Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
ГОРНО-АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Пушкарева Татьяна Алексеевна

ПЕРИОДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НА ПЕРЕМЕННОЙ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Чуешев Виктор Васильевич

Горно-Алтайск – 2014

Содержание

Введение

Мультипликативные функции и дифференциалы Прима появились в классических работах Ф. Прима, Г. Роста и П. Аппеля [23; 12], как естественное обобщение абелевых дифференциалов и их периодов. Для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности они нашли приложения в геометрической теории функций, аналитической теории чисел (Х.Фаркаш, И. Кра), теории векторных расслоений над комплексными многообразиями (Р. Ганнинг, И. Ергенссон, Дж.Фау, Г. Кемпф, Э. Джеблоу) и в уравнениях математической физики [15 – 22].

В работе [10] начато построение основ теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеров. Проведенные в работе исследования берут начало в основной работе Р. Ганнинга (1980 г.)[19], который возродил интерес к периодам дифференциалов Прима для любых характеров и вместо пространства периодов предложил так называемое когомологическое расслоение Ганнинга для фиксированной поверхности и для любых характеров. Чуешев В. В.[10] предложил обобщить понятие когомологического расслоения Ганнинга над базой из пространства Тейхмюллера и группы характеров.

В диссертационной работе Пушкаревой Т.А. начато построение основ теории дифференциалов Прима и их классов периодов для произвольных характеров, причем для переменной компактной римановой поверхности. Теория классов периодов гармонических дифференциалов Прима для любых характеров создается как аналог теории периодов абелевых дифференциалов. Отметим, что общая классическая теория периодов абелевых дифференциалов строилась только на фиксированной поверхности [2; 4; 8; 15].

Построенные в этой работе основы теории мероморфных и гармонических дифференциалов Прима и их периодов на переменной римановой поверхности и с переменными характерами существенно отличаются от основ классической теории. Причем используются новые средства геометрической теории функций: пространства Тейхмюллера, группы характеров, векторные расслоения из дифференциалов Прима над пространством Тейхмюллера, универсальное многообразие Якоби, расслоения целых дивизоров с голоморфными сечениями над пространством Тейхмюллера, когомологическое векторное расслоение Ганнинга и сложную технику работы с классами дивизоров на компактной римановой поверхности.

Известно, что абелевы дифференциалы и их периоды нашли многочисленные приложения в уравнениях математической физики, при алгебро-геометрическом интегрировании ряда нелинейных уравнений в работах С.П. Новикова [6], И.М. Кричевера [5] и в теоретической физике (Р. Дик, С. Климек), а также в теории пространств Тейхмюллера в работах Л.В. Альфорса, Л. Берса [1], С.Л. Крушкаля и К. Эрла [14].

Отметим существенные отличия наших результатов от имеющихся классических результатов, приведенных в книгах Дж. Спрингера [8], Фаркаша – Кра [15] и других книгах по классической геометрической теории функций на компактной римановой поверхности. Сначала заметим, что все объекты рассматриваются на переменной компактной римановой поверхности F_μ. Для построения теории однозначных дифференциалов большую роль играют, так называемые, элементарные дифференциалы любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов: либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса [8; 15], и голоморфно зависящие от модулей $[\mu]$ компактных римановых поверхностей F_μ. В нашей работе дано построение и конструктивное описание дивизоров элементарных дифференциалов Прима трех родов любых целых порядков. Кроме того, в отличие от случая абелевых дифференциалов при $q = 1$, для случая $q > 1$ на переменной компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ существует дифференциал Прима порядка q для существенного характера с единственным простым полюсом.

Первая глава диссертации посвящена доказательству теорем о полной сумме вычетов для $(\rho, q)-$дифференциалов Прима при любых характерах ρ на переменной компактной римановой поверхности.

Как следствие доказываются законы взаимности для однозначных мероморфных функций и дифференциалов Прима, и находятся необходимые и достаточные условия существования $(\rho, q)-$дифференциалов с заданными полюсами и вычетами в них.

В этой главе также построены четыре основных типа элементарных дифференциалов Прима любого целого порядка, локально голоморфно зависящие от характера ρ и модулей компактной римановой поверхности. Дано полное описание дивизоров элементарных дифференциалов Прима на поверхности. Любой мероморфный дифференциал можно представить в виде конечной суммы элементарных дифференциалов трех родов. Получены новые свойства пространств мероморфных мультипликативных функций с заданными полюсами на переменной компактной римановой поверхности и для переменных характеров. Кроме того, доказаны аналоги формулы разложения П. Аппеля [12] для мультипликативных функций на переменной компактной римановой поверхности.

Во второй главе диссертации найдены: основные соотношения на периоды и все виды билинейных соотношений между периодами элементарных дифференциалов Прима трёх родов на переменной компактной римановой поверхности для любых характеров. Таким образом, в этой главе получена классификация билинейных соотношений для дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$. Отметим, что частные случаи билинейных соотношений в работах П. Аппеля, Р. Ганнинга, В.В. Чуешева, Дж. Кемпфа, Э. Джеблоу [12; 17–20; 10; 22] рассматривались только на фиксированной поверхности и для специальных характеров. Доказана эквивалентность основных соотношений П.Аппеля [12] и Р.Ганнинга [19] на периоды голоморфных дифференциалов Прима.

В третьей главе рассматриваются дифференциалы Прима на специальных римановых поверхностях. В. М. Бухштабер и А. К. Цих обратили наше внимание на важность изучения теории функций на специальных римановых поверхностях, т. е. заданных конкретными полиномиальными уравнениями. В этой главе получены явные базисы в пространствах голоморфных $(\rho, q)-$дифференциалов для несущественных характеров на четырех специальных римановых поверхностях и на всех кривых Ферма $F_n : y^n = x^n - 1, n \geq 3$.

В четвертой главе изучаются периоды гармонических дифференциалов Прима для существенных и несущественных характеров на переменной компактной римановой поверхности.

Доказан аналог теорем де Рама и Ходжа для гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности. Отметим, что эти результаты для частного случая фиксированной поверхности были получены Р. Ганнингом [18] и Э. Джеблоу [20] с помощью когомологий с коэффициентами в пучках. В нашей работе строим прямое доказательство этих результатов для переменной компактной римановой поверхности элементарными способами, используя классы периодов Ганнинга.

Доказано, что гармоническое векторное расслоение Прима, со слоями состоящими из пространств гармонических дифференциалов Прима, вещественно-аналитически изоморфно когомологическому расслоению Ганнинга над произведением пространства Тейхмюллера и группы нормированных нетривиальных характеров. Кроме того, изучены классы периодов голоморфных дифференциалов Прима для существенных характеров на переменной компактной римановой поверхности.

Строятся канонические базисы голоморфных дифференциалов Прима, локально голоморфно зависящих от существенных характеров и модулей компактных римановых поверхностей.

Строятся канонические базисы гармонических дифференциалов Прима, которые вещественно-аналитически зависят от нормированных характеров и комплексно-аналитически от модулей компактных римановых поверхностей.

Глава 1.

Вычеты и элементарные дифференциалы Прима

§1.1. Предварительные сведения

Пусть F будет фиксированная компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. набором образующих для первой фундаментальной группы $\pi_1(F)$; F_0 - фиксированная комплексно-аналитическая структура на F [15; 11]. В дальнейшем риманову поверхность $(F; F_0)$ для краткости будем обозначать через F_0. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0, Γ изоморфна $\pi_1(F)$. Эта группа имеет представление

$$\Gamma = \langle A_1, ..., A_g, B_1, ..., B_g : \prod_{j=1}^{g} A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1} = 1\rangle [1; 15].$$

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F может быть отождествлена с некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, $\mu(z)$ - комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$ [1; 15]. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0. Пусть $M(F)$ - множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0, $Diff^+(F)$ - группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, $Diff_0(F)$ - нормальная подгруппа в $Diff^+(F)$, состоящая из всех диффеоморфизмов гомотопных тождественному диффеоморфизму id на F. Группа $Diff^+(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in Diff^+(F), \mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/Diff_0(F)$ [1; 11; 7].

Так как отображение $\pi : U \to F_0 = U/\Gamma$ локальный диффеоморфизм, то любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до $\Gamma-$дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L_\infty(U)$, $\|\mu\|_{L_\infty(U)} = ess\sup_{z\in U}|\mu(z)| < < 1$, и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z), z \in U, T \in \Gamma$ [1].

Если $\Gamma-$дифференциал μ на U продолжить положив $\mu = 0$ на $U^* = = \{z \in \mathbf{C} : |z| \geq 1\}$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbf{C}} \to \overline{\mathbf{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\overline{z}} = \mu(z)w_z$. Отображение $T \to T_\mu = w^\mu T(w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу $\Gamma_\mu = w^\mu\Gamma(w^\mu)^{-1} = \langle A_1^\mu, ..., B_g^\mu : \prod_{j=1}^{g}[A_j^\mu, B_j^\mu] = 1\rangle$, инвариантно действующую на области $w^\mu(U)$ [1]. Два $\Gamma-$дифференциала Бельтрами μ и ν называются конформно эквивалентными, если существует конформное отображение $h : F_\mu \to F_\nu$ гомотопное id на F. Класс $[\mu]$ конформно эквивалентных $\Gamma-$дифференциалов соответствует точно одной точке $[F_\mu] = [\mu]$ пространства Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F)$ классов конформной эквивалентности отмеченных компактных римановых поверхностей рода g [1; 15; 11]. Известно, что $\mathbf{T}_g(F)$ является комплексно-аналитическим многообразием размерности $3g-3$ при $g \geq 2$ и элементы из Γ_μ голоморфно зависят от $[\mu]$. Кроме того, $\mathbf{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение

$$\Phi : M(F) \to M(F)/Diff_0(F) = \mathbf{T}_g(F)$$

будет голоморфным и при этом Φ имеет только локальные голоморфные сечения [1].

Два $\Gamma-$дифференциала Бельтрами μ и ν будут конформно эквивалентными, если и только если $w^\mu T(w^\mu)^{-1} = w^\nu T(w^\nu)^{-1}, T \in \Gamma$. Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F)$ эквивалентен выбору системы образующих $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F_\mu)$, и $\{A_j^\mu, B_j^\mu\}_{j=1}^g$ в Γ_μ для любого $[\mu]$ из $\mathbf{T}_g$. Отсюда получаем отождествления $M(F)/Diff_0(F) = \mathbf{T}_g(F) = = \mathbf{T}_g(\Gamma)$, положив $[\mu] = [F_\mu; \{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g] = \Gamma_\mu$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $[F_\mu; \{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g]$ и отмеченными квазифуксовыми группами Γ_μ [1; 7; 11].

Универсальное многообразие Якоби рода g есть расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, чей слой над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ есть многообразие Якоби $J(F_\mu)$ для поверхности F_μ [14].

В работе Берса [1] для любого фиксированного $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ построены $\zeta_1[\mu] = \zeta_1([\mu], \xi)d\xi, ..., \zeta_g[\mu] = \zeta_g([\mu], \xi)d\xi$ - голоморфные формы являющиеся поднятиями на $w^\mu(U)$ канонического базиса голоморфных абелевых дифференциалов $\zeta_1[\mu], ..., \zeta_g[\mu]$ на F_μ, двойственного к каноническому базису $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^g$ на отмеченной компактной римановой поверхности F_μ. Причем он голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной поверхности F_μ. Кроме того, матрица $b-$периодов для F_μ, состоит из комплексных чисел $\pi_{jk}[\mu] = \int\limits_{\xi}^{B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w)dw, \xi \in w^\mu(U)$ и голоморфно зависит от $[\mu]$ [1; 15].

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi : w^\mu(U) \to \mathbf{C}^g$ по правилу $\varphi_j(\xi) = = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w)dw, j = 1, ..., g$. Тогда φ индуцирует голоморфное вложение из F_μ в $J(F_\mu)$ [15; 10].

Далее, для любого натурального числа $n \geq 1$ существует расслоенное пространство π_n над $\mathbf{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на компактной римановой поверхности F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n, который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_n из этого расслоения на универсальное расслоение Якоби, $n \geq 1$, чьё ограничение на слои является продолжением классического отображения Якоби $\varphi : F_\mu \to J(F_\mu)$. Известно, что для $n = g$ отображение $\varphi : F_g[\mu] \backslash F_g^1[\mu] \to W_g[\mu] \backslash W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu]$ - $g-$кратное симметрическое произведение поверхности F_μ и $W_g^1[\mu] = \varphi(F_g^1[\mu])$ имеет комплексную размерность, не превышающую $g-2$ [15; 14]. Установлено в [14], что при $n \geq 2g-2$ существуют глобальные голоморфные сечения для π_n, проходящие через любую заданную точку в расслоении дивизоров. Локальные голоморфные сечения для π_n над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ можно получить (для любого $n \geq 1$) из локальных голоморфных сечений К. Эрла $\widetilde{s}$ для $\Phi : M(F) \to \mathbf{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [14].

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to$ $\to (\mathbf{C}^*, \cdot),\ \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Характер единственно задается набором $(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), ..., \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu)) \in (\mathbf{C}^*)^{2g}$.

Определение 1.1.1. *Мультипликативной функцией* на компактной римановой поверхности F_μ для характера ρ назовем мероморфную функцию f на $w^\mu(U)$ такую, что $f(Tz) = \rho(T)f(z),\ z \in w^\mu(U),\ T \in \Gamma_\mu$.

Определение 1.1.2. *q-дифференциалом Прима* относительно фуксовой группы Γ для ρ, т. е. $(\rho, q)-$дифференциалом, называется дифференциал $\omega(z)dz^q$ такой, что $\omega(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\omega(z),\ z \in U,\ T \in \Gamma$, $\rho : \Gamma \to \mathbf{C}^*$.

Если $f_0[\mu]$ - мультипликативная функция на F_μ для характера ρ без нулей и полюсов, то $\frac{df_0}{f_0}$ - голоморфный абелев дифференциал на F_μ. Отсюда $f_0([\mu],P) = \exp \int\limits_{P_0[\mu]}^{P} \sum_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\zeta_j([\mu])$, $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0)$, $P_0[\mu] \in \in F_\mu$, $c_j([\mu],\rho) \in \mathbf{C}$, $j = 1, ..., g$, где c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ. При этом интегрирование от фиксированной $P_0[\mu]$ до текущей P на переменной поверхности F_μ, и $s[\mu]$ - сечение К. Эрла [14] над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$.

Характер ρ для f_0 имеет вид

$$\rho(a_k^\mu) = \exp c_k([\mu],\rho), \rho(b_k^\mu) = \exp\left(\sum_{j=1}^{g} c_j([\mu],\rho)\pi_{jk}([\mu])\right),$$

$k = 1, ..., g$. Такие характеры ρ будем называть *несущественными*, а f_0 - единицей. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ группу всех характеров на Γ, а через L_g подгруппу несущественных характеров на Γ [19; 15; 10].

Лемма 1.1.1. [10, с.106]. *Голоморфное главное $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)-$расслоение E биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению $\mathbf{T}_g(F) \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ над $\mathbf{T}_g(F)$.*

Определение 1.1.3. Дифференциал Прима ϕ на компактной римановой поверхности F для характера ρ называется *мультипликативно точным*, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, т. е. f - мультипликативная функция на F для ρ, где $F = U/\Gamma$.

По аналогии с классической теорией абелевых дифференциалов назовем мероморфный дифференциал Прима $\phi = \phi(z)dz^q$ первого, второго и третьего рода, если он либо не имеет полюсов, либо имеет полюса второго или более высокого порядка без вычетов, либо имеет полюс первого порядка соответственно [11; 8; 15].

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$, $P_j \in F_\mu$, $n_j \in \mathbf{Z}$, $j = 1, ..., k$. Обозначим через $r_\rho(D^{-1})$ и $i_{\rho^{-1}}(D)$ размерности пространства функций f, кратных дивизору D^{-1} для характера ρ, и пространства дифференциалов Прима, кратных дивизору D для характера ρ^{-1}, соответственно на F.

