на правах рукописи
УДК 510.64

Кошелева Анна Владимировна

Правила вывода многомодальных логик

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск-2007

Работа выполнена в Институте естественных и гуманитарных наук Сибирского федерального университета

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор В.В. Рыбаков
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор А.Д. Яшин
	кандидат физико-математических наук, доцент В.В. Римацкий
Ведущая организация	Институт математики имени С.Л. Соболева СО РАН. г. Новосибирск

Защита состоится 10 ноября 2007 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д-212.099.02 в Институте естественных и гуманитарных наук Сибирского федерального университета по адресу 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан   2007 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент   Голованов М.И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В диссертации исследуются на разрешимость по допустимости правил вывода некоторые многомодальные логики, расширяющие $S5_t$, $t \in N$, а также линейные логики $Lin\,T$ и $Lin\,DA$, и для исследуемых логик будут построены алгоритмические критерии определения допустимости правил вывода. *Правило вывода* — это правило, регламентирующее допустимые способы перехода от некоторой совокупности формул $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, называемых посылками, к некоторой определенной формуле β, называемой заключением. Правило вывода называется *истинным* в логике λ, если из того, что $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \lambda$ следует, что $\beta \in \lambda$, называется *выводимым* (или *доказуемым*) в λ, если β выводится из посылок с помощью аксиом и постулированных правил логики λ, и *допустимым* в λ, если при любой подстановке ε, из $\alpha_1^\varepsilon \in \lambda, \dots, \alpha_n^\varepsilon \in \lambda$ следует, что $\beta^\varepsilon \in \lambda$. Допустимые правила вывода — это наибольший класс правил, которые мы можем использовать в выводах данной логики λ, сохраняя множество ее доказуемых формул, т. е. с помощью таких правил мы не получим формул, которые не являются теоремами логики λ. Так как в аксиоматике логик постулированных правил немного, то использование допустимых правил позволяет сокращать и упрощать процесс доказательства. Например, в исчислении высказываний (*ИВ*) и исчислении предикатов ничуть не реже, чем постулированное правило *modus ponens*: $\alpha, \alpha \to \beta \,/ \beta$, используется правило $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \,/ \alpha \to \gamma$. Но в *ИВ* все допустимые правила доказуемы, а в логиках первого порядка, модальных и суперинтуиционистских логиках существуют допустимые, но не доказуемые правила вывода, и впервые это было замечено для интуиционистского исчисления H (примерно в 50-х годах прошлого века в разных работах). Определение допустимого правила появилось в работе П. Лоренцена [23] в 1955 году. П. Харроп в работе [21] за 1960 г. показал, что в H допустимо, но не доказуемо правило $\neg x \to (y \vee z) \,/ (\neg x \to y) \vee (\neg x \to z)$. Г. Е. Минц в [6] доказал, что если правило r допустимо в H и не содержит связок $\to$ или $\vee$, то r выводимо в H, и показал, что правило $((x \to y) \to (x \vee y)) \,/\, (((x \to y) \to x) \vee ((x \to y) \to z)))$ допустимо, но не выводимо в H. В модальных логиках $S4$, $S4.1$, Grz допустимо, но не выводимо правило Леммона-Скотта $\Box(\Box(\Box\Diamond\Box p \to \Box p) \to (\Box p \vee \Box\neg\Box p) \,/\, \Box\Diamond\Box p \vee \Box\neg\Box p$.

Логики, в которых все допустимые правила доказуемы, называются структурно-полными. Такими логиками являются, к примеру, *ИВ* и модальная логика $S4.3Grz$. Модальные логики K, T, $K4$, $S4$, $S5$ не являются структурно-полными. В этих логиках допустимо, но не доказуемо правило $\Diamond\neg x \wedge \Diamond x \,/\, y$. Структурной полнотой суперинтуиционистских логик занимались А. И. Циткин [18], Т. Прукнал [24], а структурную полноту модальных логик исследовали В. Джиобяк [19], В. В. Рыбаков [26].

