subset [-r, r+1],\ \operatorname{supp} l_0^h \subset [a, a+Kh],\ \operatorname{supp} l_n^h \subset [b-Kh, b],$$
$$l \in (C[-r,r+1])^*,\ l_0^h \in (C[a,a+Kh])^*,\ l_n^h \in (C[b-Kh,b])^*,$$

и справедливы равенства

$$l^h(x) = l_0^h(x) + \sum_{\gamma=r}^{n-r-1} l\left((x-a)/h - \gamma\right) + l_n^h(x),$$

а также оценки

$$\mathfrak{N}(l_0^h) = o(h^\alpha), \qquad \mathfrak{N}(l_n^h) = o(h^\alpha)$$

при $h \to 0$.

Определение 2. *Если $\{l^h\}$ — последовательность функционалов с пограничным слоем, l — функционал, соответствующий ей в определении 1, то l называется сопутствующим функционалом для $\{l^h\}$.*

Определение 3. *Последовательность квадратурных формул*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} c_k^h f(a+kh)$$

называется последовательностью квадратурных формул с пограничным слоем, если последовательность функционалов ошибок этих формул $\{l^h\}$ является последовательностью функционалов с пограничным слоем.

Первый параграф главы 1 посвящен оценкам асимптотических выражений для функционалов погрешностей усложненных квадратурных формул в пространствах функций, в определении которых участвуют потенциалы Рисса вида (1). В нем формулируются основные результаты этой главы — теоремы 1.1 и 1.2.

Определим функцию ψ следующим образом:

$$\psi(u) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \psi_\gamma(u) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} (l(v), |v+\gamma-u|^{\alpha-1}). \tag{3}$$

Здесь функционал l вида (2). Функция ψ принадлежит $L_q(0,1)$, является периодической на $(-\infty,\infty)$ с периодом 1 и локально суммируемой там в степени p.

Теорема 1.1. *Пусть $\{l^h\}$ — последовательность функционалов с пограничным слоем, l — ее сопутствующий функционал. Тогда при $h \to 0$*

$$\mathfrak{N}(l^h) = h^\alpha (b-a)^{1/q} \|\psi\|_{L_q(0,1)} + o(h^\alpha). \tag{4}$$

Теорема 1.2. *Пусть $\{l^h\}$ — последовательность функционалов с пограничным слоем, l — ее сопутствующий функционал. Существует функция G, такая, что при $h \to 0$ имеет место равенство*

$$\mathfrak{N}(l^h) = h^\alpha (b-a)^{1/q} \|(l(v), G(v-u))\|_{L_q(0,1)} + o(h^\alpha).$$

Функция G может быть представлена в виде

$$G(z) = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} \left(|\gamma+z|^{\alpha-1} - P_\gamma^{[\alpha]}(z) \right),$$

где

$$P_\gamma^{[\alpha]}(z) = |\gamma|^{\alpha-1} +$$
$$+\sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)}{k!} z^k \left(\gamma_+^{\alpha-k-1} + (-1)^k(-\gamma)_+^{\alpha-k-1}\right),$$

а $\gamma_+ = \max\{\gamma, 0\}$.

Параграф второй посвящен формулировкам и доказательствам тех утверждений, которые нам понадобятся для доказательства основных теорем 1.1 и 1.2. Приведем некоторые из них.

Лемма 1.1. *Функционал* $l \in L_{[\alpha]}$ *на функциях вида* (1) *может быть представлен в форме*

$$(l, f) = \int_a^b F(t)\,\varphi_f(t)\,dt,$$

где

$$F(t) = \left(l(x), |x-t|^{\alpha-1}\right).$$

Кроме того,

$$\|F(t)\|_{L_q(a,b)} = \mathfrak{N}(l).$$

Лемма 1.2. *Пусть* ρ*,* K*,* K_1 *— числа такие, что* K*,* $K_1 > 0$*,* $\rho \in [a, b - Kh]$*, функционалы* l_h *вида*

$$(l_h, f) = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} c_k^N f(x_k^N)$$