Теорема 1.1.1 (Римана-Роха для характеров) [15; 10]. *Пусть F - компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство*

$$r_\rho(D^{-1}) = degD - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D).$$

Введем, по аналогии с абелевыми дифференциалами, пространство $\Omega^q_\rho(D)$ мероморфных q-дифференциалов $\phi = \phi(z)dz^q$ на F для характера ρ таких, что $(\phi) \geq D$, где $q \in \mathbf{Z}$. Его комплексная размерность есть число $i_{\rho,q}(D)$.

Теорема (Римана-Роха для (ρ, q)-дифференциалов) [10; 15]. *Для любых $g > 0$ и $q \in \mathbf{Z}$ верно равенство*

$$i_{\rho,q}(D) = (g-1)(2q-1) - degD + i((f)Z^q/D) =$$

$$= (g-1)(2q-1) - degD + r((f)Z^{q-1}/D)$$

при любом характере ρ, где f - любая мультипликативная функция для ρ, $f \neq 0$, а Z – канонический класс дивизоров абелевых дифференциалов на компактной римановой поверхности F рода g.

Пусть ζ_k, $k = 1, ..., g$, - канонический базис голоморфных абелевых дифференциалов, т. е. $\int\limits_{a_l} \zeta_k = \delta_{kl}$, $\tau_{P_j P_0}$ - нормированный элементарный абелев дифференциал с простыми полюсами P_j, P_0 с вычетами + 1 и - 1 соответственно. Кроме того, $\tau^{(m)}_R$ - нормированный абелев дифференциал второго рода (т. е. без вычетов) с единственным полюсом R порядка m, где $m \geq 2$ [8; 11; 15].

Теорема 1.1.2 (Абеля для характеров) [15; 10]. *Пусть D - дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $[F_\mu, \{a_1^\mu, ..., a_g^\mu, b_1^\mu, ..., b_g^\mu\}]$ рода $g \geq 1$ и ρ - характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера $\rho \Leftrightarrow degD = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\log\rho(b_j^\mu)e^{(j)}[\mu] - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\log\rho(a_j^\mu)\pi^{(j)}[\mu](\equiv \psi(\rho,[\mu]))$$

в $\mathbf{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu], ..., e^{(g)}[\mu], \pi^{(1)}[\mu], ..., \pi^{(g)}[\mu]$ матрицы $a^\mu-$периодов и $b^\mu-$периодов канонического базиса $\zeta_1[\mu], ..., \zeta_g[\mu]$, где $\varphi[\mu]$ - отображение Якоби из F_μ в многообразие Якоби $J(F_\mu)$.

Отметим, что, по теореме Берса, отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$ [1].

Теорема 1.1.3 (о полной сумме вычетов для абелевых 1-дифференциалов) [8; 15; 11]. *Для любого мероморфного абелева дифференциала ω на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ с полюсами в попарно различных точках $Q_1, ..., Q_s$ верно равенство $\sum\limits_{j=1}^{s}\operatorname*{res}\limits_{Q_j}\omega = 0$.*

Теорема (о мультипликативных пробелах Вейерштрасса) [10; 15; 8]. *Для любого существенного характера ρ и любой точки P на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ существует точно $g-1$ чисел (мультипликативных пробелов Вейерштрасса) n_i, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < n_1 < ... < n_{g-1} < 2g,$$

которые определяются так, что для каждого $i, i = 1, ..., g-1$, не существует мероморфной мультипликативной функции для ρ на F, имеющей в качестве единственной особенности полюс в P точно порядка n_i.

Определение 1.1.4. Точка P называется *мультипликативной точкой Вейерштрасса* для несущественного (существенного) характера ρ на F, если для P существует мультипликативный не пробел $j, 1 < j \leq g$, $(j, 1 < j \leq g-1)$, т. е. существует мультипликативная функция f для ρ на F с единственным полюсом в P точно порядка $j, j \leq g$ $(j, j \leq g-1)$ [8; 15; 10].

Арбарелло Э. доказал, что (классические) точки Вейерштрасса на переменной компактной римановой поверхности F_μ локально голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ для поверхности. Установим аналог этого результата для мультипликативных точек Вейерштрасса.

Теорема [3; 9] *Для любого* $q \geq 1$, $q \in \mathbf{N}$, *мультипликативные* $q-$*точки Вейерштрасса для переменной компактной римановой поверхности* F_μ *рода* $g \geq 2$, *локально голоморфно зависят от модулей* $[\mu]$ *и характеров* ρ, *а пробелы в мультипликативных 1-точках Вейерштрасса и веса в мультипликативных q-точках Вейерштрасса являются локально постоянными функциями от* $[\mu]$ *и* ρ *со значениями в* $\mathbf{N}$.

§1.2. Теоремы о вычетах для дифференциалов Прима

Теорема о полной сумме вычетов для абелева 1-дифференциала на компактной римановой поверхности играет большую роль в теории функций. Вычеты для дифференциалов Прима можно определять только для ветвей этих многозначных дифференциалов. В этом параграфе будут найдены теоремы о полной сумме вычетов для дифференциалов Прима любого порядка на переменной компактной римановой поверхности с любыми переменными характерами.

Теорема 1.2.1 (о полной сумме вычетов для 1-дифференциала Прима). *Для любого 1-дифференциала Прима* ω *с любым характером* ρ *и* *дивизором* $(\omega) \geq \frac{1}{P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m}}, \alpha_j \in \mathbf{N},\ j = 1, \dots, m,$ *с попарно различными точками* $P_1, \dots, P_m, m \geq 2,$ *на переменной компактной римановой поверхности* F_μ *рода* $g \geq 2$ *существует мультипликативная функция* f *для* ρ^{-1} *такая, что верно равенство* $\sum_{j=1}^{m} \operatorname*{res}_{P_j} \omega f = 0,$ *причем*

1) f *- единица на* F_μ*, если* ρ *- несущественный характер;*

2) f *- единственная, с точностью до умножения на ненулевую константу, функция с единственным простым полюсом* P_1 *на* F_μ*, если* ρ *- существенный характер.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из теоремы о вычетах для абелева дифференциала ωf на F_μ. При этом:

1) если ρ - несущественный характер, то выберем мультипликативную единицу f для ρ^{-1}, где

$$f(P) = \exp\left[-\int_{Q_0}^{P} \sum_{j=1}^{g} \log \rho(a_j) \zeta_j \right],\ Q_0 \neq P_1, \dots, P_m;$$

2) если ρ - существенный характер, то существует единственная мультипликативная функция f для ρ^{-1} с единственным простым полюсом P_1 [9]. Такая функция f имеет дивизор $\frac{R_1}{P_1}$, где $\varphi(R_1) = \varphi(P_1) - \psi(\rho)$ в многообразии Якоби $J(F_\mu), \psi(\rho) \neq 0$. Эта функция может быть задана явно в виде

$$f(P) = \exp\left[\int_{Q_0}^{P} (\tau_{R_1 P_1} - \sum_{j=1}^{g} \log \rho(a_j) \zeta_j) \right],\ Q_0 \neq P_1, \dots, P_m[10].$$

Покажем единственность такой функции. Если имеется точка R_2 такая, что верно равенство $\varphi(R_1) = \varphi(P_1) - \psi(\rho) = \varphi(R_2)$, то $\varphi(R_1/R_2) = 0$. По классической теореме Абеля существует однозначная функция h с дивизором $(h) = R_1/R_2$, имеющая единственный простой полюс на компактной римановой поверхности положительного рода. Противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1.2.1 (о полной сумме вычетов для 1-дифференциала Прима с несущественным характером). *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любого 1-дифференциала Прима τ с несущественным характером ρ и простыми полюсами $Q_1, ..., Q_m$ верно равенство $\sum\limits_{j=1}^{m} f_0^{-1}(Q_j) \operatorname{res}\limits_{Q_j} \tau = 0$, где слагаемые не зависят от выбора ветвей τ и f_0 для ρ, т. е. сумма корректно определена на F_μ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простого полюса Q имеем разложения для некоторой ветви дифференциала $\tau = (\frac{c_{-1}}{z} + O(1))dz, c_{-1} \neq 0$, и $\frac{1}{f_0} = (\frac{1}{f_0})(Q) + O(z)$, где $z(Q) = 0$, в окрестности $U(Q)$. Отсюда $\frac{\tau}{f_0} = (\frac{c_{-1}}{f_0(Q)} \cdot \frac{1}{z} + O(1))dz$. Кроме того, верно равенство $\frac{\tau(Tz)dTz}{f_0(Tz)} = \frac{\rho(T)\tau(z)dz}{\rho(T)f_0(z)}$ для $T \in \Gamma_\mu, z \in w^\mu(U)$, а значит вычет не будет зависеть от выбора ветвей для τ и f_0. Теперь применяем теорему 1.1.3 о полной сумме вычетов для абелева дифференциала $\frac{\tau}{f_0}$. Следствие доказано.

Теорема 1.2.2 (о полной сумме вычетов для $(\rho, q)-$дифференциала). *Для любого $(\rho,\ q)-$дифференциала τ с любым характером ρ и дивизором $(\tau) \geq \frac{1}{Q_1^{\alpha_1} ... Q_s^{\alpha_s}}, \alpha_j \in \mathbf{N}, j = 1, \ldots, s,$ с попарно различными точками $Q_1, ..., Q_s, s \geq 2,$ и любого целого числа $q \neq 0, 1$ на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ существует мультипликативная функция f для ρ^{-1} такая, что верно равенство*

$$\sum_{j=1}^{s} \operatorname{res}_{Q_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}} + \sum_{j=1}^{g+1} \operatorname{res}_{S_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}} = 0,$$

причем

1) f - единица на F_μ, если ρ - несущественный характер;

2) f - единственная, с точностью до умножения на ненулевую константу, функция с единственным простым полюсом P_1 на F_μ, если ρ - существенный характер.

В каждом из этих случаев ω_0 - голоморфный абелев дифференциал с дивизором $(\omega_0) = S_1 ... S_g S_{g+1}^{g-2}$, $\varphi_{S_{g+1}}(S_1 ... S_g) = -2K$ в многообразии

Якоби $J(F_\mu)$ *и* $\{S_1, ..., S_g, S_{g+1}\} \cap \{Q_1, ..., Q_s\} = \emptyset$ *на* F_μ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно найти абелев голоморфный дифференциал ω_0 такой, что $(\omega_0) \cap \{Q_1, \ldots, Q_s\} = \emptyset$ на F_μ, так как дивизоры голоморфных абелевых дифференциалов не имеют базисных точек на F_μ [15]. Выберем любой такой абелев дифференциал ω_0 с дивизором $(\omega_0) = S_1 \cdots S_{2g-2}$. Построим абелев 1-дифференциал $\frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}}$, где f имеет характер ρ^{-1} на F_μ.

Выберем ω_0 так, чтобы в его дивизоре было бы по возможности меньшее число точек. Имеем равенство $\varphi_{P_0}(S_1...S_{2g-2}) = -2K$ в многообразии Якоби $J(F_\mu)$, где K - вектор констант Римана для отмеченной компактной римановой поверхности F_μ с базисной точкой P_0 [15]. Перепишем это равенство в другом виде $\varphi_{S_{g+1}}(S_1...S_g) = -2K - \varphi_{S_{g+1}}(S_{g+1}^{g-2})$, где $P_0 = S_{g+1} = ... = S_{2g-2}$. Отсюда получаем абелев дифференциал ω_0 с дивизором вида $(\omega_0) = S_1...S_g S_{g+1}^{g-2}$. По теореме о полной сумме вычетов для абелева дифференциала $\frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}}$ получаем наше равенство. Теорема доказана.

Замечание 1.2.1. Отметим, что при $q < 0$ в предыдущей теореме нет второй суммы в утверждении теоремы.

1) Покажем, что существуют ненулевые $(\rho, q)-$дифференциалы τ, $(\tau) \geq \frac{1}{Q_1...Q_s}$, при некоторых условиях на $s \geq 2$ при фиксированных $g \geq 2$ и $q < 0$. По теореме Римана-Роха для $(\rho, q)-$дифференциалов имеем равенство

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q_1...Q_s}\right) = (2q-1)(g-1) - deg\ \frac{1}{Q_1...Q_s} + r((f)Z^{q-1}Q_1...Q_s).$$

Найдем степень $deg\ ((f)Z^{q-1}Q_1...Q_s) = 0 + (q-1)(2g-2) + s$. Если $deg\ ((f)Z^{q-1}Q_1...Q_s) > 0$, т. е. $s > -(q-1)(2g-2)$, то $r((f)Z^{q-1}Q_1...Q_s) = 0$ и размерность $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1...Q_s}) = (2q-1)(g-1) + s > 0$

при $s > -(2q-1)(g-1)$. Для s, удовлетворяющих неравенству $s > (2-2q)(g-1)(\geq 4)$, при фиксированных $g \geq 2$ и $-q \geq 1$ имеем $i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1...Q_s}) > 0$ и равенство в предыдущей теореме является содержательным, т. е. не сводится к тождеству $0 \equiv 0$.

2) При $g \geq 2$ и $q \geq 2,\ s \geq 2$ также имеем

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q_1...Q_s}\right) = (2q-1)(g-1) + s + r((f)Z^{q-1}Q_1...Q_s)(\geq 5),$$

т. е. существует ненулевой $(\rho, q)-$дифференциал τ с $(\tau) \geq \frac{1}{Q_1...Q_s}$ на F_μ, при этих условиях.

Замечание 1.2.2. П. Аппель [12] рассматривал теорему о вычетах только в одном частном случае $q = 0$ и для фиксированной римановой поверхности. Следуя его работе найдём соотношения между простыми полюсами $Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $A_1, ..., A_s$ в них соответственно для ветви мультипликативной функции f с характером ρ на F_μ.

Возьмем любой ненулевой голоморфный дифференциал Прима $\phi(z)dz$ с обратным характером ρ^{-1}. Произведение $f(z)\phi(z)dz$ будет однозначным мероморфным дифференциалом на F_μ с простыми полюсами в $Q_1, ...,$ Q_s и вычетами $A_1\phi(Q_1), ..., A_s\phi(Q_s)$ соответственно. Тогда по классической теореме о вычетах получаем

Теорема 1.2.3 [12] (Аналог теоремы о полной сумме вычетов для функций). *Пусть f - мультипликативная функция для ρ с простыми полюсами $Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $A_1, ..., A_s$ в этих точках соответственно для некоторой ветви этой функции на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$. Тогда*

1) если ρ - существенный характер, то существует точно $g-1$ линейно независимых над $\mathbf{C}$ *соотношений $A_1\phi_j(Q_1) + ... + A_s\phi_j(Q_s) = 0$, $j = 1, ..., g-1$, где $\phi_1(z)dz, ..., \phi_{g-1}(z)dz$ - база голоморфных дифферен-*

циалов Прима на F_μ для ρ^{-1};

2) если ρ - несущественный характер, то существует ровно g линейно независимых над $\mathbf{C}$ соотношений $A_1\phi_j(Q_1) + ... + A_s\phi_j(Q_s) = 0$, $j = 1, ..., g$, где $\phi_1(z)dz, ..., \phi_g(z)dz$ - базис голоморфных дифференциалов Прима для ρ^{-1} на F_μ.

Замечание 1.2.3. В нашей теореме 1.2.1 ω - мероморфный дифференциал Прима с полюсами $Q_1, ..., Q_s$, а f либо не имеет особых точек, либо особенность только в Q_1. Таким образом получим, что ω и f будут 1-двойственны только по характеру, но это не будет строгой двойственностью, так как дивизоры не связаны между собой [10]. Заметим, что теорема Аппеля легко обобщается на кратные полюса.

Следовательно, наша теорема 1.2.1 и аналог теоремы Аппеля изучают 1-двойственные объекты функции и дифференциалы. Эти теоремы являются независимыми и дополнительными друг к другу в смысле 1-двойственных дифференциалов Прима и мультипликативных функций на F_μ [10].

§1.3. Следствия из теоремы о вычетах и законы взаимности для мультипликативных функций

В данном параграфе получены следствия из теоремы о полной сумме вычетов для 1-дифференциала ω с любым характером ρ, в частном случае, когда $\omega = df$, т. е. ω - мультипликативно точен на F_μ.