По аналогии с проблемой разрешимости логик возникает вопрос о разрешимости по допустимости правил вывода. Впервые этот вопрос был поставлен в начале 70-х годов прошлого века Х. Фридманом для интуиционистского исчисления H. В 1973 г. А. В. Кузнецов поставил вопрос о существовании конечного базиса допустимых правил для логики H. Базис допустимых правил — это такие правила, из которых все остальные получаются как следствия. Положительное решение первого вопроса в 1984 г. в работе [10] и отрицательное решение второго вопроса в 1985 г. в [11] были даны В. В. Рыбаковым. Им же были найдены алгоритмические критерии и решены вопросы о базисах для широкого класса суперинтуиционистских и транзитивных одномодальных логик [9, 16, 26]. К примеру, разрешимыми по допустимости оказываются логики $K4$, $K4.1$, $K4.2$, $K4.3$, $S4$, $S4.1$, $S4.2$, $S4.3$, Grz, $Grz.2$, $Grz.3$, GL, H, KC, LC, логики $K4$, $K4.1$, $K4.2$, $S4$, $S4.1$, $S4.2$, Grz, $Grz.2$, GL, H, KC не имеют конечного базиса допустимых правил, а логика $S4.3$ и все ее нормальные расширения такой базис имеют и состоит он из одного правила $\Diamond x \wedge \neg\Diamond x \,/\, y$. В работах Р. Иемхофф [22] и В. В. Рыбакова [27] были построены бесконечные базисы для логик H и $S4$ соответственно. А. Н. Руцким был построен бесконечный явный базис для логики $K4$ [8], а Б. Р. Федоришиным для логики GL [17]. Разрешимость по допустимости логик $S4.2$, KC и отсутствие у этих логик конечного базиса было доказано С. В. Бабенышевым в [1], [2]. Ю. В. Безгачева доказала, что транзитивные конечно-аксиоматизируемые и финитно-аппроксимируемые логики ширины 2 разрешимы по допустимости [3], а В. В. Римацким было доказано, что модальные финитно-аппроксимируемые логики ширины 2 имеют конечный базис допустимых правил [7]. Большое значение для решения задач, связанных с допустимостью правил, имела возможность представления свободных алгебр из многообразия модальных алгебр данной логики специальными моделями Крипке (являющимися реляционными) — n-характеристическими моделями. В [26] получен также критерий, при котором логика первого порядка разрешима относительно допустимости правил вывода. Такими логиками оказываются только логики, порожденные конечной моделью.

Наряду с обычными правилами рассматриваются также правила вывода с метапеременными, или, как еще говорят, с параметрами. Причиной изучения таких правил стали проблемы подстановки и разрешимости логических уравнений, и проблема разрешимости уравнений в свободных алгебрах, соответствующих некоторой алгебраической логике. Сформулируем, например, вопрос о подстановке для заданной логики λ: существует ли алгоритм, который для произвольной формулы $\alpha\,(p_1, \ldots, p_n,\, q_1, \ldots, q_l)$, где $q_1, \ldots, q_l$ — это метапеременные, определяет, найдутся ли такие формулы $\beta_1, \ldots, \beta_n$, что $\alpha\,(\beta_1, \ldots, \beta_n,\, q_1, \ldots, q_l) \in \lambda$? Разрешимость проблемы подстановки для H была доказана В. В. Рыбаковым в работе [15] за 1990 год. Он доказал также разрешимость по допустимости правил вывода с метапеременными большого класса суперинтуиционистских и транзитивных модальных логик [26, 13, 14, 15].

К этому классу принадлежат $K4$, $K4.1$, $K4.2$, $K4.3$, $S4$, $S4.1$, $S4.2$, $S4.3$, Grz, $Grz.2$, $Grz.3$, GL, H, KC, LC. В. Р. Кияткиным доказано, что все предтабличные логики, расширяющие $S4$, и все конечно-аксиоматизируемые логики конечной глубины, разрешимы по допустимости правил вывода с метапеременными [5].