принадлежат $(C[\rho, \rho + Kh])^* \cap L_{[\alpha]}$ *и верны неравенства*

$$\|l_h\|_{(C[a,b])^*} \leqslant K_1 h.$$

Тогда при $h \to 0$

$$\mathfrak{N}(l) = o(h^\alpha).$$

Представим функцию $\psi_\gamma(u)$ в виде суммы двух других:

$$\psi_\gamma(u) = \psi_\gamma^+(u) + \psi_\gamma^-(u),$$

где

$$\psi_\gamma^+(u) = (l(v), (v + \gamma - u)_+^{\alpha-1}), \qquad \psi_\gamma^-(u) = (l(v), (u - v - \gamma)_+^{\alpha-1}).$$

Лемма 1.3. *Пусть* $u \in [0,1]$*, тогда* $\psi_\gamma^+(u) = 0$,

$$\psi_\gamma^-(u) = (l(v), (u-v-\gamma)_+^{\alpha-1}) = (l(v), (u-v-\gamma)^{\alpha-1}) = \psi_\gamma(u)$$

при $\gamma \leqslant -r-1$ *и* $\psi_\gamma^-(u) = 0$,

$$\psi_\gamma^+(u) = (l(v), (v+\gamma-u)_+^{\alpha-1}) = (l(v), (v+\gamma-u)^{\alpha-1}) = \psi_\gamma(u)$$

при $\gamma \geqslant r+1$.

Лемма 1.4. *Пусть* $s > 0$, $u \in [0,s]$, $v \in [-r, r+1]$ *и либо* $\gamma \leqslant -r-2$*, либо* $\gamma \geqslant s+r+2$*. Тогда найдется число* $K > 0$ *такое, что*

$$|\psi_\gamma(u)| \leqslant K|\gamma|^{\alpha-[\alpha]-2}\|l\|_{(C[-r,r+1])^*}. \tag{5}$$

Лемма 1.5. *Пусть* $n > s > 0$, $u \in [n-s, n]$, $v \in [-r, r+1]$ *и либо* $\gamma \leqslant n-s-r-2$*, либо* $\gamma \geqslant n+r+2$*. Тогда найдется число* $K > 0$ *такое, что верно неравенство* (5).

В третьем параграфе приведены доказательства теорем 1.1 и 1.2.

Вторая глава названа «Приближенное вычисление интегралов Рисса» и состоит из трех параграфов. В этой главе выводятся оценки погрешностей интегрирования преобразований Рисса через нормы в $L_p(a,b)$ оригиналов этих преобразований. Доказывается, что функционалы с пограничным слоем дают наилучший порядок равномерной сходимости в классах $A^\alpha(L_p(a,b))$, когда число узлов неограниченно возрастает. Здесь предполагаем, что $\alpha \in (p^{-1}, 1)$.

Первый и третий параграфы посвящены вопросам, связанным, непосредственно, с теорией квадратурных формул — теоремы 2.1 и 2.3. Доказательство теоремы 2.3 опирается на некоторые свойства интегралов специального вида, которые устанавливаются во втором параграфе.

В первом параграфе рассматриваются функционалы l^N ошибок квадратурных формул на функциях из (1):

$$(l^N, f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{N} c_k^N f(x_k^N), \tag{6}$$

где числа c_k^N такие, что

$$\sum_{k=1}^{N} c_k^N = b-a,$$

а точки $x_k^N \in [a,b]$ $(1 \leqslant k \leqslant N)$.

Теорема 2.1. *Существуют последовательности чисел* $\{c_k^N\}_{k=1}^N$ *и точек* $\{x_k^N\}_{k=1}^N \subset [a,b]$, *постоянная* $A > 0$ *такие, что для функционалов вида* (6) *при всех* $\varphi_f \in L_p(a,b)$ *выполняются неравенства*

$$|(l^N, f)| < AN^{-\alpha}\|\varphi_f\|_{L_p(a,b)}.$$

Отметим, что за l^N из (6) можно взять функционалы из последовательностей с пограничным слоем.

Второй параграф носит вспомогательный характер и содержит необходимые для дальнейшего оценки интегралов специального вида.

Положим: $h = h(N) = (b-a)/(2N)$, $\Omega(N) = \bigcup_{i\in\mu(N)}(a+hi, a+hi+h)$, где $\mu(N)$ — совокупность целых чисел $i \in [0, 2N-1]$ таких, что интервалы $(a+hi, a+hi+h)$ не содержат узлов $x_1^N, \ldots, x_N^N$ формулы (6).