Пусть $P_1, ..., P_m$ - нули f с кратностью $\lambda_1, ..., \lambda_m$ и $Q_1, ..., Q_s$ - полюса для f с кратностью $\mu_1, ..., \mu_s$. Рассмотрим также однозначную функцию R на F_μ с полюсами $M_1, ..., M_l$ кратности $p_1, ..., p_l$ соответственно, где точки M_i не входят в носитель дивизора $supp\ (f)$. Заметим, что $\frac{df}{f}$ будет абелев дифференциал с простыми полюсами $P_1, ..., P_m, Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $\lambda_1, ..., \lambda_m, -\mu_1, ..., -\mu_s$ соответственно. Тогда, в силу однозначности подынтегрального выражения, по теореме 1.1.3 получим, что

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \Delta_\mu} R\frac{df}{f} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k R(P_k) - \sum_{j=1}^{s} \mu_j R(Q_j) + \sum_{i=1}^{l} \operatorname*{res}_{M_i} R\frac{df}{f}, \qquad (1)$$

где Δ_μ - фундаментальная область для группы Γ_μ в области $w^\mu(U)$ [1; 15].

Из (1) получим формулы, связанные со специальным выбором функции R на F_μ :

1) Пусть R не имеет полюсов на F_μ, а значит R будет константой. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = \sum\limits_{j=1}^{s} \mu_j$, что равносильно классическому факту $\deg(f) = 0$ [8; 15];

2) Пусть R имеет только простые полюса в попарно различных точках $M_1, ..., M_l$, т. е. $R = \frac{c_{-1}^{(i)}}{z - z(M_i)} + O(1)$ в окрестности $M_i, i = 1, ..., l$. Тогда получаем равенство

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_j R(Q_j) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k R(P_k) = \sum_{i=1}^{l} \frac{f'(M_i)}{f(M_i)} \operatorname*{res}_{M_i} R;$$

3) Если R имеет кратные полюса в точках M_i, т. е. $R = \frac{c_{-p_i}^{(i)}}{(z - z(M_i))^{p_i}} + ...$ $+ \frac{c_{-1}^{(i)}}{z - z(M_i)} + O(1),\ i = 1, ..., l$, то в этом случае получаем равенство

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_j R(Q_j) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k R(P_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \left[\left(\frac{f'}{f}\right)^{(p_i - 1)} (M_i) \frac{c_{-p_i}^{(i)}}{(p_i - 1)!} + \left(\frac{f'}{f}\right)^{(p_i - 2)} (M_i) \frac{c_{-p_i + 1}^{(i)}}{(p_i - 2)!} + ... \right.$$

$$\left. ... + \left(\frac{f'}{f}\right)' (M_i) c_{-2}^{(i)} + \frac{f'}{f}(M_i) c_{-1}^{(i)} \right].$$

Замечание 1.3.1. Эти три равенства выражают законы взаимности связывающие нули и полюса для мультипликативной функции f с полюсами однозначных мероморфных функций R на F_μ.

Как следствие из теоремы о полной сумме вычетов для 1-дифференциала с характером ρ получим аналог необходимого и достаточного условия существования 1-дифференциала Прима с любым характером на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ с заданными простыми полюсами и вычетами в них для ветви этого дифференциала [8].

Следствие 1.3.1. *Пусть $Q_1, ..., Q_s$ будут попарно различные точки на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ и $c_1, ..., c_s$ - комплексные числа, $s \geq 2$, и ρ - произвольный характер. Тогда существует 1-дифференциал Прима $\omega = h(z)dz$ для ρ с простыми полюсами $Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $c_1, ..., c_s$ в них соответственно для некоторой его ветви если и только, если*

$$\sum_{j=1}^{s} \operatorname*{res}_{Q_j} \omega f = 0. \tag{2}$$

Причем:

1) равенство (2) *эквивалентно равенству* $\sum\limits_{j=1}^{s} c_j f(Q_j) = 0$, *где f - мультипликативная единица для несущественного характера ρ^{-1};*

2) равенство (2) *эквивалентно равенству*

$$\sum_{j=2}^{s} c_j f(Q_j) + c_1 \lim_{z \to z(Q_1)} \frac{d}{dz}[f(z)(z - z(Q_1))] +$$

$$+ (\operatorname*{res}_{Q_1} f) \lim_{z \to z(Q_1)} \frac{d}{dz}[h(z)(z - z(Q_1))] = 0,$$

где f - функция для существенного характера ρ^{-1}, $(f) = \frac{R_1}{Q_1}$, $\varphi(R_1) = \varphi(Q_1) - \psi(\rho)$, $\psi(\rho) \neq 0$, в многообразии Якоби $J(F_\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость сразу следует из теоремы 1.2.1 для 1-дифференциала с характером ρ на F_μ.

Достаточность. При наших условиях ωf будет абелевым дифференциалом на F_μ и для него выполняется равенство (2). По классической теореме существует абелев дифференциал ω_1 с вычетами $\operatorname*{res}_{Q_j} \omega f,\ j = 1, ..., s$. Отсюда искомый дифференциал $\omega = \frac{\omega_1}{f}$.

Если ρ - существенный характер, то вычет $\operatorname*{res}_{Q_j} \omega f = f(Q_j) \operatorname*{res}_{Q_j} \omega$, $j = 2, ..., s$. В окрестности точки Q_1 верны разложения $\omega = (\frac{c_1}{z - z(Q_1)} + $ $+ C_0^{(1)} + C_1^{(1)}(z - z(Q_1)) + ...)dz$ и $f = \frac{c_{-1}}{z - z(Q_1)} + C_0 + C_1(z - z(Q_1)) + ...$ Тогда

$$\operatorname*{res}_{Q_1} \omega f = C_0 c_1 + c_{-1} C_0^{(1)} =$$

$$= (\operatorname*{res}_{Q_1} \omega) \lim_{z \to z(Q_1)} \frac{d}{dz}[f(z)(z - z(Q_1))] + (\operatorname*{res}_{Q_1} f) \lim_{z \to z(Q_1)} \frac{d}{dz}[h(z)(z - z(Q_1))].$$

Для несущественного характера ρ существует мультипликативная единица f_0 для ρ^{-1} и её дивизор $(f_0) = 1$. Поэтому получаем более простые формулы для вычетов $\operatorname*{res}_{Q_j} \omega f_0 = f_0(Q_j) \operatorname*{res}_{Q_j} \omega, j = 1, ..., s$. Следствие доказано.

Замечание 1.3.2. Для существенного характера ρ и любой точки Q_1 существует дифференциал Прима ω с единственным простым полюсом в Q_1 и не нулевым вычетом на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$. Это показывает принципиальное отличие теории дифференциалов Прима от теории абелевых дифференциалов на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ [8; 15].

Сформулируем аналог теоремы существования $(\rho, q)-$дифференциала Прима с заданными полюсами и вычетами.

Следствие 1.3.2. *Пусть $Q_1, ..., Q_s$ будут попарно различные точки на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ и $c_1, ..., c_s$ - комплексные числа, $s \geq 2$, ρ - произвольный характер, и q - любое целое число. Тогда существует $(\rho, q)-$дифференциал Прима τ с простыми полюсами $Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $c_1, ..., c_s$ в них соответ-*

ственно для некоторой его ветви на F_μ, если и только, если верно равенство

$$\sum_{j=1}^{s} \operatorname*{res}_{Q_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}} + \sum_{j=1}^{g+1} \operatorname*{res}_{S_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}} = 0.$$

При этом:

1) если ρ - несущественный характер, то f - мультипликативная единица для ρ^{-1};

2) если ρ - существенный характер, то f - функция для ρ^{-1}, $(f) = \frac{R_1}{Q_1}$ и точки $S_1, ..., S_{g+1}$ на F_μ, удовлетворяют условию теоремы 1.2.2.

Доказательство получается аналогично доказательству теоремы 1.2.2 и предыдущему следствию. При этом искомый дифференциал $\tau = \frac{\omega_1 \omega_0^{q-1}}{f}$, где ω_1 - абелев дифференциал с полюсами: в точках $Q_1, ..., Q_s$ с вычетами $\operatorname*{res}_{Q_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}}, j = 1, ..., s$, и в дополнительных точках $S_1, ..., S_{g+1}$ с вычетами $\operatorname*{res}_{S_k} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}}, k = 1, ..., g+1$.

Замечание 1.3.3. При $q < 0$ не будет второй суммы в утверждении предыдущего следствия.

§1.4. Элементарные дифференциалы Прима

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют, так называемые, элементарные дифференциалы любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов: либо один полюс порядка ≥ 1, либо два простых полюса [8; 15], и голоморфно зависящие от характеров ρ и от модулей $[\mu]$ компактных римановых поверхностей. В этом параграфе будет найден общий вид элементарных $(\rho, q)-$дифференциалов Прима на F_μ.

Предложение 1.4.1 [9]. *1) Для любого существенного характера ρ, точки $Q \in F_\mu$, натурального числа $q \geq 1$ и несущественного характера*

ρ, точки $Q \in F_\mu$, натурального числа $q > 1$ существует элементарный $(\rho, q)-$дифференциал $\tau_{\rho,q;Q}$ третьего рода с единственным простым полюсом $Q = Q[\mu]$ на F_μ рода $g \geq 2$, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$;

2) Для любого несущественного характера ρ, точки $Q \in F_\mu$ и $q = 1$ не существует элементарный $(\rho, 1)-$дифференциал $\tau_{\rho;Q}$ третьего рода с единственным простым полюсом Q на F_μ.

В нашей работе дадим другое доказательство предложения 1.4.1 и более детальное описание его асимптотики в окрестности особых точек.

Теорема 1.4.1. *Для любого существенного характера ρ, точки $Q \in$ $\in F_\mu$ существует некоторая ветвь элементарного дифференциала $\tau_{\rho,Q}$ третьего рода с единственным простым полюсом в точке Q на F_μ рода $g \geq 2$, локально голоморфно зависящего от $[\mu]$ и ρ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать такой дифференциал в следующем виде $\tau_{\rho,Q} = f\omega_0$. Здесь ω_0 - фиксированный голоморфный абелев дифференциал, голоморфно зависящий от $[\mu]$, с дивизором $(\omega_0) =$ $= Q_1 \cdots Q_{2g-2}$, состоящим из точек отличных от Q, и f - мультипликативная функция с дивизором $(f) = \frac{P_1 \cdots P_{2g-1}}{QQ_1 \cdots Q_{2g-2}}$. Такую функцию можно записать в явном виде [10; 15]. По теореме Абеля для характеров верно равенство

$$\sum_{j=1}^{g} \varphi(P_j) = \varphi(Q) - 2K + \psi(\rho) - \sum_{j=g+1}^{2g-1} \varphi(P_j) = A. \tag{3}$$

Можно выбрать $g - 1$ нулей $P_{g+1}, \dots, P_{2g-1}$ голоморфно зависящих от $[\mu]$, так чтобы $A \notin W_g^1$ [15]. Решая проблему обращения Якоби, единственно определим g нулей $P_1, \dots, P_g$, голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ.

Докажем двумя способами, что Q действительно простой полюс, т. е. Q не сокращается с нулями нашей функции f.

Сначала выберем $P_{g+1}, \ldots, P_{2g-1}$, отличными от Q. Решая проблему Якоби получим нули $P_1, \ldots, P_g$. От противного. Если $Q = P_1$, то (3) перепишется в виде

$$\sum_{j=2}^{g+1} \varphi(P_j) = -2K + \psi(\rho) - \sum_{j=g+2}^{2g-1} \varphi(P_j).$$

Из последнего равенства дивизоры $P_2 \cdots P_{g+1}$ степени g определяются однозначно, как функции от дивизоров $P_{g+2} \cdots P_{2g-1}$ степени $g-2$. Таким образом получаем локально аналитический изоморфизм между достаточно малыми окрестностями в пространстве W_g и в пространстве W_{g-2}. Это невозможно из-за различной комплексной размерности таких пространств в окрестности общей точки из этих пространств [15]. Противоречие.

Это же утверждение можно доказать по другому. Если снова $Q = P_1$, то имеем равенство

$$\sum_{j=2}^{g} \varphi(P_j) = -2K + \psi(\rho) - \sum_{j=g+1}^{2g-1} \varphi(P_j), \tag{4}$$

или $\sum\limits_{j=2}^{g} \varphi(P_j) + \sum\limits_{j=g+1}^{2g-1} \varphi(P_j) = -2K + \psi(\rho)$. Рассмотрим целый дивизор $D = P_2 \cdots P_g P_{g+1} \cdots P_{2g-1}$. У этого дивизора есть $g-1$ свободных точек $P_{g+1}, \ldots, P_{2g-1}$ и он имеет степень $2g-2$. По теореме Римана-Роха имеем $i(D) = -degD + g - 1 + r(\frac{1}{D})$. Тогда по теореме о свободных точках [15] имеем неравенство $g - 1 + 1 \leq r(\frac{1}{D}) = g - 1 + i(D)$ и $i(D) \geq 1$. Поэтому существует ненулевой голоморфный абелев дифференциал ω такой, что $(\omega) \geq D$, а значит $(\omega) = D$ и $\varphi(D) = -2K$. Следовательно из (4) получаем равенство $-2K = -2K + \psi(\rho)$ в $J(F_\mu)$. Таким образом $\psi(\rho) = 0$ и характер ρ будет несущественный. Противоречие.

Выбирая дивизор $P_{g+1}\cdots P_{2g-1}$, как локально голоморфное по $[\mu]$ сечение Эрла над $\mathbf{T}_g$ [14], и решая задачу (3) обращения Якоби получим дивизор $P_1\cdots P_g$, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ.

Таким образом f и ω_0 голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ, а значит $\tau_{\rho,Q}$ тоже голоморфно зависит от $[\mu]$ и ρ. Причем Q на F_μ также выбираем как локально голоморфное сечение расслоения целых дивизоров степени 1 над $\mathbf{T}_g$. Теорема доказана.

Замечание 1.4.1. В локальном параметре в окрестности точки Q имеем разложение $\tau_{\rho,Q}=(\frac{1}{z}+O(1))dz,\ z(Q)=0.$

Замечание 1.4.2. В [9] доказано, что для любого ρ на F_μ рода $g\geq 2$ существует элементарный дифференциал τ_{ρ,Q_1Q_2} третьего рода точно с простыми полюсами в произвольных различных точках Q_1,Q_2, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$.

Для несущественного характера ρ не существует τ_{ρ,Q_1}, но существует τ_{ρ,Q_1,Q_2}. Такой дифференциал $\tau_{\rho,Q_1Q_2}=f_0\tau_{Q_1Q_2}$, где f_0 - мультипликативная единица для ρ, τ_{Q_1,Q_2} - абелев дифференциал с вычетом $+1$ и -1 в точках Q_1,Q_2 соответственно, голоморфно зависящие от $[\mu],\rho$ и точек Q_1,Q_2 [8; 15].

Для существенного характера ρ существуют τ_{ρ,Q_1}, а значит и $\tau_{\rho,Q_1,Q_2}=c_1\tau_{\rho,Q_1}+c_2\tau_{\rho,Q_2}, c_1\neq 0, c_2\neq 0.$

Для любого существенного характера дифференциал $\tau^{(m)}_{\rho,Q}=(\tau_{\rho,Q})^{(m-1)}_Q$, полученный $(m-1)-$кратным дифференцированием по параметру Q, будет дифференциалом Прима второго рода с единственным полюсом в Q и асимптотиками вида $(\frac{1}{z^m}+O(1))dz, z(Q)=0$ [15].

Теорема 1.4.2. *На переменной компактной римановой поверхности*

F_μ рода $g \geq 2$ для любой точки Q, любого характера ρ и $m \geq 2$, $m \in \mathbf{N}$, существует дифференциал Прима $\tau_{\rho,Q}^{(m)}$ с полюсом Q точно порядка m, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ. Причем для существенного характера он имеет асимптотику $(\frac{1}{z^m} + O(1))dz, \quad z(Q) = 0$.