К настоящему времени существует глубоко развитая теория допустимых правил для транзитивных одномодальных логик, однако в нетранзитивных и многомодальных логиках кажется слишком сложным построить алгоритмы определения допустимости правил для достаточно широкого класса таких логик. Допустимости правил в нетранзитивных логиках посвящены, к примеру, работа М. И. Голованова и Е. М. Юрасовой [4], в которой доказана разрешимость по допустимости для нетранзитивной одномодальной логики с оператором «завтра», и Рыбакова [28], а допустимости в многомодальных логиках — работы [29, 30, 32, 33].

Одним из условий существования алгоритмов в [26] является обычная разрешимость логики и ее финитная аппроксимируемость. И в нашем случае алгоритмические критерии будут доказаны только для логик, обладающих этими двумя свойствами. Несмотря на то, что все расширения логики $S5$ финитно-аппроксимируемы, уже среди расширений логики $S5_3$ встречаются не финитно-аппроксимируемые логики, [20]. Но хотя обычно алгоритмы определения допустимости правил вывода строились для финитно-аппроксимируемых логик, в [29] Рыбаковым В. В. был построен алгоритм определения допустимости правил для двух не финитно-аппроксимируемых логик, это логики, порожденные фреймами $\langle Z, \geq, \leq\rangle$, $\langle N, \geq, \leq\rangle$.

Цель работы.

1) Исследовать разрешимость проблемы допустимости правил вывода в логиках $S5_tC_l$, $l \leq t$, и $S5_tJ$, где $S5_tC_l$, $l \leq t$ — это логика с

дополнительными к аксиоматике $S5_t$ аксиомами

$$\Box_{j_1}\Box_{j_2}\dots\Box_{j_l}p \to \Box_{i_1}\Box_{i_2}\dots\Box_{i_l}p,$$

$\forall\, i_1,\dots,i_l,\ \forall\, j_1,\dots,j_l,\ i_1,\dots,i_l \in \{1,\dots,t\}$, $l \le t$, $j_k \ne j_s$, $i_k \ne i_s$ при $k \ne s$, а $S5_tJ$ получена добавлением к $S5_t$ аксиом $\Box_t p \to \Box_i p$, $i := 1,\dots,t$.

2) Исследовать на разрешимость по допустимости правил вывода линейные логики $Lin\,T$ и $Lin\,DA$.

3) Пусть $S5_tC_t^n$ — это логика $S5_tC_t$ плюс аксиомы

$$\varphi_n^k = \neg \bigwedge_{1\le i\le n+1} \Diamond_k \,(p_i \wedge \bigwedge_{1\le j\ne i\le n+1} \neg\, p_j),\quad k \in \{1,\dots,t\}.$$

Выяснить, является ли эта логика логика табличной.

Методика исследования. В исследовании применяются общие методы модальной логики.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и снабжены строгими доказательствами. Результаты совместных работ получены в нераздельном соавторстве.

Основные результаты. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) Доказана разрешимость по допустимости правил вывода финитно-аппроксимируемых и разрешимых логик, расширяющих $S5_tC_t$.

2) Доказана разрешимость по допустимости правил вывода линейных финитно-аппроксимируемых и разрешимых логик, расширяющих $Lin\,DA$.

3) Доказано, что логика $S5_tC_t^n$ является табличной, и ее наибольшие конечные корневые фреймы содержат не более n^t элементов.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты, полученные в диссертации, имеют теоретический характер.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на

- XL-международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2002 г.).
- Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2003 г.).
- Международной конференции «Алгебра, логика и кибернетика», посвященная 75-летию со дня рождения А. И. Кокорина (Иркутск, 2004 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано пять работ [31]-[35].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы из 77 наименований, и занимает 73 страницы машинописного текста.