Пусть число λ фиксировано и таково, что $\alpha < \lambda \leqslant 1$.

Рассмотрим произвольную функцию $g(x)$, удовлетворяющую условию Гёльдера порядка λ на $[0,1]$, равенствам $g(0) = g(1) = 0$ и неравенству

$$\int\limits_0^1 g(x)dx > 0.$$

Продолжим $g(x)$ нулем с $[0,1]$ на всю числовую ось и положим

$$g_h(x) = \begin{cases} g\left(\frac{x-a}{h} - i\right), & i \in \mu(N),\, x \in (a+hi, a+hi+h), \\ 0, & x \in [a,b] \setminus \Omega(N). \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *— произвольное число, функция* $g_h(x)$ *определена формулой* (7). *Тогда существуют функции* $\varphi_g^h(x)$ *такие, что*

$$g_h(x) = \int\limits_a^b |x-t|^{\alpha-1}\varphi_g^h(t)\,dt,$$

при этом выполняется неравенство

$$\|\varphi_g^h\|_{L_p(a,b)} \leqslant B_1 h^{-\alpha-\varepsilon}$$

где B_1 *— некоторая положительная постоянная.*

Доказательство теоремы 2.2 опирается на следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть функция $f(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет условиям Гёльдера порядка λ и равенствам $f(a)=f(b)=0$. Тогда соответствующая ей в формуле (1) функция $\varphi_f(x)$ может быть представлена в виде*

$$\varphi_f(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}(1-\alpha)\left\{\int\limits_a^b\frac{\operatorname{sgn}(x-t)f(t)}{(b-t)|x-t|^\alpha}\,dt-\int\limits_a^b\frac{\operatorname{sgn}(x-t)f(t)}{(t-a)|x-t|^\alpha}\,dt\right\}+$$
$$+\frac{\sin\alpha\pi}{2\pi}(2-\alpha)\int\limits_a^b\frac{|x-t|^{\alpha-1}f(t)}{(t-a)(b-t)}\,dt.$$

В третьем параграфе приводится основной результат главы 2 — теорема 2.3 и ее доказательство.

Теорема 2.3. *Для любого $\varepsilon>0$ и любой последовательности функционалов вида (6) существуют число $B>0$ и функции $\varphi_f(x)\in L_p(a,b)$, такие, что выполняется неравенство*

$$|(l^N,f)|>BN^{-\alpha-\varepsilon}\|\varphi_f\|_{L_p(a,b)}.$$

Из теорем 2.1 и 2.3 следует, что последовательности функционалов ошибок с пограничным слоем имеют неулучшаемый, в смысле степенных порядков, порядок стремления к нулю при неограниченном возрастании числа узлов N равномерной сходимости последовательности квадратурных формул на классах $A^\alpha(L_p(a,b))$.

Третья глава носит название «Решетчатые квадратурные формулы» и состоит из двух параграфов. В этой главе объектом изучения являются решетчатые квадратурные формулы на пространствах функций, представимых через потенциалы Рисса (1).

В первом параграфе приводятся выражения для сильной сходимости решетчатых квадратурных последовательностей функционалов с пограничным слоем.

Определение 4. *Последовательность $\{l^h\}$ функционалов вида*

$$(l^h,f)=\int\limits_a^b f(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n}c_k^n f(a+kh),$$

где c_0^n, …, c_n^n — постоянные, $\{l^h\} \in L_{[\alpha]}$, называется решетчатой квадратурной последовательностью функционалов с пограничным слоем, если она удовлетворяет всем условиям определения 1 и, кроме того, функционалы l, l_0^h, l_n^h из этого определения имеют вид

$$(l, f) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \sum_{k=-r}^{r+1} c_k f(k),$$

$$(l_0^h, f) = \int\limits_a^{a+rh} f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{t} c_{k,h}^0 f(a+kh), \tag{8}$$

$$(l_n^h, f) = \int\limits_{b-rh}^{b} f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{t} c_{k,h}^n f(b-kh),$$

где t — фиксированной натуральное число, $c_{k,h}^0$, $c_{k,h}^n$ ($0 \leqslant k \leqslant t$), c_k ($-r \leqslant k \leqslant r+1$) — постоянные.