Заметим, что в [9] для любого характера получен дифференциал $\widetilde{\tau}_{\rho,Q}^{(m)}$, но в точке Q он может иметь ненулевой вычет. Другим методом докажем, что существуют такие дифференциалы Прима второго рода для любой точки Q и для любого существенного характера ρ на F_μ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $m \geq 2$ найдем дифференциал Прима $\tilde{\tau}_{\rho,Q}^{(m)}$ для ρ в виде $f\omega_0$, где $(f) = \frac{\tilde{P}_1\cdots\tilde{P}_m P_1\cdots P_{2g-2}}{Q^m Q_1\cdots Q_{2g-2}}$, $Q \neq Q_1, ..., Q_{2g-2}$. По теореме Абеля для характеров имеем равенство

$$\sum_{j=1}^{g} \varphi(P_j) = m\varphi(Q) - \sum_{k=1}^{m} \varphi(\tilde{P}_k) - \sum_{j=g+1}^{2g-2} \varphi(P_j) - 2K + \psi(\rho) = A. \quad (5)$$

Выберем дивизор $\tilde{P}_1\tilde{P}_2...\tilde{P}_m P_{g+1}\cdots P_{2g-2}$, локально голоморфно зависящий от $[\mu]$, так, чтобы точка Q не входила в носитель этого дивизора. Найдем остальные точки $P_1, \ldots, P_g$, как единственное решение проблемы обращения Якоби (5), если $A \notin W_g^1$ [15].

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 1.4.1, можно получить, что $P_1, \ldots, P_g \neq Q$. Тогда точка Q будет действительно полюс точно порядка m для функции f. От противного. Пусть $Q = P_1$. Тогда имеем равенство

$$\sum_{j=2}^{g} \varphi(P_j) = \varphi(Q^{m-1}) - \sum_{k=1}^{m} \varphi(\tilde{P}_k) - \sum_{j=g+1}^{2g-2} \varphi(P_j) - 2K + \psi(\rho).$$

Уже выбраны точки $\widetilde{P}_k \neq Q, k = 1, ..., m$, и точки $P_j \neq Q, j = g+1, g+2, ..., 2g-2$. Рассмотрим дивизор $D = P_2...P_g\widetilde{P}_1 P_{g+1}...P_{2g-2}$. Он имеет $g-1$ свободных точек $\widetilde{P}_1, P_{g+1}, ..., P_{2g-2}$. Как в доказательстве теоремы

1.4.1 получаем, что $\varphi(D) = -2K$. Отсюда имеем равенство

$$\varphi(Q^{m-1}) + \psi(\rho) = \sum_{k=2}^{m} \varphi(\tilde{P}_k).$$

Теперь выберем переменные точки $\tilde{P}_k \neq Q, k = 2, ..., m$, так, чтобы последнее соотношение не выполнялось в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Это возможно так как комплексные размерности будут нуль и $m-1 \geq 1$ для левой и правой сторон. Противоречие.

Таким образом доказано существование дифференциала $\tilde{\tau}_{\rho,Q}^{(m)}$ с разложением

$$\tilde{\tau}_{\rho,Q}^{(m)} = \left(\frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m+1}}{z^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + O(1)\right)dz, \quad c_{-m} \neq 0, z(Q) = 0,$$

для любого характера ρ. Голоморфная зависимость от $[\mu]$ и ρ доказывается аналогично, как в предыдущей теореме.

Для существенного характера ρ в окрестности точки Q в терминах локального параметра имеем разложение

$$\tilde{\tau}_{\rho,Q}^{(2)} = \left(\frac{1}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + C_0 + C_1 z + \dots\right)dz,$$

где c_{-1} - вычет в полюсе Q для ветви на Δ_μ, которая выделяется условием $z^2 f(z)\omega_0(z) \to 1,\ z \to z(Q) = 0$. Рассмотрим дифференциал

$$\tau_{\rho,Q}^{(2)} = \tilde{\tau}_{\rho,Q}^{(2)} - c_{-1}\tau_{\rho,Q} = \left(\frac{1}{z^2} + O(1)\right)dz.$$

Дальше будем рассуждать по индукции относительно параметра m. Пусть по индуктивному предположению утверждение верно для $(m-1)$ включительно и докажем утверждение для m. Для данного m имеем дифференциал

$$\tilde{\tau}_{\rho,Q}^{(m)} = \left(\frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-m+1}}{z^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + O(1)\right)dz, \quad c_{-m} \neq 0, z(Q) = 0.$$

Тогда рассмотрим некоторую ветвь дифференциала Прима

$$\tau_{\rho,Q}^{(m)} = \frac{\tilde{\tau}_{\rho,Q}^{(m)} - c_{-1}\tau_{\rho,Q} - c_{-2}\tau_{\rho,Q}^{(2)} - \dots - c_{-m+1}\tau_{\rho,Q}^{(m-1)}}{c_{-m}} = \left(\frac{1}{z^m} + O(1)\right)dz,$$

где $z(Q) = 0$. Теорема доказана.

Замечание 1.4.3. Этим же методом предыдущую теорему можно обобщить на $(\rho, q)-$дифференциалы Прима $\tau^{(m)}_{\rho,q;Q}$ с полюсом Q точно порядка $m \geq 2, q > 1$, также голоморфно зависящие от $[\mu]$ и ρ.

Следствие 1.4.1. *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ любой мероморфный 1-дифференциал τ для существенного характера ρ представляется конечной суммой элементарных дифференциалов трех родов для ρ, которые голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дифференциал τ для существенного характера ρ имеет простые полюса в точках $Q_1, ..., Q_n$ и полюса $R_1, ..., R_m$ порядков $\alpha_1, ..., \alpha_m$ соответственно. Выпишем главные части ряда Лорана для некоторой ветви этого дифференциала : $g_{R_k}(z_k) = \Bigg(\frac{c^{(k)}_{-1}}{z_k} + \frac{c^{(k)}_{-2}}{z_k^2} + ... + \frac{c^{(k)}_{-\alpha_k}}{z_k^{\alpha_k}}\Bigg) dz_k$ в проколотой окрестности точки $R_k, z_k(R_k) = 0, k = 1, ..., m,$ и $g_{Q_l}(z_l) = \frac{C^{(l)}_{-1}}{z_l} dz_l$ в простых полюсах $Q_l, l = 1, ..., n$. Рассмотрим выражение

$$\tau - \sum_{j=1}^{n} C^{(j)}_{-1} \tau_{\rho,Q_j} - \sum_{k=1}^{m} (c^{(k)}_{-1} \tau_{\rho,R_k} + c^{(k)}_{-2} \tau^{(2)}_{\rho,R_k} + ... + c^{(k)}_{-\alpha_k} \tau^{(k)}_{\rho,R_k}).$$

Оно является голоморфным дифференциалом на F_μ для ρ, который равен $\sum\limits_{j=1}^{g-1} c_j \widetilde{\zeta}_j$. Здесь дифференциал $\tau^{(j)}_{\rho,R_k}, j \geq 2$, для ρ имеет простейшую асимптотику и нулевой вычет в точке $R_k,\ k = 1, ..., m$, а $\widetilde{\zeta}_1, ..., \widetilde{\zeta}_{g-1}$ - базис голоморфных дифференциалов Прима для ρ, который голоморфно зависит от $[\mu]$ и ρ. Следствие доказано.

Пусть ρ - несущественный характер. По теореме 1.4.2 имеем дифференциал Прима $\tau^{(2)}_{\rho,Q} = \omega_0 f$, где $(f) = \frac{\tilde{P}_1 \tilde{P}_2 P_1 \cdots P_{2g-2}}{Q^2 Q_1 \cdots Q_{2g-2}}$, f - функция для ρ на F_μ.

Абелев дифференциал $\frac{\tau^{(2)}_{\rho,Q}}{f_0}$, где f_0 - мультипликативная единица для ρ, имеет полную сумму вычетов равную нулю. В окрестности точки $Q,\ z(Q)=z_0$, имеем разложения в ряд Лорана

$$\tau^{(2)}_{\rho,Q}=\left(\frac{1}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+...\right)dz,$$

$$\frac{1}{f_0(z)}=\exp\left(-\sum_{j=1}^{g}\lambda_j\varphi_j(z)\right)=$$

$$=\frac{1}{f_0(z_0)}-\frac{(z-z_0)}{f_0(z_0)}(\lambda_1\varphi_1^{'}(z_0)+...+\lambda_g\varphi_g^{'}(z_0))+...,$$

где $\lambda_j=\log\rho(a_j), j=1,...,g$. Отсюда

$$0=\operatorname*{res}_{z_0}\frac{\tau^{(2)}_{\rho,Q}}{f_0}=\frac{c_{-1}}{f_0(z_0)}-\frac{\lambda_1\varphi_1^{'}(z_0)+...+\lambda_g\varphi_g^{'}(z_0)}{f_0(z_0)},$$

так как точка Q единственный полюс нашего абелева дифференциала. Поэтому $c_{-1}=\sum\limits_{j=1}^{g}\lambda_j\varphi_j^{'}(z_0)$ и $c_{-1}=0$ только в конечном числе точек Q на $\triangle_\mu$. Действительно, $df_0=\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{g}\lambda_j\varphi_j(P)\right)\sum\limits_{j=1}^{g}\lambda_j\varphi_j'dz(P)$ и имеет место эквивалентность $\sum\limits_{j=1}^{g}\lambda_j\varphi_j'(Q)=0\Leftrightarrow df_0(Q)=0$. Таким образом, для несущественного характера ρ не существует дифференциала Прима второго рода с единственным полюсом второго порядка в произвольной точке Q и главной частью $\frac{1}{(z-z_0)^2}$, так как условие $\lambda_1\varphi_1^{'}(z_0)+...+\lambda_g\varphi_g^{'}(z_0)=0$ верно только для конечного числа точек Q на $\triangle_\mu$, т. е. в точках Q которые являются нулями дифференциала df_0.

Поэтому дифференциал Прима второго рода для несущественного характера ρ должен иметь по-крайней мере два полюса второго порядка в произвольных различных точках Q_1 и Q_2 на $\triangle_\mu$, и с нулевыми вычетами в Q_1 и Q_2.

Рассмотрим следуя П. Аппелю [12] ещё один дифференциал Прима $\tau_{\rho,Q_1Q_2}=f_0\tau_{Q_1Q_2}$ третьего рода на F_μ. Дифференциал Прима $\tau^{(2)}_{\rho,Q_1}$ имеет разложение $(\frac{1}{(z-z_1)^2}+\frac{c^{(1)}_{-1}}{z-z_1}+O(1))dz$ в окрестности точки Q_1, где

$c_{-1}^{(1)} = \sum_{j=1}^{g} \lambda_j \varphi_j'(Q_1)$. Дифференциал Прима $\tau_{\rho,Q_2}^{(2)}$ тоже имеет разложение $(\frac{1}{(z-z_2)^2} + \frac{c_{-1}^{(2)}}{z-z_2} + O(1))dz$ в окрестности точки Q_2 на F_μ, где $c_{-1}^{(2)} = \sum_{j=1}^{g} \lambda_j \varphi_j'(Q_2)$.

Дифференциал с двумя полюсами второго порядка и нулевыми вычетами в этих точках можно задать в следующем виде

$$\tau_{\rho,Q_1^2 Q_2^2} = c_{-1}^{(2)} f_0(Q_1) \tau_{\rho,Q_1}^{(2)} - c_{-1}^{(1)} f_0(Q_2) \tau_{\rho,Q_2}^{(2)} - c_{-1}^{(1)} c_{-1}^{(2)} \tau_{\rho,Q_1 Q_2}.$$

Действительно, заметим, что главная часть для τ_{ρ,Q_1Q_2} в точке Q_1 имеет вид $\frac{f_0(Q_1)}{z-z_1}$ и в точке Q_2 имеет вид $-\frac{f_0(Q_2)}{z-z_2}$. Отсюда следует, что построенный выше дифференциал $\tau_{\rho,Q_1^2Q_2^2}$ имеет полюса второго порядка в Q_1 и Q_2, и нулевые вычеты в этих точках. В окрестности точки Q_1 его главная часть имеет вид

$$c_{-1}^{(2)} f_0(Q_1) \left[\frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{c_{-1}^{(1)}}{z-z_1} \right] - c_{-1}^{(1)} c_{-1}^{(2)} \frac{f_0(Q_1)}{z-z_1} = \frac{c_{-1}^{(2)} f_0(Q_1)}{(z-z_1)^2};$$

аналогично в точке Q_2 -

$$-c_{-1}^{(1)} f_0(Q_2) \left[\frac{1}{(z-z_2)^2} + \frac{c_{-1}^{(2)}}{z-z_2} \right] + c_{-1}^{(1)} c_{-1}^{(2)} \frac{f_0(Q_2)}{z-z_2} = -\frac{c_{-1}^{(1)} f_0(Q_2)}{(z-z_2)^2}.$$

Ясно, что построенный дифференциал $\tau_{\rho,Q_1^2Q_2^2}$ голоморфно зависит от $[\mu]$ и ρ. Таким образом доказана теорема.

Теорема 1.4.3. *Для любых различных точек Q_1 и Q_2 на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любого несущественного характера ρ существует дифференциал $\tau_{\rho,Q_1^2Q_2^2}$ второго рода с полюсами второго порядка в точках Q_1 и Q_2, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ, и имеющий нулевые вычеты в точках Q_1 и Q_2.*

Следствие 1.4.2. *Для любого несущественного характера ρ на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ в точках Q_1, которые являются нулями дифференциала df_0, существует диффе-*

ренциал $\tau^{(2)}_{\rho,Q_1}$ второго рода с единственным полюсом в точке Q_1, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ, и имеющий нулевой вычет в Q_1.

Следствие 1.4.3. *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ любой мероморфный 1-дифференциал τ для несущественного характера ρ представляется конечной суммой элементарных дифференциалов трех родов для ρ, которые голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства будем использовать главные части ряда Лорана некоторой ветви дифференциала τ в простых полюсах $Q_1, ..., Q_n$ и полюсах $R_1, ..., R_m$ порядков $\alpha_1, ..., \alpha_m$ соответственно. Рассмотрим абелев дифференциал

$$\frac{\tau}{f_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{-1}^{(j)}}{f_0(Q_j)}\tau_{Q_jP_0} - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-1}^{(k)}}{f_0(R_k)}\tau_{R_kP_0} - \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{\alpha_k} \frac{c_{-j}^{(k)}}{f_0(R_k)}\tau_{R_k}^{(j)} - \sum_{k=1}^{g} A_k\zeta_k,$$

где $A_k = \int\limits_{a_k} \frac{\tau}{f_0}, k = 1, ..., g,$ - a-периоды для абелева дифференциала $\frac{\tau}{f_0}$ и точка P_0 не совпадает с полюсами для τ. По теореме 1.1.3 о вычетах точка P_0 не является особой для первых двух сумм. Это выражение будет голоморфным абелевым дифференциалом с нулевыми a-периодами, а значит оно будет тождественно равно нулю на F_μ. Таким образом получаем, что верно равенство

$$\tau = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{-1}^{(j)}}{f_0(Q_j)}\tau_{Q_jP_0}f_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{-1}^{(k)}}{f_0(R_k)}\tau_{R_kP_0}f_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{g} A_k\zeta_k f_0 + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{\alpha_k} \frac{c_{-j}^{(k)}}{f_0(R_k)}\tau_{R_k}^{(j)} f_0$$

на F_μ. Следствие доказано.

Замечание 1.4.4. В следствиях 1.4.1 и 1.4.3 для любых мероморфных дифференциалов Прима с любым характером ρ получается единственное разложение по особым точкам и главным частям в них для некоторой его ветви на F_μ. В частности, при $\rho = 1$ получаем классическое разложение для абелевых мероморфных дифференциалов на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$. Напомним, что такое классическое разложение получалось только для фиксированной поверхности F [8; 15].