Краткое содержание работы. Во введении обосновывается актуальность выбранной в диссертационной работе темы. Дается краткий обзор теории допустимых правил вывода. Описывается современное состояние вопросов, рассмотренных в диссертационной работе, сформулирован предмет, цель и методы проведения исследования, указаны основные его результаты. Приведен список конференций, на которых была проведена апробация работы, и дается обзор всех разделов диссертации.

В первой главе представлены необходимые сведения о синтаксисе и семантике многомодальных логик, и даны основные, необходимые для исследования определения и теоремы из теории допустимых правил вывода.

Вторая глава посвящена исследованию разрешимости проблемы допустимости правил вывода в некоторых логиках, расширяющих $S5_t$, $t \in N$, и обозначенных автором как $S5_tC_l$, $l \leq t$, и $S5_tJ$.

В параграфе 2.1 вводится аксиоматика логик $S5_tC_l$, $l \leq t$, и $S5_tJ$. $S5_t$-логику с дополнительными (к аксиоматике $S5_t$) аксиомами

$$\Box_{j_1} \Box_{j_2} \ldots \Box_{j_l} p \to \Box_{i_1} \Box_{i_2} \ldots \Box_{i_l} p,$$

$\forall\, j_1, \ldots, j_l,\, i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, t\}$, $l \leq t$, $j_k \neq j_s$, $i_k \neq i_s$ при $k \neq s$, назовем $S5_tC_l$, а $S5_t$-логику с дополнительными аксиомами

$$\Box_t p \to \Box_i p, \;\; i := 1, \ldots, t,$$

назовем $S5_tJ$.

В параграфе 2.2 доказывается финитная аппроксимируемость изучаемых логик. Сначала доказывается

Лемма 2.6. *Пусть $\mathcal{M}$ — корневая $S5_t$-модель, адекватная логике $S5_tC_l$, $l \leq t$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) $\forall\, a \in \mathcal{M}, \forall\, i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, t\},\ i_j \neq i_k$ *при* $j \neq k$:
$$a \Vdash \Box_{i_1} \Box_{i_2} \ldots \Box_{i_l} \alpha \Rightarrow \mathcal{M} \Vdash \alpha;$$

б) если $\exists\, a \in \mathcal{M} : a \Vdash \alpha$, *то* $\forall\, i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, t\}$, $i_j \neq i_k$ *при* $j \neq k$,
$$\mathcal{M} \Vdash \Diamond_{i_1} \Diamond_{i_2} \ldots \Diamond_{i_l} \alpha.$$

В этой лемме утверждаются важнейшие свойства исследуемых логик.

С помощью этой леммы, а также следующей теоремы и предложения:

Теорема 2.3. *Формула*

$$\Box_{j_1} \Box_{j_2} \ldots \Box_{j_m} p \to \Box_{i_1} \Box_{i_2} \ldots \Box_{i_n} p,\ i_k, j_l \in \{1, \ldots, s\},\ s, m, n \in N \quad (1)$$

истинна на фрейме тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию:

$$\forall x \forall y_1, \ldots, y_n \, (x \, R_{i_1} \, y_1 \wedge y_1 \, R_{i_2} \, y_2 \wedge \ldots \wedge y_{n-1} \, R_{i_n} \, y_n \to \exists z_1, \ldots, z_m \, (x \, R_{j_1} \, z_1 \wedge z_1 \, R_{j_2} \, z_2 \wedge \cdots \wedge z_{m-1} \, R_{j_m} \, z_m \wedge z_m = y_n)). \tag{2}$$

Предложение 2.5. *1) Фрейм канонической модели $\mathcal{C}_{S5_t J}$ удовлетворяет условию*

$$\forall x \forall y \, (x \, R_i \, y \to x \, R_t \, y), \; i := 1, \ldots, t.$$

2) Фрейм канонической модели $\mathcal{C}_{S5_t C_1}$ удовлетворяет условию

$$\forall x \forall y \, (x \, R_i \, y \to x \, R_j \, y), \; \forall \, i, \, j \in \{1, \ldots, t\}.$$

3) Отношения $R_1, \ldots, R_t$ на фреймах канонических моделей $\mathcal{C}_{S5_t C_l}$, $l \leq t$, $\mathcal{C}_{S5_t J}$ являются рефлексивными, транзитивными и симметричными.

