На правах рукописи

ГУСЕВ БОРИС ВЛАДИМИРОВИЧ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Иркутск — 2007

Работа выполнена на кафедре математики и методики
преподавания математики
Иркутского государственного педагогического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор В.В. Блудов

Официальные оппоненты:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор В.Д. Мазуров,
кандидат физико-математических наук
Г.С. Сулейманова

Ведущая организация: Институт математики и механики
УрО РАН, г. Екатеринбург

Защита состоится 10 ноября 2007 г. в 9^{00} часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 630090, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университете.

Автореферат разослан 3 октября 2007 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.099.02,
кандидат физико-математических наук

М.И. Голованов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ[1]

Актуальность темы. Диссертация посвящена вопросам, связанным с геометрической эквивалентностью групп, понятие которой было введено в работах Б.И. Плоткина. В диссертации определен новый класс групп — геометрическое многообразие групп, связанное с данным понятием и рассмотрены его свойства и связь с другими классами групп. Рассмотрен вопрос о геометрической эквивалентности нильпотентных групп без кручения своим минимальным пополнениям.

В серии работ Б.И. Плоткина [5] – [7] и Г. Баумслага, А. Мясникова, В. Ремесленникова, В. Романькова [2] – [4] были заложены основы алгебраической геометрии над группами. В этих работах, наряду с общими вопросами, было введено понятие геометрической эквивалентности, рассмотрены основные свойства этого понятия и поставлены открытые вопросы.

В настоящей диссертации изучаются свойства геометрической эквивалентности и вводится новый класс — геометрическое многообразие групп. Этот класс групп замкнут относительно подгрупп и относительно геометрической эквивалентности, и обладает другими интересными свойствами. В частности, классы нильпотентных и разрешимых групп являются геометрическими многообразиями.

Другой аспект рассматриваемых вопросов — это вопрос, поставленный Б.И. Плоткиным на Международной алгебраической конференции памяти Д.К. Фаддеева в С-Петербурге в 1997 году: будет ли геометрически эквивалентна конечнопорожденная нильпотентная группа без кручения своему минимальному пополнению. В диссертации приводится пример ко-

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 03-01-00320

нечно порожденной нильпотентной группы без кручения ступени три, минимальное пополнение которой геометрически не эквивалентно исходной группе, а также доказывается, что всякая нильпотентная группа без кручения ранга 2 и ступени нильпотентности ≤ 4 геометрически эквивалентна своему минимальному пополнению. Сформулирован и доказан критерий геометрической эквивалентности нильпотентных групп без кручения и их минимальных пополнений и, как следствие, получена теорема о геометрической эквивалентности двуступенно нильпотентных групп и их минимальных пополнений.

Обе темы исследований — геометрическое многообразие групп и вопрос о геометрической эквивалентности нильпотентных групп без кручения своим минимальным пополнениям — связаны единым объектом исследований: понятием геометрической эквивалентности групп.

Цели работы:

- исследование свойств геометрического многообразия групп и нахождение его связей с другими классами групп;
- исследование вопроса о геометрической эквивалентности нильпотентных групп без кручения своим минимальным пополнениям;

Методика исследования. Использованы методы общей алгебры и комбинаторной теории групп.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и снабжены доказательствами.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории групп, при чтении специальных курсов лекций по алгебре и при написании монографий.

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на на Международной конференции по теории групп (Екатеринбург, 2001), Международных конференциях "Алгебра и ее приложения" (Красноярск, 2002, 2007), Международной конференции "Алгебра, логика и кибернетика" (Иркутск, 2004), Международном российско-китайском семинаре "Алгебра и логика" (Иркутск, 2007) а также неоднократно докладывались на семинарах Иркутского государственного университета и Иркутского государственного педагогического университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [8] – [13].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, разбитых на 9 параграфов, заключения и списка литературы (26 названий), занимает 62 страниц текста, набранного в программе LaTeX. Нумерация теорем, лемм, следствий и примеров в диссертации двойная: первое число — номер главы, второе — номер теоремы, леммы, следствия или примера.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

К основным результатам диссертации относятся теоремы 2.1, 3.1, 3.2, 3.5 и 4.1, следствия 2.2, 2.3, 2.5 и 2.6.