Теорема 1.4.4. *Любой мероморфный (ρ, q)-дифференциал ω единственно представляется как сумма конечного числа элементарных дифференциалов первого, второго и третьего рода для ρ на F_μ, голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ, при $q \geq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть ρ - существенный характер и $q \geq 1$ или ρ - несущественный характер и $q > 1$. Тогда дифференциал ω имеет единственный дивизор $\frac{Q_1...Q_s}{P_1...P_N} = D$, с учетом кратности, где $\deg D = (2g-2)q$. Запишем этот дивизор с учетом кратности полюсов $D = \frac{Q_1...Q_s}{P_1^{\alpha_1}...P_l^{\alpha_l}P_{l+1}...P_n}$. Рассмотрим (ρ, q)-дифференциал

$$\omega_0 = \omega - C_{-1,1}\tau^{(1)}_{\rho,q;P_1} - ... - C_{-\alpha_1,1}\tau^{(\alpha_1)}_{\rho,q;P_1} - ... - C_{-1,l}\tau^{(1)}_{\rho,q;P_l} - ... - C_{-\alpha_l,l}\tau^{(\alpha_l)}_{\rho,q;P_l} -$$

$$C_{-1,l+1}\tau_{\rho,q;P_{l+1}} - ... - C_{-1,n}\tau_{\rho,q;P_n}$$

и $\tau^{(m)}_{\rho,q;P} = (\frac{1}{z^m} + O(1))dz^q$ в $U(P), z(P) = 0, m \geq 1$, где коэффициенты $C_{-i,j}$ находятся из главных частей разложения в ряд Лорана некоторой фиксированной ветви дифференциала ω в проколотой окрестности точки P_j на F_μ. Тогда ω_0 голоморфный (ρ, q)-дифференциал для существенного ρ, и все элементарные дифференциалы, входящие в эту сумму имеют тот же характер ρ.

С другой стороны, $\omega_0 = \sum\limits_{j=1}^{d} C_j\zeta_j$, где $\zeta_1, ..., \zeta_d$ - базис с $d = g-1$ при $q = 1$ и $d = (2q-1)(g-1)$ при $q > 1$.

Таким образом, $\omega = \sum\limits_{j=1}^{l}\sum\limits_{i=1}^{\alpha_j} C_{-i,j}\tau^{(i)}_{\rho,q;P_j} + \sum\limits_{k=l+1}^{n} C_{-1,k}\tau_{\rho,q;P_k} + \sum\limits_{j=1}^{d} C_j\zeta_j$.

б) Пусть ρ - несущественный характер и $q = 1$. Поделим ω на (голоморфную) мультипликативную единицу f_0 для того же характера ρ.

Тогда $(\frac{\omega}{f_0}) \geq \frac{1}{P_1^{\alpha_1}...P_l^{\alpha_l}P_{l+1}...P_n}$, где $\frac{\omega}{f_0}$ - абелев 1-дифференциал на F_μ.

Рассмотрим разность

$$\omega_0 = \frac{\omega}{f_0} - (C_{-1,1}\tau_{P_0P_1} + C_{-2,1}\tau_{P_1}^{(2)} + ... + C_{-\alpha_1,1}\tau_{P_1}^{(\alpha_1)} + ...+$$

$$+C_{-1,l}\tau_{P_0P_l} + C_{-2,l}\tau_{P_l}^{(2)} + ... + C_{-\alpha_l,l}\tau_{P_l}^{(\alpha_l)}) + C_{-1,l+1}\tau_{P_0P_{l+1}} + ... + C_{-1,n}\tau_{P_0P_n},$$

где $\tau_{P_0P_j}$ - нормированные абелевы дифференциалы третьего рода, $j = 1, ..., n$ и $\tau_{P_k}^{(j)}$ - нормированные абелевы дифференциалы второго рода с единственным полюсом точно порядка $j \geq 2$ в точке P_k, а также $C_{j,k}$ - коэффициенты разложения в ряд Лорана в проколотой окрестности точки P_k при степенях $\frac{1}{z_k^j}$. Здесь $P_0 \neq P_1, ..., P_n$ не является особой точкой, так как вычет в ней равен 0 из-за выбора коэффициентов $C_{j,k}$ и по теореме о вычетах для абелевых дифференциалов. Здесь ω_0 - голоморфный абелев дифференциал и $\omega_0 = \sum\limits_{j=1}^{g} C_j\zeta_j$. Таким образом, ω разложили в сумму элементарных дифференциалов трех родов. Теорема доказана.

§1.5. Пространства мультипликативных функций с предписанными полюсами

Пусть ρ - существенный характер. Сделаем ряд замечаний о выборе нулей $P_1, ..., P_l$ и простых полюсов $Q_1, ..., Q_l$ мультипликативной функции f для ρ на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$. По теореме Абеля для характеров имеем равенство
$\varphi(D) = \sum\limits_{j=1}^{l}(\varphi(P_j) - \varphi(Q_j)) \equiv \psi(\rho)$, где $D = \frac{P_1...P_l}{Q_1...Q_l}$.

Если $l \geq g$, то полюса $Q_1, ..., Q_l$ и $l - g$ нулей $P_{g+1}, ..., P_l$ могут быть выбраны произвольно, но остальные g нулей $P_1, ..., P_g$ должны получаться из предыдущего равенства, причём единственным образом, если наложить дополнительные условия на выбор $Q_1, ..., Q_l, P_{g+1}, ..., P_l$. Более точно, переписывая предыдущее равенство в виде

$$\sum_{j=1}^{g}\varphi(P_j)=\psi(\rho)-\sum_{j=g+1}^{l}\varphi(P_j)+\sum_{j=1}^{l}\varphi(Q_j), \tag{6}$$

надо потребовать, чтобы правая часть этого равенства не принадлежала множеству W_g^1 в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. Действительно, так как имеем $2l-g(\geq g)$ произвольных точек, то правая сторона может быть всегда выбрана не принадлежащей W_g^1, в виду того, что $\dim_{\mathbf{C}} W_g^1 \leq g-2$. Следовательно задача обращения Якоби (6) имеет единственное решение $P_1...P_g \in F_g$ голоморфно зависящее от $[\mu]$ и ρ. Таким образом, общая мультипликативная функция f с $(f)=D$ и существенным характером ρ зависит от $2l-g+1$ комплексных параметров. Например, такую функцию, голоморфно зависящую от $[\mu]$ и ρ, можно записать в виде

$$f(P)=C\exp\left[\int_{P_0}^{P}\tau_{P_1Q_1}+...+\int_{P_0}^{P}\tau_{P_lQ_l}+\sum_{j=1}^{g}(\log\rho(A_j))\varphi_j(P)\right]. \tag{7}$$

Она будет иметь характер ρ, и содержит $2l-g+1$ произвольных параметров $Q_1,...,Q_l$, $P_{g+1},...,P_l, C$, если $P_1,...,P_g$ удовлетворяют уравнению (6). При этих условиях имеем равенства $1=r_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_g})=g-g+1+$
$+\,i_{\rho^{-1}}(Q_1...Q_g)$ и $i_{\rho^{-1}}(Q_1...Q_g)=0$. Из неравенства для дивизоров $Q_1...Q_{g+r}\geq Q_1...Q_g$ следует, что $0\leq i_{\rho^{-1}}(Q_1...Q_{g+r})\leq i_{\rho^{-1}}(Q_1...Q_g)=0$. Отсюда $r_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_{g+r}})=1+r$. Для формулировки следующей теоремы обозначим через $L_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_{g+r}},F_\mu)$ векторное пространство функций f на F_μ для ρ с дивизором $(f)\geq\frac{1}{Q_1...Q_{g+r}}$. Таким образом доказана теорема.

Теорема 1.5.1. *Векторное расслоение* $\bigcup\limits_{[\mu],\rho} L_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_{g+r}},F_\mu)$ *будет голоморфным векторным расслоением ранга* $r+1$ *над* $\mathbf{T}_g\times(Hom\ (\Gamma,\mathbf{C}^*)\setminus L_g)$ *для любого* $g\geq 2, r\geq 0$ *и любого дивизора* $Q_1[\mu]...Q_{g+r}[\mu]$ *степени* $g+r$*, локально голоморфно зависящего от* $[\mu]$*, такого, что правая часть в (6) не принадлежит* W_g^1 *в* $J(F_\mu)$.

Замечание 1.5.1. Если $0 < l < g$ и ρ - существенный характер, т. е. $\psi(\rho) \neq 0$, то уравнение $\varphi(P_1...P_l) = \varphi(Q_1...Q_l) + \psi(\rho) = a$ разрешимо в $J(F_\mu)$, т. е. существует функция f с $(f) = \frac{P_1...P_l}{Q_1...Q_l}$, если и только если $a \in W_l = \varphi(F_l)$. По-другому, последнее условие равносильно следующему условию $a \in W_l \cap (W_l + \psi(\rho))$. Описание этого пересечения дано в [10]. Поэтому только при таком условии существуют функции f с $(f) = \frac{P_1...P_l}{Q_1...Q_l}$ с предписанными полюсами при $0 < l < g$.

Для несущественного характера ρ мультипликативная функция f с $(f) = D = \frac{P_1...P_{g+r}}{Q_1...Q_{g+r}}$ на F_μ имеет вид $f(P) = (\exp(\lambda_1\varphi_1(P) + ... + \lambda_g\varphi_g(P)) \cdot$ $\cdot R(P) = f_0(P)R(P)$, где $\lambda_j = \log \rho(a_j), j = 1, ..., g$, R - однозначная мероморфная функция на F_μ с дивизором $(R) = D$. Поэтому $r_\rho(D) = r(D)$.

Пусть $g + r > 2g - 2$, тогда $i(Q_1...Q_{g+r}) = 0$ и $r(\frac{1}{Q_1...Q_{g+r}}) = r + 1$. При этом по классической теореме Абеля существует R на F_μ с такими условиями, если и только если $\varphi(D) = 0$ в $J(F_\mu)$. Последнее условие можно переписать в виде

$$\varphi(P_1...P_g) = \varphi(Q_1...Q_{g+r}) - \varphi(P_{g+1}...P_{g+r}), \tag{8}$$

как равенство в многообразии Якоби. Проблема обращения Якоби однозначно разрешима, поскольку при этих условиях правая часть в последнем уравнении может быть выбрана не принадлежащей $W_g^1(F_\mu)$.

Если дополнительно выбрать $Q_1, ..., Q_{g+r}, P_{g+1}, ..., P_{g+r}$ голоморфно зависящими от $[\mu]$, то получаем единственное решение $P_1...P_g$ тоже голоморфно зависящее от $[\mu]$ и ρ. Таким образом доказали теорему.

Теорема 1.5.2. *Векторное расслоение* $\bigcup\limits_{[\mu],\rho} L_\rho(\frac{1}{Q_1...Q_{g+r}}, F_\mu)$ *будет голоморфным векторным расслоением ранга* $r+1$ *над* $\mathbf{T}_g \times L_g$ *для любого* $g \geq 2, r > g-2$ *и любого дивизора* $Q_1[\mu]...Q_{g+r}[\mu]$ *степени* $g+r$, *локаль-*

но голоморфно зависящего от $[\mu]$, такого, что правая часть в (8) не принадлежит W_g^1 в $J(F_\mu)$.

§1.6. Аналог формулы Аппеля разложения мультипликативной функции на переменной компактной римановой поверхности

В этом параграфе будет найден аналог формулы Аппеля, в которой простые элементы (слагаемые) имеют полюса только в одной точке на F_μ [12].

Пусть f - мультипликативная функция на F_μ для существенного характера ρ с s простыми полюсами $Q_1, Q_2, ..., Q_s$ и вычетами $c_1, ..., c_s$ в них соответственно для некоторой ее ветви. Рассмотрим выражение

$$f_1 = f - c_1 T^{(1)}_{\rho,Q_1} - ... - c_s T^{(1)}_{\rho,Q_s},$$

где $T^{(1)}_{\rho,Q_k}(z) = -\int \tau^{(2)}_{\rho,Q_k}$ - элементарный интеграл Прима второго рода для ρ с единственным простым полюсом в Q_k и вычетом $+1$ в Q_k, который голоморфно зависит от $[\mu]$ и ρ. Тогда f_1 - однозначная аналитическая ветвь интеграла Прима с существенным характером ρ на фундаментальном многоугольнике $\triangle_\mu$. Отсюда

$$f = \sum_{j=1}^{s} c_j T^{(1)}_{\rho,Q_j} + \sum_{j=1}^{g-1} C_j \int \tilde{\zeta}_j,$$

где $C_j \in \mathbf{C}$, $j = 1, ..., g-1$, и $\tilde{\zeta}_1, ..., \tilde{\zeta}_{g-1}$ - базис дифференциалов Прима первого рода для существенного характера ρ на F_μ, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ [10].

Если Q_1 - полюс порядка $n_1, n_1 \geq 2$, то в предыдущей формуле надо слагаемое $c_1 T^{(1)}_{\rho,Q_1}$ заменить на сумму вида

$$A_{11} T^{(1)}_{\rho,Q_1} + A_{12} \frac{\partial T^{(1)}_{\rho,Q_1}}{\partial Q_1} + \frac{A_{13}}{2} \frac{\partial^2 T^{(1)}_{\rho,Q_1}}{\partial Q_1^2} + ... + \frac{A_{1,n_1}}{(n_1-1)!} \frac{\partial^{n_1-1} T^{(1)}_{\rho,Q_1}}{\partial Q_1^{n_1-1}},$$

где A_{1j} - коэффициенты в главной части ряда Лорана для некоторой ветви функции f в точке $Q_1, j = 1, ..., n_1(Q_1)$. Действительно, проведем вычисления и введем обозначения: в окрестности точки Q_k имеем разложения $\Pi_{\rho,Q_k}(z) = \int \tau_{\rho,Q_k} = \ln(z - z(Q_k)) + O(1)$; $T^{(1)}_{\rho,Q_k} = \frac{1}{z-z(Q_k)} + O(1)$; $(T^{(1)}_{\rho,Q_k})'_{a_k} = \frac{1}{(z-a_k)^2} + O(1)$, $z(Q_k) = a_k; ...; (T^{(1)}_{\rho,Q_k})^{(m)}_{a_k} = \frac{m!}{(z-a_k)^{m+1}} + O(1)$, $1 \le m \le n_k(Q_k) - 1$, где $n_k(Q_k)$ - порядок полюса в точке Q_k для f, $k = 1, ..., s$. Отсюда следует

Теорема 1.6.1. *Пусть f - ветвь мультипликативной функции для существенного характера ρ на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \ge 2$ с логарифмическими особыми точками $Q_1, ..., Q_r$ и логарифмическими вычетами $c_1, ..., c_r$ в них, простыми полюсами $Q_{r+1}, ..., Q_l$ и вычетами $c_{r+1}, ..., c_l$ в них, и полюсами в $Q_{l+1}, ..., Q_s$ кратностей $n_{l+1}, ..., n_s, n_k \ge 2, k = l+1, ..., s$, с заданными главными частями в них соответственно. Тогда*

$$f = \sum_{j=1}^{r} c_j \Pi_{\rho,Q_j} + \sum_{j=r+1}^{l} c_j T^{(1)}_{\rho,Q_j} +$$

$$+ \sum_{k=l+1}^{s} \left[A_{k,1} T^{(1)}_{\rho,Q_k} + A_{k,2} \frac{\partial T^{(1)}_{\rho,Q_k}}{\partial Q_k} + \frac{A_{k,3}}{2!} \frac{\partial^2 T^{(1)}_{\rho,Q_k}}{\partial Q_k^2} + ... + \frac{A_{k,n_k}}{(n_k - 1)!} \frac{\partial^{n_k - 1} T^{(1)}_{\rho,Q_k}}{\partial Q_k^{n_k - 1}} \right] +$$

$$+ C_1 \int \tilde{\zeta}_1 + ... + C_{g-1} \int \tilde{\zeta}_{g-1},$$

где $f = \frac{A_{k,n_k}}{(z-z(Q_k))^{n_k}} + ... + \frac{A_{k,2}}{(z-z(Q_k))^2} + \frac{A_{k,1}}{z-z(Q_k)} + O(1)$ для некоторой ветви в проколотой окрестности Q_k, $k = l+1, ..., s$ на F_μ, и все слагаемые голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.

Пусть теперь ρ - несущественный характер. Доказательство предыдущей формулы разложения для существенного характера не применимо, так как в этом случае не существует интеграла Прима второго рода с одним единственным простым полюсом на F_μ. В этом случае надо использовать в качестве простых элементов разложения интегралы Прима $T_{\rho,Q_1Q_2} = \int\limits_{Q_0}^{P} \tau_{\rho,Q_1^2Q_2^2}$ второго рода с двумя простыми полюсами Q_1 и Q_2, и главными частями $-\frac{c_{-1}^{(2)}f_0(Q_1)}{z-z(Q_1)}$ и $\frac{c_{-1}^{(1)}f_0(Q_2)}{z-z(Q_2)}$ в них соответственно.