Теорема 3.1. *Пусть $\{l^h\}$ — решетчатая квадратурная последовательность функционалов с пограничным слоем и сопутствующим функционалом l из* (8). *Тогда имеет место равенство* (4) *при $h \to 0$, где функция ψ вида* (3).

Теорема 3.2. *Пусть $\{l_1^h\}$ и $\{l_2^h\}$ — решетчатые квадратурные последовательности функционалов с пограничным слоем. Тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{h\to 0}\bigl(\mathfrak{N}(l_1^h)/\mathfrak{N}(l_2^h)\bigr) = 1.$$

Последняя теорема утверждает, что при α являющимся дробным числом у всех решетчатых последовательностей функционалов с пограничным слоем главные члены в асимптотических выражениях неулучшаемых оценок равномерной сходимости у функционалов ошибок одинаковые.

Во втором параграфе исследуется асимптотика сильной сходимости последовательностей функционалов ошибок усложненных квадратурных формул прямоугольников

$$(l_1^h, f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - h\sum_{\gamma=0}^{n-1} f(a+h\gamma+h/2)$$

и трапеций

$$(l_2^h, f) = \int\limits_a^b f(x)\,dx - h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{\gamma=1}^{n-1} f(a+h\gamma)\right],$$

при $h \to 0$.

Теорема 3.3. *Пусть $\alpha < 1$, $\{l_1^h\}$ и $\{l_2^h\}$ — последовательности функционалов ошибок усложненных квадратурных формул прямоугольников и трапеций соответственно, функция ψ из формулы* (3). *Тогда*

$$(b-a)^{1/q}\|\psi\|_{L_q(0,1)} = \mathfrak{N}(l_1^h)(1+\beta_1(h)) = \mathfrak{N}(l_2^h)(1+\beta_2(h)),$$

где функции $\beta_1(h)$ и $\beta_2(h)$ стремятся к нулю при $h \to 0$.

Подобные результаты в пространствах $L_p^\alpha(a,b)$, $\alpha \in (1/p, 1]$, ранее были приведены в [5].

Четвертая глава называется «Сходимость последовательностей решетчатых квадратурных формул на конкретных функциях» и состоит из двух параграфов.

В этой главе исследуются квадратурные формулы с пограничным слоем на конкретных функциях из класса $A^\alpha(L_p(a,b))$, где α — показатель степени потенциала Рисса.

Сходимостью кубатурных формул на конкретных функциях, в частности, занимался С. Л. Соболев [2]; он рассматривал функции из пространств типа L_p^m в периодическом случае. В. И. Половинкин в работах [13] и [14] исследовал вопросы о сходимости кубатурных формул на конкретных функциях в классах типа L_p^m, когда интегрируемые функции не являются периодическими.

Лемма 4.1. *Пусть $\{l^h\}$ и $\{\rho^h\}$ — решетчатые квадратурные последовательности функционалов с пограничным слоем. Тогда*

$$\mathfrak{N}(l^h - \rho^h) = o(h^\alpha) \text{ при } h \to 0.$$

Теорема 4.1. *Пусть $\{l^h\}$ — решетчатая квадратурная последовательность функционалов с пограничным слоем, $f \in A^\alpha(L_p(a,b))$. Тогда*

$$(l^h, f) = o(h^\alpha) \text{ при } h \to 0.$$

Во втором параграфе аналог теоремы 4.1 устанавливается для асимптотически оптимальных последовательностей весовых кубатурных формул для n-мерных периодических пространств $\widetilde{L}_2^m(H)$ с матрицей периодов H, рассмотренных ранее в [15]. В одномерном случае пространство $\widetilde{L}_2^m(H)$ есть пространство квадратично суммируемых по периоду дробных производных Вейля [10].

Глава 5 носит название «Некоторые примеры исследований квадратурных формул» и состоит из двух параграфов.

Первый параграф посвящен вычислению норм функционалов ошибок квадратурных формул прямоугольников, трапеций, Гаусса, Симпсона, Грегори в пространствах $L_2^{3/2}(0,1)$, т.е. состоящих из функций $f(x)$ вида

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x (x-t)^{1/2} \varphi(t)\, dt.$$

При этом

$$\|f\|_{L_2^{3/2}(0,1)} = \|f^{(3/2)}\|_{L_2(0,1)} = \left(\int\limits_0^1 |f^{(3/2)}(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

($f^{(\alpha)}$ называется левосторонней дробной производной Римана—Лиувилля и совпадает с функцией $\varphi \in L_p(a,b)$, см. [10]). Случай данных пространств интересен тем, что нормы функционалов ошибок можно явно выразить в классах $L_2^{3/2}(0,1)$.