Во **введении** дается обоснование актуальности темы исследований.

Первая глава является вводной. В **первом параграфе** поясняется терминология и основные обозначения, принятые в работе. Во **втором параграфе** дается определение геометрической эквивалентности групп. **Третий параграф** посвящен изложению понятия геометрической эквивалентности групп с точки зрения решения систем уравнений в группе. В **четвертом параграфе** даются определения основным классам групп (многообразия, квазимногообразия и предмногообразия) и приводятся ряд результатов по ним, используемых во второй главе. **Пятый параграф** посвящен изложению известных результатов по пополнению нильпотентных групп, которые используются в третьей главе.

Во **второй главе** определяется новый класс групп — геометрическое многообразие, изучаются его свойства и указываются его связи с другими классами групп, в частности с предмногообразием. В **первом параграфе** с помощью отношения, которое естественным образом связано с геометрической эквивалентностью, вводится определение геометрического многообразия групп. Доказываются некоторые свойства этого класса групп, такие как, замкнутость относительно геометрической эквивалентности, относительно подгрупп, декартовых степеней и локальная замкнутость. Во **втором параграфе** исследуется то, как соотносится геометрическое многообразие с другими известными классами групп. Основным результатом параграфа является:

Теорема 2.1 *Если геометрическое многообразие, порожденное классом групп $\mathfrak{K}$, замкнуто относительно декартовых произведений, то* $\mathsf{gvar}\ \mathfrak{K} = \mathsf{Lpvar}\ \mathfrak{K}$.

Из этой теоремы и из ранее доказанных результатов вытекают следующие следствия:

Следствие 2.2 *Если класс групп $\mathfrak{X}$ замкнут относительно декартовых произведений, то* $\mathsf{gvar}\ \mathfrak{X} = \mathsf{Lpvar}\ \mathfrak{X}$.

Следствие 2.3 *Геометрическое многообразие, порожденное одной группой, совпадает с локальным замыканием предмногообразия, порожденного этой группой.*

Следствие 2.5*Многообразие (квазимногообразие) групп образует геометрическое многообразие. Предмногообразие групп образует геометрическое многообразие тогда и только тогда, когда оно локально замкнуто.*

Следствие 2.6*Класс нильпотентных групп и класс разрешимых групп образуют геометрические многообразия.*

В **третьей главе** рассматриваются условия, при которых нильпотентные группы без кручения геометрически эквивалентны своим минимальным пополнениям и приводятся примеры нильпотентных групп геометрически неэквивалентных своим минимальным пополнениям (примеры 3.1 – 3.3). В **первом параграфе** приводится критерий геометрической эквивалентности нильпотентной группы без кручения и ее минимального пополнения:

Теорема 3.1 *Пусть G — нильпотентная группа без кручения и $G^\sharp$ ее минимальное пополнение. Для геометрической эквивалентности групп G и $G^\sharp$ необходима и достаточна геометрическая эквивалентность группы G подгруппам G^n при каждом натуральном n.*

С помощью данной теоремы доказывается еще один важный результат:

Теорема 3.2 *Двуступенно нильпотентные группы без кручения геометрически эквивалентны своим минимальным* *пополнениям.*

Второй параграф посвящен разбору примера трехступенно нильпотентной группы без кручения от четырех порождающих геометрически неэквивалентной своему минимальному пополнению. В конце главы доказывается:

Теорема 3.5 Нильпотентная группа без кручения с двумя порождающими ступени меньшей или равной четырем геометрически эквивалентна своему минимальному пополнению. В **четвертой главе** рассматривается связь квазимногообразий с геометрическими многообразиями, в частности порожденными геометрически нетеровыми группами. А также рассматривается связь между квазимногообразиями, порожденными нильпотентной группой без кручения и ее минимальным пополнением. По теореме Г. Баумслага [1], многообразие, порожденное нильпотентной группой без кручения, совпадает с многообразием, порожденным минимальным пополнением этой группы. Как показывает приведенная ниже теорема, этот результат не распространяется на квазимногообразия нильпотентных групп.