Теорема 1.6.2. *Для ветви мультипликативной функции f с несущественным характером ρ и попарно различными простыми полюсами $Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $c_1, ..., c_s$ в них соответственно на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ верна формула разложения*

$$f(P) = \sum_{r=1}^{s-1} \frac{c_r}{d_s f_0(Q_r)} T_{\rho,Q_sQ_r} + C_1 \int\limits_{Q_0}^{P} f_0\zeta_1 + ... + C_g \int\limits_{Q_0}^{P} f_0\zeta_g + C,$$

где $C = 0$ при $\rho \neq 1$, $d_k = \sum\limits_{j=1}^{g} \lambda_j \varphi_j'(Q_k), k = 1, ..., s,$ на F_μ, и все слагаемые голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить совпадение главных частей слева и справа в этой формуле. Для окрестности точки Q_r имеем разложение в ряд Лорана

$$\sum_{r=1}^{s-1} \left(\frac{d_s f_0(Q_r)}{z - Q_r} - \frac{d_r f_0(Q_s)}{z - Q_s} \right) \frac{c_r}{d_s f_0(Q_r)} = \frac{c_r}{z - Q_r} + ...,$$

$r = 1, ..., s-1$. Для окрестности точки Q_s имеем разложение

$$\sum_{r=1}^{s-1} \frac{-d_r f_0(Q_s)}{z - Q_s} \frac{c_r}{d_s f_0(Q_r)} = \frac{1}{z - Q_s} \frac{f_0(Q_s)}{d_s} \sum_{r=1}^{s-1} \frac{-d_r c_r}{f_0(Q_r)} + ... = \frac{c_s}{z - Q_s} + ...,$$

так как

$$\sum_{r=1}^{s} \frac{-c_r d_r}{f_0(Q_r)} = 0, \frac{f_0(Q_s)}{d_s} \sum_{r=1}^{s-1} \frac{-d_r c_r}{f_0(Q_r)} = c_s,$$

по формуле о полной сумме вычетов для абелева дифференциала $\frac{f}{f_0} d\left(\sum\limits_{j=1}^{g} \lambda_j \varphi_j\right)$ третьего рода на F_μ, который в точке Q_k имеет вычет $\frac{c_k d_k}{f_0(Q_k)}, k = 1, ..., s$. Теорема доказана.

Глава 2.

Билинейные соотношения для периодов дифференциалов Прима на римановой поверхности

Известно, что билинейные соотношения Римана для периодов абелевых дифференциалов играют большую роль в геометрической теории функций на фиксированной компактной римановой поверхности [4; 7; 8; 11; 15].

Цель второй главы – найти все основные соотношения на периоды и виды билинейных соотношений между периодами элементарных дифференциалов Прима трех родов на переменной компактной римановой поверхности для любых характеров.

§2.1. Основное соотношение на периоды голоморфного дифференциала Прима

Обозначим через $Z^1(\Gamma, \rho)$ для $\rho \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma \to \mathbf{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T), S, T \in \Gamma$[19]. Пусть ϕ – замкнутый дифференциал Прима на F_0 для ρ. Проинтегрировав этот дифференциал от фиксированной точки z_0 до $z \in U$, получим, что $f(Tz) - f(Tz_0) = \rho(T)(f(z) - f(z_0))$, где $\phi = df(z), z \in U$, $f(z)$ – интеграл Прима на круге U для дифференциала Прима ϕ, определенный с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T \in \Gamma$ верно равенство $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi_{f,z_0}(T)$, где $\phi_{f,z_0}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$. Таким образом, каждому $T \in \Gamma$ соответствует число $\phi_{f,z_0}(T)$, а значит, определено отображение $\phi_{f,z_0} : \Gamma \to \mathbf{C}$, которое называется отображением периодов для ϕ. Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на U и базисной точки z_0. Если $f_1(z) = f(z)+c$ - другой интеграл Прима для того же дифференциала Прима ϕ, то $\phi_{f_1,z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) + c\sigma(T), T \in \Gamma$, где $\sigma(T) = = 1 - \rho(T), T \in \Gamma$. Легко проверить, что оба отображения ϕ_{f,z_0} и ϕ_{f_1,z_0} удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma$.

Для замкнутого дифференциала Прима ϕ можно определить, так называемые, классические периоды. Для $T \in \Gamma$ соответствующий ему классический период $\phi_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0} \phi$ и верно равенство $\phi_{z_0}(T) = \phi_{f,z_0}(T) - - f(z_0)\sigma(T)$ [8; 15; 10; 11].

Следовательно, отображения вида $T \to \phi_{f,z_0}(T)$ (периоды по Р. Ганнингу) и вида $T \to \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho) = Z^1(\Gamma, \rho)/B^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F_0 для ρ, где пространство $B^1(\Gamma, \rho)$ порождено элементом $\sigma(T)$ для ρ на Γ.

В работе П.Аппеля [12] используется каноническое рассечение специального вида для фиксированной компактной поверхности F рода $g \geq 2$. Это рассечение показано на рисунке 1 для поверхности рода $g = 3$.

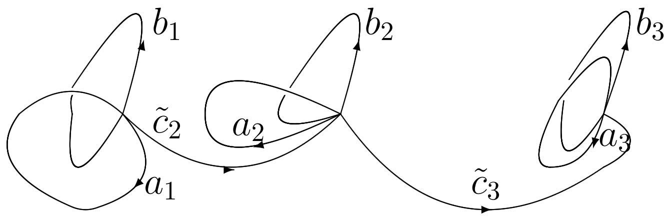

*Рис.*1

В дальнейшем будем считать, что кривые $a_k, b_k, k = 1, ..., g$, и $\tilde{c}_h, h = 2, ..., g$, фиксированны на гладкой поверхности F. Дадим вывод основного соотношения Аппеля для периодов дифференциала Прима в современных терминах Ганнинга, связанных с аналитическим продолжением ростков дифференциала Прима по петлям a_k, b_k и периодов по

Ганнингу $\phi(a_k), \phi(b_k), k = 1, ..., g$. Так, например, вместо термина скачок при переходе через разрез по кривой в терминах Аппеля будем говорить об аналитическом продолжении по "трансверсальной" кривой. Термин модуль периодичности интеграла Прима по Аппелю заменяем термином: либо классический период, либо когомологический период по Ганнингу. Число пересечения $(a_k, b_k) = +1$, так как упорядоченная пара петель $a_k, b_k, k = 1, ..., g$, соответствует положительной ориентации. Проведя такое каноническое рассечение для переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$, получим односвязную область $\mathcal{F}_\mu = \mathcal{F}_{\mu,a,b,\tilde{c}}$. Пусть $\phi = \phi(z)dz$ – голоморфный дифференциал Прима на F_μ с характером ρ, который задаётся мультипликаторами $\rho(a_k), \rho(b_k), k = 1, ..., g$. Дифференциал $\phi = \phi(z)dz$, поднятый на фундаментальную область $\Delta_\mu = w^\mu(\Delta)$ группы Γ_μ, будет точным и представляется в виде $\phi(z)dz = df(z)$. Для некоторого фиксированного интеграла Прима $f(z)$ имеем равенства $f(z^-) - \frac{1}{\rho(b_k)} f(z^+) = -\frac{\phi(b_k)}{\rho(b_k)}$ на краях разреза a_k; $f(z^-) - \rho(a_k) f(z^+) = \phi(a_k)$ на краях разреза $b_k, k = 1, ..., g$. Здесь через $\phi(a_k)$ и $\phi(b_k)$ обозначим a_k-период (по Ганнингу при аналитическом продолжении по a_k или модуль периодичности интеграла f при переходе через края разреза b_k с + на - в терминологии Аппеля) и b_k-период относительно выбранного интеграла Прима $f(z)$ для дифференциала Прима $\phi = \phi(z)dz$ на F_μ при аналитическом продолжении по петле a_k и b_k соответственно. Причем символы z^- и z^+ означают отрицательные и положительные края разрезов a_k и $b_k, k = 1, ..., g$, соответственно. На краях разрезов $\tilde{c}_h, h = 2, ..., g$, имеем равенства $f(z^-) - f(z^+) = \phi(\tilde{c}_h)$. Таким образом, для интеграла Прима $f(z)$ первого рода имеется $3g-1$ основных периодов (по Ганнингу) $\phi(a_1), ..., \phi(a_g), \phi(b_1), ..., \phi(b_g), \phi(\tilde{c}_2), ..., \phi(\tilde{c}_g)$.

Рассмотрим окрестность точки пересечения кривых $a_k, b_k, \tilde{c}_k$ и $\tilde{c}_{k+1}$, и обозначения, как на рисунке 2.

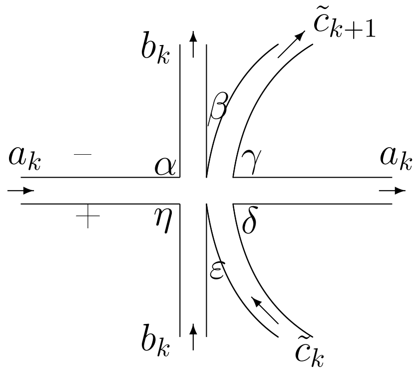

Рис.2

Тогда получаем следующие равенства: $f(\alpha)^- - \rho(a_k)f(\beta)^+ = \phi(a_k)$ – период при аналитическом продолжении по a_k или период соответствующий скачку при пересечении b_k с $+$ на -; $f(\beta)^- - f(\gamma)^+ = \phi(\tilde{c}_{k+1})$ – скачок при переходе через разрез $\tilde{c}_{k+1}$; $f(\gamma)^- - \frac{1}{\rho(b_k)}f(\delta)^+ = -\frac{\phi(b_k)}{\rho(b_k)}$ – период при продолжении по петле b_k или период соответствующий скачку при пересечении разреза a_k с $+$ на -; $f(\varepsilon)^- - f(\delta)^+ = \phi(\tilde{c}_k)$ – период соответствующий скачку при переходе через разрез $\tilde{c}_k$; $f(\eta)^- - \rho(a_k)f(\varepsilon)^+ = \phi(a_k)$ – период при продолжении по a_k или период соответствующий скачку при пересечении b_k с $+$ на -; $f(\alpha)^- - \frac{1}{\rho(b_k)}f(\eta)^+ = -\frac{\phi(b_k)}{\rho(b_k)}$ – период при аналитическом продолжении по b_k или период соответствующий скачку при пересечении a_k с $+$ на -.

Умножая эти равенства: первое на 1, второе на $\rho(a_k)$, третье на $\rho(a_k)$, четвертое на $-\frac{\rho(a_k)}{\rho(b_k)}$, пятое на $-\frac{1}{\rho(b_k)}$, и последнее на -1, имеем следующие другие равенства

$$f(\alpha) - \rho(a_k)f(\beta) = \phi(a_k),$$

$$\rho(a_k)f(\beta) - \rho(a_k)f(\gamma) = \rho(a_k)\phi(\tilde{c}_{k+1}),$$

$$\rho(a_k)f(\gamma) - \frac{\rho(a_k)}{\rho(b_k)}f(\delta) = -\frac{\rho(a_k)}{\rho(b_k)}\phi(b_k),$$

$$-\frac{\rho(a_k)}{\rho(b_k)}f(\varepsilon) + \frac{\rho(a_k)}{\rho(b_k)}f(\delta) = -\frac{\rho(a_k)}{\rho(b_k)}\phi(\tilde{c}_k),$$

$$-\frac{1}{\rho(b_k)}f(\eta)+\frac{\rho(a_k)}{\rho(b_k)}f(\varepsilon)=-\frac{1}{\rho(b_k)}\phi(a_k),$$
$$-f(\alpha)+\frac{1}{\rho(b_k)}f(\eta)=\frac{1}{\rho(b_k)}\phi(b_k).$$

Складывая все эти равенства, получим равенства

$$0=\frac{\phi(b_k)\sigma(a_k)-\phi(a_k)\sigma(b_k)}{\rho(b_k)}-\frac{\rho(a_k)}{\rho(b_k)}\phi(\tilde{c}_k)+\rho(a_k)\phi(\tilde{c}_{k+1}),$$

$k=1,...,g$. Здесь нет кривых $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_{g+1}$ и потому считаем для удобства $\phi(\tilde{c}_1)=0=\phi(\tilde{c}_{g+1})$. Исключая $g-1$ константу $\phi(\tilde{c}_2),...,\phi(\tilde{c}_g)$ из этих g уравнений, получим одно соотношение между $\phi(a_k),\phi(b_k)$ и мультипликаторами $\rho(a_k),\rho(b_k),k=1,...,g$. Действительно, если умножим первое на $\frac{\rho(b_1)}{\rho(a_1)}$, второе – на $\frac{\rho(b_1)\rho(b_2)}{\rho(a_2)}$, третье – на $\frac{\rho(b_1)\rho(b_2)\rho(b_3)}{\rho(a_3)}$, k-е – на $\frac{\rho(b_1)\cdots\rho(b_k)}{\rho(a_k)}$, $k\le g$, то имеем систему

$$\frac{\phi(b_1)\sigma(a_1)-\phi(a_1)\sigma(b_1)}{\rho(a_1)}+\rho(b_1)\phi(\tilde{c}_2)=0,$$
$$\frac{\phi(b_2)\sigma(a_2)-\phi(a_2)\sigma(b_2)}{\rho(a_2)}\rho(b_1)-\rho(b_1)\phi(\tilde{c}_2)+\rho(b_1)\rho(b_2)\phi(\tilde{c}_3)=0,$$
$$\frac{\phi(b_3)\sigma(a_3)-\phi(a_3)\sigma(b_3)}{\rho(a_3)}\rho(b_1)\rho(b_2)-\rho(b_1)\rho(b_2)\phi(\tilde{c}_3)+\rho(b_1)\rho(b_2)\rho(b_3)\phi(\tilde{c}_4)=0,$$
$$...$$
$$\frac{\phi(b_g)\sigma(a_g)-\phi(a_g)\sigma(b_g)}{\rho(a_g)}\rho(b_1)\cdots\rho(b_{g-1})-\rho(b_1)\cdots\rho(b_{g-1})\phi(\tilde{c}_g)=0.$$

Следовательно получим равенство

$$\frac{\phi(b_g)\sigma(a_g)-\phi(a_g)\sigma(b_g)}{\rho(a_g)}\rho(b_1)\cdots\rho(b_{g-1})+$$
$$+\frac{\phi(b_{g-1})\sigma(a_{g-1})-\phi(a_{g-1})\sigma(b_{g-1})}{\rho(a_{g-1})}\rho(b_1)\cdots\rho(b_{g-2})+\cdots+$$
$$+\frac{\phi(b_2)\sigma(a_2)-\phi(a_2)\sigma(b_2)}{\rho(a_2)}\rho(b_1)+\frac{\phi(b_1)\sigma(a_1)-\phi(a_1)\sigma(b_1)}{\rho(a_1)}=0.$$

Таким образом доказали, в современных терминах периодов Ганнинга и для переменных компактных римановых поверхностей, следующую теорему.

Теорема 2.1.1. *Для периодов голоморфного дифференциала Прима ϕ с характером $\rho \neq 1$ на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$, верно равенство*

$$\sum_{k=1}^{g} \frac{\phi(b_k)\sigma(a_k) - \phi(a_k)\sigma(b_k)}{\rho(a_k)} \rho(b_1) \cdots \rho(b_{k-1}) = 0. \qquad (1)$$

Это есть основное (и единственное) соотношение Аппеля [12] на периоды Ганнинга любого голоморфного дифференциала Прима. Заметим, что в абелевом случае $\rho(a_k) = 1 = \rho(b_k), k = 1, ..., g$, это уравнение будет тождеством вида $0 = 0$ для F.

В случае канонического рассечения выходящего из одной точки на F, т. е. все кривые $\tilde{c}_h, h = 2, ..., g$, становятся точечными кривыми, имеем также только одно соотношение между периодами голоморфного дифференциала Прима.