Норма функционала ошибок квадратурной формулы

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^N c_k f(x_k), \tag{9}$$

равна

$$\|l\|_{(L_p^\alpha(a,b))^*} = (\Gamma(\alpha))^{-1} \|(l(x), (x-t)_+^{\alpha-1})\|_{L_q(a,b)}, \tag{10}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Правая часть равенства (10) при $p=2$ и $\alpha = 3/2$ была вычислена в случаях, когда квадратурная формула (9) есть усложненная формула прямоугольников, усложненная формула трапеций, формула Гаусса, усложненная формула Симпсона или формула Грегори с максимальным порядком разности m при $m=1$ и $m=2$ (см., например, [с. 42–43, 1], [гл. 7, 16], [с. 235–236, 17]). Во всех вычислениях $N \leqslant 20$; результаты вычислений представлены в таблицах 1 и 2 диссертации.

Относительно большие нормы функционалов ошибок среди всех рассмотренных квадратурных формул имеют усложненные формулы трапеций и Симпсона, однако при существенном увеличении количества узлов формула трапеций мало отличаются от формул Грегори. Усложненная формула Симпсона для всех рассмотренных значений N дает «худший» результат. «Лучший» результат обеспечивается усложненной формулой прямоугольников.

Во втором параграфе были рассмотрены некоторые функции $\varphi(t)$ из пространства $L_p(0,1)$, подобранные так, чтобы интеграл

$$\int\limits_0^1 |x-t|^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt$$

вычислялся в элементарных функциях. В качестве $\varphi(x)$ последовательно брались функции:

1) $\varphi = 1$, $\alpha = 0.99$;

2) $(ct+d)^{\alpha-1}$, где $\alpha = 1/2$ или $\alpha = 3/2$.

Были вычислены значения функционалов следующих квадратурных формул: усложненной формулы трапеций, усложненной формулы прямоугольников, усложненной формулы Симпсона, формулы Грегори с максимальным порядком разности m при $m = 1$ и при $m = 2$. Количество узлов $N \leqslant 10$. Все результаты вычислений представлены в таблицах 3–5 диссертации.

В рассмотренных примерах самые «плохие» результаты показали усложненные формулы трапеций. В некоторых случаях лучшими были формулы прямоугольников, в других — формулы Симпсона и квадратурные формулы Грегори с $m = 2$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Ильичу Половинкину за постоянное и неослабевающее внимание к работе, ценные замечания и советы по её написанию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы/ *С. М. Никольский* – М.: Наука, 1974.

2. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул/ *С. Л. Соболев* – М: Наука, 1974. 808 с.

3. *Васкевич В. Л.* Гарантированная точность вычисления многомерных интегралов/ *В. Л. Васкевич* // Дисс. докт. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 2003. 243 с.

4. *Половинкин В. И.* Последовательности кубатурных формул и функционалов с пограничным слоем/ *В. И. Половинкин* // Дисс. докт. физ.-мат. наук. – Ленинград, 1979. 240 с.

5. *Половинкин В. И.* Последовательности функционалов с пограничным слоем в пространствах одномерных функций, обладающих дробными производными Римана—Лиувилля/ *В. И. Половинкин* // Математические труды. – 2002. – Т. 5. – №2. – С. 178–202.

6. *Рамазанов М. Д.* Лекции по теории приближенного интегрирования/ *М. Д. Рамазанов* – Уфа: Изд-во БашГУ, 1973. 177 с.

7. *Рамазанов М. Д.* Теория решетчатых кубатурных формул с ограниченным пограничным слоем/ *М. Д. Рамазанов* – – Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2009. 178 с.

8. *Шойнжуров Ц. Б.* Кубатурные формулы в пространстве С. Л. Соболева W_p^m/ *Ц. Б. Шойнжуров* – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2002. 202 с.

9. *Шойнжуров Ц. Б.* Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах/ *Ц. Б. Шойнжуров* – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского научного центра СО РАН, 2005. 247 с.