доказывается

Теорема 2.9. Логики $S5_t C_l$, $l \leq t$, $S5_t J$ финитно-аппроксимируемы.

Из этой теоремы и конечной аксиоматизируемости исследуемых логик получаем следующую теорему:

Теорема 2.10. Логики $S5_t C_l$, $l \leq t$, $S5_t J$ разрешимы.

В параграфе 2.4 будет доказана разрешимость по допустимости правил вывода финитно-аппроксимируемых и разрешимых логик $\lambda \supseteq S5_t C_t$, откуда в силу предложения:

Предложение 2.2. *1) Логика $S5_t C_l$ является расширением логики $S5_t C_n$, $l \leq n \leq t$.*

2) $S5_t J$ является расширением $S5_t C_t$.

будет следовать и разрешимость по допустимости правил вывода логик $S5_tC_l$, $l \leq t$, и $S5_tJ$.

Используя лемму 2.6 мы докажем, что верна

Лемма 2.15. *Пусть λ — финитно-аппроксимируемая логика и $\lambda \supseteq S5_tC_t$, $\mathcal{A}$ — корневая подмодель модели $Ch_\lambda(n)$, и все элементы в $\mathcal{A}$ имеют разное означивание. Тогда любой элемент подмодели $\mathcal{A}$ будет формульно определимым в $Ch_\lambda(n)$.*

С помощью этого результата, леммы 2.6 и следующих двух лемм:

Лемма 2.13. *Если $\Box_1 \ldots \Box_t\, \alpha\,(p_1, \ldots, p_n) \to \beta\,(p_1, \ldots, p_n) \in \lambda \supseteq S5_tC_t$, то правило*
$r := \dfrac{\alpha\,(p_1, \ldots, p_n)}{\beta\,(p_1, \ldots, p_n)}$ *допустимо в λ.*

Лемма 2.14. *Пусть $\lambda \supseteq S5_t$ и дано правило $r := \dfrac{\alpha\,(p_1, \ldots, p_n)}{\beta\,(p_1, \ldots, p_n)}$. Если формула $\alpha\,(p_1, \ldots, p_n)$ опровергается при всех означиваниях n переменных одноэлементного рефлексивного фрейма, то r допустимо в λ.*

мы получаем алгоритмический критерий определения допустимости правила $r := \dfrac{\alpha\,(p_1, \ldots, p_n)}{\beta\,(p_1, \ldots, p_n)}$ в финитно-аппроксимируемой и разрешимой логике $\lambda \supseteq S5_tC_t$:

Теорема 2.16. *1) Правило $r := \dfrac{\alpha\,(p_1, \ldots, p_n)}{\beta\,(p_1, \ldots, p_n)}$ допустимо в финитно-аппроксимируемой и разрешимой логике $\lambda \supseteq S5_tC_t$ тогда и только тогда, когда или а) α опровергается на любой одноэлементной корневой подмодели модели $Ch_\lambda(n)$ или б) $\Box_1 \ldots \Box_t\, \alpha \to \beta \in \lambda$.*

2) Условия а) и б) алгоритмически распознаваемы, и, следовательно, логика λ разрешима по допустимости правил вывода.

который применим и к исследуемым логикам $S5_tC_l$, $l \leq t$, и $S5_tJ$.

В параграфе 2.4 будут приведены некоторые необходимые и достаточные условия разрешимости по допустимости правил с метапеременными в логиках $S5_tC_l$, $l \le t$, $S5_tJ$, но алгоритмический критерий разрешимости по допустимости правил вывода с метапеременными найден не будет.