После этого перевода на современную терминологию стало возможно сравнение основного соотношения между периодами по Аппелю и по Ганнингу. Заметим, что основное соотношение Аппеля доказано для голоморфных дифференциалов, а основное соотношение Ганнинга доказано для более общего класса замкнутых гладких и, в частности, гармонических дифференциалов при любых характерах на фиксированной компактной римановой поверхности. В работе Р. Ганнинга [19] и в книге [10], с помощью соотношений для квазифуксовой группы Γ_μ, которая униформизирует F_μ в односвязной области $w^\mu(U)$, получено другое соотношение.

Предложение 2.1.1 [12; 19]. *Для класса $[\phi]$ периодов замкнутого дифференциала Прима ϕ для $\rho \neq 1$ на переменной компактной римано-*

вой поверхности F_μ рода $g \geq 2$, верно равенство

$$\sum_{k=1}^{g} \phi(B_k)\sigma(A_k) - \phi(A_k)\sigma(B_k) = 0 \qquad (2)$$

Это следует из соотношения $C_1 \dots C_g = 1$ в Γ_μ и $\phi(1) = 0$, так как $0 = \phi(1) = \sum\limits_{j=1}^{g} \phi(C_k) = \sum\limits_{k=1}^{g} \sigma(A_k)\phi(B_k) - \sigma(B_k)\phi(A_k)$.

Предложение 2.1.2. *Соотношения Аппеля и Ганнинга эквивалентны для голоморфных дифференциалов Прима при любом характере $\rho \neq 1$ на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $1-\rho(A_k) = \sigma(A_k),\ 1-\rho(B_k) = \sigma(B_k)$ для $k = 1, ..., g$. Для равенства Аппеля рассмотрим замену переменных

$$\tilde{\phi}(A_1) = \frac{1}{\rho(A_1)}\phi(A_1), \tilde{\phi}(B_1) = \frac{1}{\rho(A_1)}\phi(B_1),$$

$$...$$

$$\tilde{\phi}(A_k) = \frac{\rho(B_1...B_{k-1})}{\rho(A_k)}\phi(A_k), \tilde{\phi}(B_k) = \frac{\rho(B_1...B_{k-1})}{\rho(A_k)}\phi(B_k),$$

$$...$$

$$\tilde{\phi}(A_g) = \frac{\rho(B_1...B_{g-1})}{\rho(A_g)}\phi(A_g), \tilde{\phi}(B_g) = \frac{\rho(B_1...B_{g-1})}{\rho(A_g)}\phi(B_g).$$

Из вида блочно диагональной матрицы этой замены следует, что ее определитель

$$\frac{1}{\rho(A_1)^2}...\frac{\rho(B_1...B_{k-1})^2}{\rho(A_k)^2}...\frac{\rho(B_1...B_{g-1})^2}{\rho(A_g)^2} \neq 0.$$

Поэтому эта матрица невырожденная. После замены формула Аппеля примет следующий вид $\sum\limits_{k=1}^{g}(\tilde{\phi}(B_k)\sigma(A_k) - \tilde{\phi}(A_k)\sigma(B_k)) = 0$. Предложение доказано.

§2.2. Билинейные соотношения для периодов дифференциалов Прима первого рода

В этом параграфе выводятся билинейные соотношения между периодами Ганнинга двух дифференциалов Прима первого рода со взаимно обратными характерами на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$. Это соотношение будет обобщением билинейного соотношения Римана для периодов абелевых дифференциалов первого рода на мультипликативный случай [15; 11].

Пусть $f(z)$ - интеграл Прима первого рода с мультипликаторами $\rho(a_k)$, $\rho(b_k)$ и периодами $\phi(a_k), \phi(b_k), \phi(\tilde{c}_h), k = 1, ..., g, h = 2, ..., g$, для дифференциала Прима $\phi = \phi(z)dz = df(z)$ на F_μ. Также пусть $f_1(z)$ - интеграл Прима первого рода с мультипликаторами $\rho_1(a_k)$, $\rho_1(b_k)$, и периодами $\phi_1(a_k), \phi_1(b_k), \phi_1(\tilde{c}_h), k = 1, ..., g, h = 2, ..., g$, для дифференциала Прима $\phi_1 = \phi_1(z)dz = df_1(z)$ на F_μ. Так как дифференциал $f_1(z)\phi(z)dz$ будет однозначным аналитическим на Δ_μ, то по теореме Коши интеграл

$$0 = I = \iint\limits_{\Delta_\mu} \phi_1 \wedge \phi = \int\limits_{\partial\Delta_\mu} f_1(z)df(z) = \sum_{k=1}^{g}\Bigg(\int\limits_{a_k}[f_1(\lambda)df(\lambda) - f_1(\varrho)df(\varrho)] +$$

$$+ \int\limits_{b_k}[f_1(\lambda)df(\lambda) - f_1(\varrho)df(\varrho)]\Bigg) + \sum_{h=2}^{g}\int\limits_{\tilde{c}_h}[f_1(\lambda)df(\lambda) - f_1(\varrho)df(\varrho)].$$

На краях разреза по кривой a_k (или при аналитическом продолжении по петле b_k^{-1}) имеем равенства

$$f_1(\lambda) = \frac{1}{\rho_1(b_k)}f_1(\varrho) - \phi_1(b_k)\frac{1}{\rho_1(b_k)}, \quad f(\lambda) = \frac{1}{\rho(b_k)}f(\varrho) - \frac{\phi(b_k)}{\rho(b_k)},$$

и

$$f_1(\lambda)df(\lambda) - f_1(\varrho)df(\varrho) = \left(\frac{1}{\rho_1(b_k)}f_1(\varrho) - \phi_1(b_k)\frac{1}{\rho_1(b_k)}\right)df(\lambda) - f_1(\varrho)df(\varrho) =$$

$$= \frac{1}{\rho_1(b_k)}f_1(\varrho)df(\lambda) - \phi_1(b_k)\frac{1}{\rho_1(b_k)}df(\lambda) - f_1(\varrho)df(\varrho) =$$

$$= -\frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)} df(\lambda) + \left(\frac{1}{\rho(b_k)} \frac{1}{\rho_1(b_k)} - 1\right) f_1(\varrho) df(\varrho) = -\frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)} df(\lambda), k = 1, ..., g.$$

Аналогично для b_k (или при аналитическом продолжении по петле a_k) имеем равенства

$$f_1(\lambda) = \frac{1}{\rho(a_k)} f_1(\varrho) + \phi_1(a_k), f(\lambda) = \rho(a_k) f(\varrho) + \phi(a_k),$$

и

$$f_1(\lambda) df(\lambda) - f_1(\varrho) df(\varrho) = \phi_1(a_k) df(\lambda), k = 1, ..., g.$$

Также для краев разреза $\tilde{c}_h$ имеем равенство

$$f_1(\lambda) = f_1(\varrho) + \phi_1(\tilde{c}_h), f(\lambda) = f(\varrho) + \phi(\tilde{c}_h),$$

и

$$f_1(\lambda) df(\lambda) - f_1(\varrho) df(\varrho) = \phi_1(\tilde{c}_h) df(\lambda), h = 2, ..., g.$$

Таким образом получаем

$$I = \sum_{k=1}^{g} \left[-\frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)} \int_{a_k} df(\lambda) + \phi_1(a_k) \int_{b_k} df(\lambda) \right] + \sum_{h=2}^{g} \phi_1(\tilde{c}_h) \int_{\tilde{c}_h} df(\lambda).$$

Для продолжения вычислений нужно ввести новые обозначения, связанные с точками пересечения кривых: $(a_k, b_k, \tilde{c}_k, \tilde{c}_{k+1})$; $(a_{k-1}, b_{k-1}, \tilde{c}_{k-1}, \tilde{c}_k)$; $(a_{k+1}, b_{k+1}, \tilde{c}_{k+1}, \tilde{c}_{k+2})$. Эти обозначения показаны на рисунке 3.

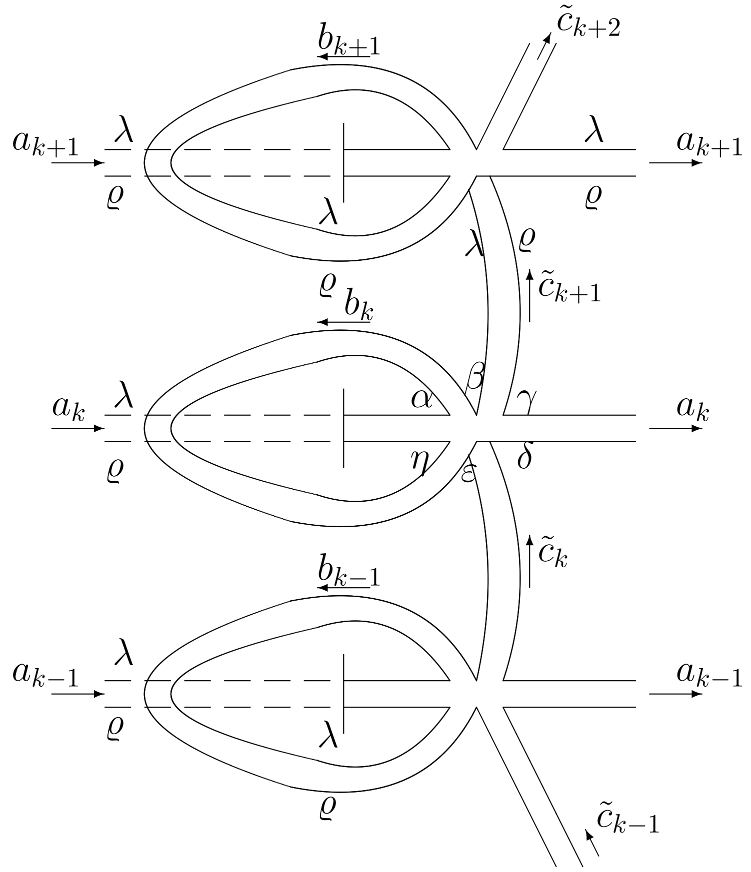

*Рис.*3

Обозначим через $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta\}$, $\{\alpha^{'}, \beta^{'}, \gamma^{'}, \delta^{'}, \varepsilon^{'}, \eta^{'}\}$ и $\{\alpha^{''}, \beta^{''}, \gamma^{''}, \delta^{''}, \varepsilon^{''}, \eta^{''}\}$ наборы краёв разрезов, которые связаны с точками пересечения кривых $(a_k, b_k, \tilde{c}_k, \tilde{c}_{k+1})$, $(a_{k-1}, b_{k-1}, \tilde{c}_{k-1}, \tilde{c}_k)$ и $(a_{k+1}, b_{k+1}, \tilde{c}_{k+1}, \tilde{c}_{k+2})$ соответственно. Согласно этим обозначениям имеем равенства

$$\int\limits_{a_k} df(\lambda) = f(\alpha) - f(\gamma), \int\limits_{b_k} df(\lambda) = f(\eta) - f(\alpha),$$

$$\int\limits_{\tilde{c}_k} df(\lambda) = f(\varepsilon) - f(\beta^{'}), \int\limits_{\tilde{c}_{k+1}} df(\lambda) = f(\varepsilon^{''}) - f(\beta), k = 1, ..., g.$$

Разобьём I на g слагаемых I_k, каждое из которых связано с точкой пересечения $(a_k, b_k, \tilde{c}_k, \tilde{c}_{k+1})$, а значит, $I = \sum\limits_{k=1}^{g} I_k$. Тогда

$$I_k = -\rho(b_k)\phi_1(b_k)[f(\alpha) - f(\gamma)] + \phi_1(a_k)[f(\eta) - f(\alpha)] +$$

$$+\phi_1(\tilde{c}_k)f(\varepsilon) - \phi_1(\tilde{c}_{k+1})f(\beta).$$

Из соотношений для интеграла Прима $f(z)$ имеем

$$f(\alpha) = \rho(a_k)f(\beta) + \phi(a_k), f(\beta) = f(\gamma) + \phi(\tilde{c}_{k+1}),$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\rho(b_k)}f(\eta) - \frac{\phi(b_k)}{\rho(b_k)}, f(\eta) = \rho(a_k)f(\varepsilon) + \phi(a_k).$$

Из этих равенств видно, что $f(\beta), f(\gamma), f(\varepsilon), f(\eta)$ выражаются через $f(\alpha)$. Учтя $\rho(b_k) = \frac{1}{\rho_1(b_k)}, \rho(a_k) = \frac{1}{\rho_1(a_k)}, k = 1, ..., g$, получим, что

$$f(\beta) = \frac{1}{\rho(a_k)}f(\alpha) - \frac{1}{\rho(a_k)}\phi(a_k) = \rho_1(a_k)f(\alpha) - \rho_1(a_k)\phi(a_k),$$

$$f(\gamma) = \frac{1}{\rho(a_k)}f(\alpha) - \frac{1}{\rho(a_k)}\phi(a_k) - \phi(\tilde{c}_{k+1}) =$$

$$= \rho_1(a_k)f(\alpha) - \rho_1(a_k)\phi(a_k) - \phi(\tilde{c}_{k+1}),$$

$$f(\eta) = \frac{1}{\rho_1(b_k)}f(\alpha) - \frac{1}{\rho_1(b_k)}\left(- \frac{\phi(b_k)}{\rho(b_k)}\right) = \frac{1}{\rho_1(b_k)}f(\alpha) + \phi(b_k),$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\rho_1(b_k)}\rho_1(a_k)f(\alpha) - \rho_1(a_k)\left(\frac{1}{\rho_1(b_k)}\left(- \frac{\phi(b_k)}{\rho(b_k)}\right) + \phi(a_k)\right) =$$

$$= \frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)}f(\alpha) + \rho_1(a_k)\phi(b_k) - \rho_1(a_k)\phi(a_k).$$

Следовательно, для каждого $k, k = 1, ..., g$, имеем

$$I_k = f(\alpha)\left[- \frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)}(1 - \rho_1(a_k)) + \phi_1(a_k)\left(\frac{1}{\rho_1(b_k)} - 1\right) + \frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)}\phi_1(\tilde{c}_k) - \right.$$

$$\left. - \rho_1(a_k)\phi_1(\tilde{c}_{k+1})\right] - \frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)}[\rho_1(a_k)\phi(a_k) + \phi(\tilde{c}_{k+1})] + \phi_1(a_k)\phi(b_k) +$$

$$+ \phi_1(\tilde{c}_k)[\rho_1(a_k)\phi(b_k) - \rho_1(a_k)\phi(a_k)] + \phi_1(\tilde{c}_{k+1})\rho_1(a_k)\phi(a_k).$$

Выражение в больших квадратных скобках равно нулю из-за основных соотношений для $f_1(z)$. Домножив его на $\rho_1(b_k)$, получаем выражение

$$-\phi_1(b_k)(1 - \rho_1(a_k)) + \phi_1(a_k)(1 - \rho_1(b_k)) +$$

$$+ \rho_1(a_k)\phi_1(\tilde{c}_k) - \rho_1(a_k)\rho_1(b_k)\phi_1(\tilde{c}_{k+1}) = 0.$$

Учитывая, что $1 - \rho_1(a_k) = \sigma_1(a_k)$ и $1 - \rho_1(b_k) = \sigma_1(b_k)$, выразим $\phi_1(\tilde{c}_{k+1})$:

$$\rho_1(a_k)\rho_1(b_k)\phi_1(\tilde{c}_{k+1}) = \phi_1(a_k)\sigma_1(b_k) - \phi_1(b_k)\sigma_1(a_k) + \rho_1(a_k)\phi_1(\tilde{c}_k),$$

Заметим, что $\phi_1(a_k)\sigma_1(b_k) - \phi_1(b_k)\sigma_1(a_k) = \phi_1(C_k)$ – коммутаторный период и

$$\phi_1(\tilde{c}_{k+1}) = \frac{1}{\rho_1(a_k)\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k) + \frac{1}{\rho_1(b_k)}\phi_1(\tilde{c}_k).$$