10. *Самко С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения/ *С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев* – Минск: Наука и техника, 1987.

11. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение/ *А. М. Нахушев* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

12. *Севастьянова Н. А.* Последовательности функционалов с пограничным слоем в пространствах функций с дробными производными/ *Н. А. Севастьянова* // Вопросы математического анализа: Сборник научных трудов. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 1997. – Вып. 2. – С. 106–119.

13. *Половинкин В. И.* Квадратурные формулы в пространствах функций/ *В. И. Половинкин* – Красноярск: СФУ, 2007.

14. *Половинкин В. И.* Сходимость последовательностей кубатурных формул с пограничным слоем на конкретных функциях/ *В. И. Половинкин* // Математический анализ и смежные вопросы математики. – Новосибирск: Наука, 1978. – С. 183–191.

15. *Половинкин В. И.* Весовые кубатурные формулы в периодическом случае/ *В. И. Половинкин* // Математические заметки. 1968. – Т. 3. – № 3. – С. 319–326.

16. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов/ *В. И. Крылов* – М.: Наука, 1967. 500 с.

17. *Мысовских И. П.* Лекции по методам вычислений/ *И. П. Мысовских* – СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1998.

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

18. *Медведева М. И.* Асимптотика норм функционалов ошибок с пограничным слоем для потенциалов Рисса/ *М. И. Медведева* // Кубатурные формулы и их приложения: Материалы VII Международного семинара-совещания. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2003. – С. 86–89.

19. *Медведева М. И.* Квадратурные формулы в пространствах дробных производных Римана — Лиувилля $L_2^{3/2}(a,b)$/ *М. И. Медведева* // Вопросы математического анализа: Сборник научных трудов. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2003. – Вып. 6. – С. 134–143.

20. *Медведева М. И.* Асимптотика норм функционалов ошибок квадратурных формул с пограничным слоем на функциях, представимых в виде потенциала Рисса/ *М. И. Медведева* // III Всесибирский конгресс женщин-математиков: Тезисы докладов. – Красноярск: ПФК «ТОРРА», 2004. – С. 14–15.

21. *Медведева М. И.* Асимптотика норм функционалов ошибок с пограничным слоем для потенциалов Рисса/ *М. И. Медведева* // Вопросы математического анализа: Сборник научных трудов. – Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. – Вып. 8. – С. 85–98.

22. *Медведева М. И.* Последовательность квадратурных формул с пограничным слоем на конкретных функциях, обладающих дробными производными/ *М. И. Медведева* // IV Всесибирский конгресс женщин-математиков: Материалы конференции. – Красноярск: РИО СибГТУ, 2006. – С. 108–110.

23. *Медведева М. И.* Последовательность квадратурных формул на конкретных функциях/ *М. И. Медведева* // Кубатурные формулы и их приложения: Труды IX-го международного семинара-совещания. – Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2007. – С. 85–92.

24. *Козлов В. Н.* Последовательность квадратурных формул на конкретных функциях/ *В. Н. Козлов, М. И. Медведева, А. И. Акимов* // Известия высших учебных заведений. Северо–Кавказский регион, 2007. – С. 11–13.

25. *Медведева М. И.* О порядке сходимости квадратурных формул на функциях из пространства потенциала Рисса/ *М. И. Медведева* // V Всесибирский конгресс женщин–математиков: материалы конференции. – Красноярск: РИО СФУ, 2008. – С. 298–303.

26. *Медведева М. И.* О порядке сходимости квадратурных формул на функциях из пространства потенциала Рисса/ *М. И. Медведева* // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2008, – № 1(3). – S. 296–307.

27. *Медведева М. И.* Вычисление интегралов типа потенциала Рисса/ *М. И. Медведева* // Тезисы докладов. Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2008. – С. 528.

28. *Медведева М. И.* Приближенное вычисление интегралов Рисса/ *М. И. Медведева, В. И. Половинкин* // Математические труды. 2009. – Т. 12. – № 2. – С. 1–15.

Медведева Мария Ивановна
Приближенное вычисление потенциалов Рисса
Автореф. дисс. на соискание учёной степени кандидата физ.-мат. наук.
Подписано в печать .09.2009. Заказ №_______.
Формат 60×90/19. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Отпечатано в типографии СФУ
660074, Красноярск, ул. Киренского, 26