В параграфе 2.5 доказывается структурная неполнота логик $S5_tC_l$, $l \le t$, и $S5_tJ$, а также теорема

Теорема 2.20. *Пусть дано правило вывода* $r := \dfrac{\Diamond_1 \ldots \Diamond_t x \wedge \Diamond_1 \ldots \Diamond_t \neg x}{\bot}$ *и пусть λ — финитно-аппроксимируемая и разрешимая логика, расширяющая $S5_tC_t$. Если r истинно на корневой и адекватной для этой логики модели $\mathcal{M}$ с областью означивания V, то на $\mathcal{M}$ истинно любое допустимое в λ правило с переменными из $Dom(V)$.*

В работе [29] В. В. Рыбаковым было доказано, что логики, порожденные фреймами $\langle Z, \geq, \leq \rangle$, $\langle N, \geq, \leq \rangle$ разрешимы по допустимости. В третьей главе будет доказано, что линейные логики $Lin\, T = \langle Q, \geq, \leq \rangle$ и $Lin\, DA = \langle Q, >, < \rangle$ также разрешимы по допустимости правил вывода (**Теорема 3.7**).

В червертой главе в параграфе 4.1 вводятся две логики $S5_tC_t^n$ и $S5_tC_{t,2}^n$ и исследуются их конечные фреймы. $S5_tC_t^n$ — это логика $S5_tC_t$ плюс аксиомы

$$\varphi_n^k = \neg \bigwedge_{1 \le i \le n+1} \Diamond_k \left(p_i \wedge \bigwedge_{1 \le j \ne i \le n+1} \neg p_j\right), \;\; k \in \{1, \ldots, t\}.$$

Несложно проверяется, что на конечных фреймах, адекватных логике $S5_tC_t$, формула φ_n^k истинна тогда и только, когда все сгустки по отношению R_k содержат не более n элементов. А $S5_tC_{t,2}^n$ — это логика $S5_tC_t^n$ плюс аксиомы $\Box_i \Box_j p \to \Box_j \Box_i p$, $\forall\, i,\, j \in \{1, \ldots, t\}$.

В результате получена

Теорема 4.2. *Наибольший (по числу элементов) конечный корневой* *фрейм, адекватный логике $S5_tC_t^n$, содержит не более n^t элементов, а для логики $S5_tC_{t,\,2}^n$ совпадает с фреймом $\mathcal{F}_t^n$.*

Где $\mathcal{F}_t^n$ — фрейм специального вида, построенный в той же главе.

В теореме 4.1 доказывается, что

Теорема 4.1. *Логика $S5_tC_t^n$ финитно-аппроксимируема.*

Тогда из теорем 4.1 и 4.2 следует

Теорема 4.3. *Логика $S5_tC_t^n$ является табличной.*

Для логики $S5_tC_{t,\,2}^2$ также верна

Теорема 4.5. *Все конечные корневые фреймы логики $S5_tC_{t,\,2}^2$ являются p-морфными образами фрейма $\mathcal{F}_t^2$.*

Приведен пример, показывающий, что для логик $S5_tC_{t,\,2}^n$ с большим объемом сгустка уже не всегда конечный корневой фрейм является p-морфным образом фрейма $\mathcal{F}_t^n$.

В параграфе 4.2 строится конечная булева алгебра с 2^t элементами $\mathcal{B}_t$. Ее элементы представляют собой конечные кортежи $(k_1, \ldots, k_t)$, где k_i — это 0 или 1, а операции $\neg$, $\rightarrow$, определены на кортежах стандартным образом покомпонентно. Кроме стандартных операций, на этой алгебре задается оператор f_i, $i \in \{1, \ldots, t\}$: $f_i\,(k_1, \ldots, k_t) = (m_1, \ldots, m_t) \Leftrightarrow k_i \neq m_i$ и $\forall\, j \neq i,\ k_j = m_j$.

Далее определяется логика Λ в языке алгебры $\mathcal{B}_t$. Задаются аксиомы и правила вывода этой логики.