Теорема 4.1 *Квазимногообразие, порожденное нильпотентной группой без кручения, не обязательно совпадает с квазимногообразием, порожденным минимальным пополнением этой группы.*

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Определяется новый класс групп — геометрическое многообразие, и доказываются его свойства: замкнутость относительно геометрической эквивалентности, относительно подгрупп, декартовых степеней и локальная замкнутость.

2. Указывается связь геометрических многообразий с предмногообразиями и другими классами групп.

3. Приводится критерий геометрической эквивалентности нильпотентных групп без кручения своим минимальным пополнениям и, как следствие, доказана геометрическая эквивалентность двуступенно нильпотентных групп без кручения и их минимальных пополнений.

4. Приведен пример нильпотентной группы без кручения ступени три геометрически неэквивалентной своему минимальному пополнению и доказано, что квазимногообразие, порожденное нильпотентной группой без кручения, не обязательно совпадает с квазимногообразием, порожденным минимальным пополнением этой группы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. Baumslag. *On the residual nilpotence of some varietal products.* Trans. Amer. Math. Soc. **109** (1963), 357–365.

[2] G. Baumslag, A. Miasnikov, V. Remeslennikov. *Algebraic geometry over groups I: Algebraic sets and ideal theory.* J. Algebra, **219** (1999), 16–79.

[3] G. Baumslag, A. Miasnikov and V. Roman'kov. *Two theorems about equationally Noetherian groups.* J. Algebra, **194** (1997), 654–664.

[4] A. Miasnikov, V. Remeslennikov. *Algebraic geometry over groups II: Logical Foundations.* J. Algebra, **234** (2000), 225–276.

[5] B. Plotkin. *Varieties of algebras and algebraic varieties.* Israel J. of Math., **96** (1996), 511–522.

[6] B. Plotkin. *Seven Lectures on Universal Algebraic Geometry.* Institute of Mathematics, Hebrew University Jerusalem, Israel., Preprint No. 1., 2000/2001.

[7] B. Plotkin. *Some problems in nonclassical algebraic geometry.* Ukrainian Mathematical Journal, **54**, 6 (2002), 1019–1026.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[8] В.В. Блудов, Б.В. Гусев. *Геометрическая эквивалентность нильпотентных групп.* Комбинаторные и вычислительные методы в математике. Тез. док. межд. конф., Омск, 1998, 31–32.

[9] В.В. Блудов, Б.В. Гусев. *О геометрической эквивалентности групп.* "Алгебра и линейная оптимизация". Труды международного семинара, посвященного 90-летию со дня рожд. С.Н. Черникова, Екатеринбург, 2002, с. 59–65.

[10] В.В. Блудов, Б.В. Гусев. *О геометрических многообразиях групп.* Междун. конф. "Алгебра и ее приложения". Тезисы докл. Красноярск, КГУ, 2002, с. 18–19.

[11] В.В. Блудов, Б.В. Гусев. *Геометрическая эквивалентность групп.* Труды Института Математики и Механики УрО РАН, 2007, Том 13, №1, с. 56–77.

[12] Б.В. Гусев. *О геометрической эквивалентности в 3-х и 2-х ступенно нильпотентных группах без кручения.* Математика в восточных регионах Сибири: Материалы международной конференции. Улан-Удэ, 2000, с. 140–141.

[13] Б.В. Гусев. *О геометрической эквивалентности нильпотентных групп без кручения ранга два.* Математические системы, **6** (2007), Красноярск,

Формат бумаги 60×84 1/16. Объем 0,7 п.л.
Заказ 10. Тираж 100 экз.
Отпечатано в ОКИС ЦНИТ ИГУ
664003, Иркутск, б. Гагарина, 20