Основными результатами этого параграфа будут

Предложение 4.7. *Всякая теорема логики Λ является тождественно истинной на алгебре $\mathcal{B}_t$.*

Лемма 4.9. (Теорема о полноте.) *Если формула α логики Λ является тождественно истинной, то она является теоремой логики Λ.*

В заключении подводятся итоги проведенных исследований.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Рыбакову Владимиру Владимировичу и Голованову Михаилу Ивановичу за поддержку и помощь в работе над диссертацией.

Список литературы

[1] Бабенышев С. В. Разрешимость проблемы допустимости правил вывода в модальных логиках $S4.2$ и $S4.2Grz$ и суперинтуиционистской логике KC. // Алгебра и логика. – 1992. – Т.31. – №4. – С.341-359.

[2] Бабенышев С. В. Базисы допустимых правил вывода модальных логик $S4.2$ и $S4.2Grz$. // Алгебра и логика. – 1993. – Т.32. – №2. – С.117-130.

[3] Безгачева Ю. В. Допустимость правил вывода в логиках ширины 2. // Деп. ВИНИТИ. – 27.07.98. – №2377-В98.

[4] Голованов М. И., Юрасова Е. М. Критерий допустимости правил вывода логики с оператором «Завтра». // Красноярск, Красн. университет. – 2004. – Деп. в ВИНИТИ – 22.10.04. – №1654-В2004.

[5] Кияткин В. Р. Правила вывода с метапеременными и логические уравнения в табличных и предтабличных локально конечных модальных логиках. // Красноярск, Красн. университет. – 1995. – Деп. в ВИНИТИ – 15.12.95. – №3350-В95.

[6] Минц Г. Е. Производность допустимых правил. // Записки научного семинара ЛОМИ АН СССР. – 1972. – №32. – С.85-99.

[7] Римацкий В. В. О конечной базируемости допустимых правил вывода модальных логик ширины 2. // Алгебра и логика. – 1999. – Т.38. – №4. – С.436-455.

[8] Руцкий А. Н. Явный базис для правил вывода, допустимых в модальной системе $K4$. // Красноярск, Красн. университет. – 2002. – Деп. в ВИНИТИ – 11.11.2002. – №1939-В2002.

[9] Рыбаков В. В. Допустимые правила предтабличных модальных логик. // Алгебра и логика. – 1981. – Т.20. – №4. – С.440-464.

[10] Рыбаков В. В. Критерий допустимости правил в модальной системе $S4$ и интуиционистской логике. // Алгебра и логика. – 1984. – Т.23. – №5. – С.546-572.

[11] Рыбаков В. В. Базисы допустимых правил логик $S4$ и Int. // Алгебра и логика. – 1985. – Т.24. – №1. – С.87-107.

[12] Рыбаков В. В. Разрешимость по допустимости модальной системы Grz и интуиционистской логики. // Известия АН СССР: Сер. математическая. – 1986. – Т.50. – №3. – С.598-616.

[13] Рыбаков В. В. Уравнения в свободной топобулевой алгебре. // Алгебра и логика. – 1986. – Т.25. – №2. – С.172-204.

[14] Рыбаков В. В. Уравнения в свободной топобулевой алгебре и проблема подстановки. // Доклады АН СССР. – 1986. – Т.287. – №3. – С.554-557.

[15] Рыбаков В. В. Критерии допустимости правил вывода с параметрами в интуиционистской пропозициональной логике. // Известия АН СССР: Сер. математическая. – 1990. – Т.54. – №6. – С.1331-1341.

[16] Рыбаков В. В. Разрешимость логических уравнений в модальной системе Grz и интуиционистской логике. // Сибирский математический журнал. – 1991. – Т.32. – №2. – С.140-153.

[17] Федоришин Б. Р. Явный базис для допустимых правил вывода логики Геделя-Леба GL. // Красноярск, Красн. университет. – 2002. – Деп. в ВИНИТИ – 11.11.2002. – №1938-В2002.

[18] Циткин А. И. О структурной полноте суперинтуиционистских логик. // Доклады АН СССР. – 1978. – Т.241. – №1. – С.40-43.

[19] Dziobiak W. Structural completeness of modal logics containing $K4$. // Bulletin of the Section of Logic. – 1983. – V.12. – №1. – P.32-36.

[20] Gabbay D. M., Kurucz A., Wolter F., Zakharyaschev M. Many-dimensional modal logics: theory and applications. // Studies in Logic and Foundations of Mathematics, Elseiver Sci. Publ., North-Holland. – 2003. – V.148. – 768 p.

[21] Harrop R. Concerning formulas of the types $A \to B \vee C$, $A \to \exists x B(x)$ in intuitionistic formal system. // Journal of Symbolic Logic. – 1960. – V.25. – №1. – P.27-32.

[22] Iemhoff R. On the admissible rules of intuitionistic propositional logic. // Journal of Symbolic Logic. – 2001. – V.66. – №2. – P.402-428.

[23] Lorenzen P. Einfüng in Operative Logik und Mathmatik. // Berlin. – Göttingen. – Heidelberg. – 1955. – 412 p.

[24] Prucnal T. Structural completeness of some fragments of intermediate logics. // Bulletin of the Section of Logic. – 1983. – V.12. – №1 – P.18-21.

[25] Rybakov V. V. Rules of inference with parameters for intuitionistic logic. // Journal of Symbolic Logic. – 1992. – V.57. – №3. – P.912-923.

[26] Rybakov V. V. Admissibility of logical inference rules. // Studies in Logic and Foundations of Mathematics, Elseiver Sci.Publ., North-Holland. – New-York. – Amsterdam. – 1997. – V.136.– 617 p.

[27] Rybakov V. V. Construction of an explicit basis for rules admissible in modal system $S4$. // Mathematical Logic Quarterly. – 2001. – V.47. – №4. – P.441-446.

[28] Rybakov V. V. Logical consecutions in intransitive temporal linear logic of finite intervals. // Journal of Logic Computation. – 2005. – V.15. – №5. – P.663-678.

[29] Rybakov V. V. Logical consecutions discrete linear temporal logic. // Journal of Symbolic Logic. – 2005. – V.70. – №4. – P.1137-1149.

[30] Rybakov V. V. Logics with universal modality and admissible consecutions. // Journal of Applied Non-Classical Logics. – 2007. – V.17. – №3. – P.381-394.

Работы автора по теме диссертации

[31] Кошелева А. В. Разрешимость проблемы допустимости правил вывода в некоторых $S5_t$-логиках. // Материалы международной конференции, посвященной 75-летию со дня рождения профессора А. И. Кокорина «Алгебра, логики и кибернетика». – С.163.

[32] Golovanov M. I., Kosheleva A. V., Rybakov V. V. Logic of visibility, perception, and knowledge, and admissible inference rules. // Logic Journal of IGPL. – 2005. – V.13. – №2. – P.201-209.

[33] Кошелева А. В. Разрешимость проблемы допустимости правил вывода в некоторых $S5_t$-логиках. // Алгебра и логика. – 2005. – Т.44. – №4. – С.438-458.

[34] Кошелева А. В. Разрешимость по допустимости правил вывода некоторых линейных логик. // Вестник КрасГу. – Красноярск, КрасГУ. – 2006. – Сер. Физ.-Мат. науки, Вып. 9.– С.59-63.

[35] Кошелева А. В. Логика $S5_tC_t$ с ограниченным объемом сгустков. // Препринт №6. – Красноярск: ИВМ СО РАН. – 2007. – 15 с.

Подписано в печать
Формат бумаги 60 $\times$ 84/16
Бумага типографская.
Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1
Уч.-изд. л. 1,1
Тираж 100 экз. Заказ №
Цена договорная.

Редакционно-издательский центр ИЕиГН
Сибирского федерального университета.
660041, Красноярск, пр. Свободный, 79.