Так как k изменяется от 1 до g, то отсюда получим, что

$$\phi_1(\tilde{c}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i ... b_k)}\phi_1(C_i).$$

Аналогично получаем, что

$$\phi(\tilde{c}_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\rho(a_i)\rho(b_i ... b_k)}\phi(C_i).$$

Вспоминая, что $I = 0$, получим билинейное соотношение

$$\sum_{k=1}^{g} \Bigg[-\frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)}[\rho_1(a_k)\phi(a_k) + \phi(\tilde{c}_{k+1})] + \phi_1(a_k)\phi(b_k) +$$

$$+\phi_1(\tilde{c}_k)[\rho_1(a_k)\phi(b_k) - \rho_1(a_k)\phi(a_k)] + \rho_1(a_k)\phi_1(\tilde{c}_{k+1})\phi(a_k)\Bigg] = 0$$

между периодами для двух дифференциалов Прима $\phi = \phi(z)dz = df(z)$ и $\phi_1 = \phi_1(z)dz = df_1(z)$ первого рода. Здесь $\phi(\tilde{c}_1) = \phi_1(\tilde{c}_1) = \phi(\tilde{c}_{g+1}) = \phi_1(\tilde{c}_{g+1}) = 0$ по соглашению. Затем

$$\sum_{k=1}^{g} \Bigg[-\frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)}[\rho_1(a_k)\phi(a_k) + \phi(\tilde{c}_{k+1})] + \phi_1(a_k)\phi(b_k) +$$

$$+\rho_1(a_k)\phi(b_k)\phi_1(\tilde{c}_k) + \rho_1(a_k)\phi(a_k)[\phi_1(\tilde{c}_{k+1}) - \phi_1(\tilde{c}_k)]\Bigg] = 0.$$

Рассмотрим выражение

$$\phi_1(\tilde{c}_{k+1}) - \phi_1(\tilde{c}_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i ... b_k)}\phi_1(C_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i ... b_{k-1})}\phi_1(C_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i ... b_{k-1})}\phi_1(C_i) + \frac{1}{\rho_1(a_k)\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k) -$$

$$-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i)=\frac{1}{\rho_1(a_k)\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k).$$

Отсюда имеем равенство

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg\{-\frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)}\Bigg[\rho_1(a_k)\phi(a_k)+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\rho(a_i)\rho(b_i...b_k)}\phi(C_i)\Bigg]+\phi_1(a_k)\phi(b_k)+$$

$$+\rho_1(a_k)\phi(b_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i)+$$

$$+\rho_1(a_k)\phi(a_k)\frac{1}{\rho_1(a_k)\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k)\Bigg\}=0.$$

После приведения подобных при $\phi(a_k)$ и $\phi(b_k)$ получим другое равенство

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg\{\phi(a_k)\Bigg[-\frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)}\phi_1(b_k)+\frac{1}{\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k)\Bigg]+$$

$$+\phi(b_k)\Bigg[\rho_1(a_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i)+\phi_1(a_k)\Bigg]-$$

$$-\frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\rho(a_i)\rho(b_i...b_k)}\phi(C_i)\Bigg\}=0.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\rho(a_i)\rho(b_i...b_k)}\phi(C_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\sigma(b_i)\phi(a_i)-\sigma(a_i)\phi(b_i)}{\rho(a_i)\rho(b_i...b_k)},$$

то имеем следующее равенство

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg\{\phi(a_k)\Bigg[-\frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)}\phi_1(b_k)+\frac{1}{\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k)\Bigg]+$$

$$+\phi(b_k)\Bigg[\rho_1(a_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i)+\phi_1(a_k)\Bigg]-$$

$$-\frac{\phi_1(b_k)}{\rho_1(b_k)}\Bigg[\sum_{i=1}^{k}\frac{\sigma(b_i)\phi(a_i)}{\rho(a_i)\rho(b_i...b_k)}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\sigma(a_i)\phi(b_i)}{\rho(a_i)\rho(b_i...b_k)}\Bigg]\Bigg\}=0.$$

Таким образом доказана

Теорема 2.2.1. *Для любых двух голоморфных дифференциалов Прима ϕ и ϕ_1 со взаимно обратными характерами ρ и ρ_1 на переменной* *компактной римановой поверхности* F_μ *рода* $g \geq 2$ *верно билинейное соотношение (равенство)*

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg\{\phi(a_k)\Bigg[-\frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)}\phi_1(b_k)+\frac{1}{\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k)-\frac{\sigma(b_k)}{\rho(a_k)}\sum_{j=k}^{g}\frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k...b_j)}\Bigg]+$$

$$+\phi(b_k)\Bigg[\rho_1(a_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i)+\phi_1(a_k)+$$

$$+\frac{\sigma(a_k)}{\rho(a_k)}\sum_{j=k}^{g}\frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k...b_j)}\Bigg]\Bigg\}=0.$$

В частности, если $\rho(a_k)=\rho(b_k)=\rho_1(a_k)=\rho_1(b_k)=1, k=1,...,g$, то получаем билинейные соотношения Римана (равенство)

$$\sum_{k=1}^{g}(\phi_1(a_k)\phi(b_k)-\phi(a_k)\phi_1(b_k))=0$$

для двух абелевых дифференциалов ϕ и ϕ_1 первого рода на F [15; 11].

§2.3. Периоды дифференциалов Прима третьего рода

Рассмотрим элементарный дифференциал Прима $\tau_{\rho;Q}$ третьего рода с одним простым полюсом в Q для существенного характера ρ на F_μ и ветвь его интеграла Прима $\Pi(z;z_0)=\int\limits_{z_1}^{z}\tau_{\rho;Q}$ на односвязной поверхности Δ_μ с вычетом $+1$ в точке z_0, такой, что $\pi(z_0)=Q$ [15; 9].

Найдем основное соотношение на периоды этого дифференциала Прима с мультипликаторами $\rho^{-1}(b_k),\ \rho(a_k)$. Заметим, что на Δ_μ наш интеграл $\Pi(z;z_0)$ не будет однозначным, так как при однократном обходе z_0 в положительном направлении к нему прибавляется $2\pi i$. Поэтому внутри Δ_μ проведём разрез l, соединяющий точку пересечения $a_1, b_1, \tilde{c}_2$ с z_0, как на рисунке 4,

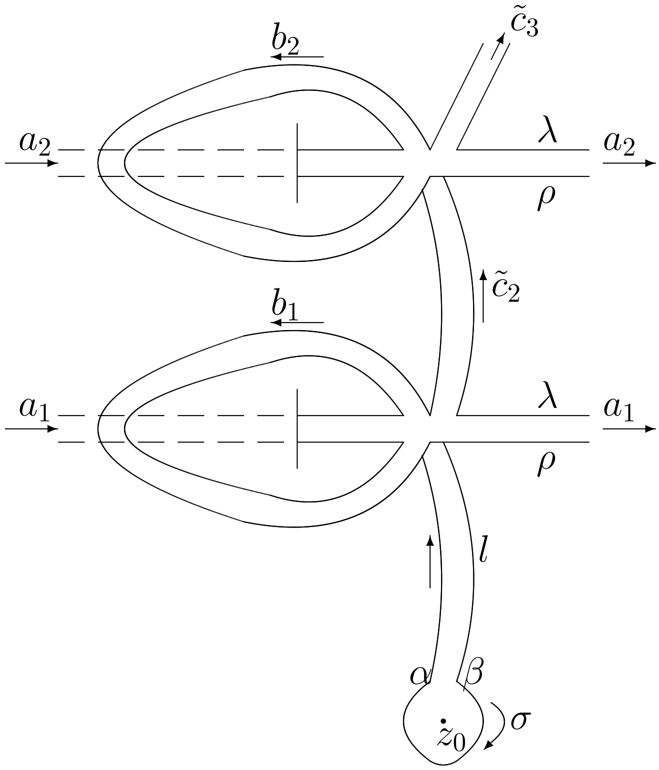

*Рис.*4

и получим область $\Delta_{\mu,l}$, на которой интеграл $\Pi(z;z_0)$ уже будет однозначным. Снова на границе имеем соотношения: $\Pi(\lambda;z_0)-\frac{1}{\rho(b_k)}\Pi(\rho,z_0)=$ $=-\frac{\Pi(b_k)}{\rho(b_k)}$ при аналитическом продолжении по петле b_k; $\Pi(\lambda;z_0)-$ $-\rho(a_k)\Pi(\rho,z_0)=\Pi(a_k)$ – по петле a_k; $\Pi(\lambda;z_0)-\Pi(\rho;z_0)=\Pi(\tilde{c}_h)$ для $\tilde{c}_h$, $k=1,...,g, h=2,...,g$. Для разреза l верно равенство $\Pi(\lambda;z_0)-$ $-\Pi(\rho;z_0)=-2\pi i$, так как $d\Pi(\lambda;z_0)=d\Pi(\rho;z_0)$ и вычет для $d\Pi(z;z_0)$ в z_0 равен 1. Таким образом, интеграл $\Pi(z;z_0)$ имеет $3g$ периодов $\Pi(a_k),\Pi(b_k)$, $\Pi(\tilde{c}_h)$, $k=1,...,g, h=2,...,g$, и $-2\pi i$ на l.

Также, как для интегралов Прима первого рода на F_μ получим, что: для точки пересечения $(a_1,b_1,\tilde{c}_2,l)$ имеет место соотношение

$$\Pi(a_1)\left(1-\frac{1}{\rho(b_1)}\right)+\frac{\Pi(b_1)}{\rho(b_1)}(1-\rho(a_1))+2\pi i\frac{1}{\rho(b_1)}\rho(a_1)+\rho(a_1)\Pi(\tilde{c}_2)=0;$$

для $(a_2,b_2,\tilde{c}_2,\tilde{c}_3)$ -

$$\Pi(a_2)\left(1-\frac{1}{\rho(b_2)}\right)+\frac{\Pi(b_2)}{\rho(b_2)}(1-\rho(a_2))-\frac{1}{\rho(b_2)}\rho(a_2)\Pi(\tilde{c}_2)+\rho(a_2)\Pi(\tilde{c}_3)=0;$$

для $(a_k, b_k, \tilde{c}_k, \tilde{c}_{k+1})$ -

$$\Pi(a_k)\left(1-\frac{1}{\rho(b_k)}\right)+\frac{\Pi(b_k)}{\rho(b_k)}(1-\rho(a_k))-\frac{1}{\rho(b_k)}\rho(a_k)\Pi(\tilde{c}_k)+\rho(a_k)\Pi(\tilde{c}_{k+1})=0,$$

где $k = 3, ..., g$. Учитывая равенства $\phi(\tilde{c}_1) = -2\pi i, \phi(\tilde{c}_{g+1}) = 0$ и исключая $\phi(\tilde{c}_2), ..., \phi(\tilde{c}_g)$ из этой системы получим следующее

Предложение 2.3.1. *Для периодов элементарного дифференциала Прима $\tau_{\rho;Q}$ третьего рода с одним простым полюсом в Q для существенного характера ρ на F_μ верно равенство*

$$2\pi i+\sum_{k=1}^{g}\frac{\Pi(b_k)(1-\rho(a_k))-\Pi(a_k)(1-\rho(b_k))}{\rho(a_k)}\rho(b_1)\cdots\rho(b_{k-1})=0.$$

Найдём билинейные соотношения между периодами элементарного интеграла Прима $\Pi(z; z_0)$ третьего рода и интеграла Прима первого рода со взаимно обратными существенными характерами.

Пусть $f_1(P)$ - интеграл Прима первого рода для существенного характера ρ с мультипликаторами $\rho(b_k) = \frac{1}{\rho_1(b_k)}, \rho(a_k) = \frac{1}{\rho_1(a_k)},\ k = 1, ..., g,$ и периодами $\phi_1(a_k), \phi_1(b_k), \phi_1(\tilde{c}_h),\ k = 1, ..., g, h = 2, ..., g,$ для дифференциала Прима $\phi_1 = \phi_1(z)dz = df_1(z)$ на $\mathcal{F}_\mu$. Тогда по теореме Коши $J = \int\limits_{\partial\Delta_{\mu,l}} f_1(z)d\Pi(z; z_0) = 0$, так как $f_1(z)d\Pi(z; z_0)$ будет абелевым дифференциалом первого рода на $\mathcal{F}_{\mu,l}$. Найдём разности $f_1(\lambda)d\Pi(\lambda; z_0) -$ $- f_1(\rho)d\Pi(\rho; z_0)$ для каждого разреза отдельно. Отсюда получаем равенство:

$$J=\sum_{k=1}^{g}\left\{\int\limits_{a_k}[f_1(\lambda)d\Pi(\lambda;z_0)-f_1(\rho)d\Pi(\rho;z_0)]+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{b_k}[f_1(\lambda)d\Pi(\lambda;z_0)-f_1(\rho)d\Pi(\rho;z_0)]\right\}+$$

$$+\sum_{h=2}^{g}\int\limits_{\tilde{c}_h}[f_1(\lambda)d\Pi(\lambda;z_0)-f_1(\rho)d\Pi(\rho;z_0)]+$$

$$+\int\limits_{l}[f_1(\lambda)d\Pi(\lambda;z_0)-f_1(\rho)d\Pi(\rho;z_0))]+\int\limits_{\sigma}f_1(z)d\Pi(z;z_0).$$

Таким образом, соотношение имеет вид

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg[-\rho(b_k)\phi_1(b_k)\left(\frac{1}{\rho(a_k)}\Pi(a_k)+\Pi(\tilde{c}_{k+1})\right)+\phi_1(a_k)\Pi(b_k)-$$

$$-\frac{1}{\rho(a_k)}\phi_1(\tilde{c}_k)(-\Pi(b_k)+\Pi(a_k))+\frac{1}{\rho(a_k)}\phi_1(\tilde{c}_{k+1})\Pi(a_k)\Bigg]=2\pi i f_1(z_0),\quad (3)$$

где $\phi_1(\tilde{c}_1)=\phi_1(\tilde{c}_{g+1})=\Pi(\tilde{c}_{g+1})=0,\Pi(\tilde{c}_1)=-2\pi i.$

Из системы равенств второго параграфа выразим $\Pi(\tilde{c}_{k+1}):$

$$\Pi(\tilde{c}_{k+1})=-\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\Pi(b_i)\sigma(a_i)-\Pi(a_i)\sigma(b_i)}{\rho(b_i)\rho(b_{i+1})...\rho(b_k)\rho(a_i)}+\frac{2\pi i}{\rho(b_1)...\rho(b_i)}\right).$$

Подставим его в равенство (3) и сгруппировав предыдущее выражение по $\Pi(a_k)$ и $\Pi(b_k)$, получим

Теорема 2.3.1. *Для дифференциалов Прима $\tau_{\rho;Q}$ и ϕ_1 третьего и первого родов со взаимно обратными существенными характерами ρ и ρ_1 на F_μ верно билинейное соотношение (равенство) между их периодами*

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg[\frac{\Pi(a_k)}{\rho(a_k)}\left(-\rho(b_k)\phi_1(b_k)+\frac{1}{\rho_1(a_k)\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k)\right)+\frac{\Pi(b_k)}{\rho(a_k)}(\rho(a_k)\phi_1(a_k)+$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i))+$$

$$+\rho(b_k)\phi_1(b_k)\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\Pi(b_i)\sigma(a_i)-\Pi(a_i)\sigma(b_i)}{\rho(b_i)\rho(b_{i+1})...\rho(b_k)\rho(a_i)}+\frac{2\pi i}{\rho(b_1)...\rho(b_i)}\right)\Bigg]=2\pi i f_1(z_0).$$

Отметим, что обе стороны равенства (3), вообще говоря, зависят от выбора ветвей интегралов Прима, т. е. $f_1(z)$ можно заменить на $f_1(z)+c$ и к периодам для ϕ_1 добавятся слагаемые вида $c(1-\rho_1(a))$, $a\in\pi_1(F)$, а также и для интеграла $\Pi(z;z_0)$. Однако, вся добавляемая сумма будет равна нулю.

Пусть теперь задан несущественный характер с мультипликаторами $\rho(a_k), \rho(b_k), k = 1, ..., g$, и $\Pi(z; z_0, z_1)$ - интеграл Прима третьего рода для этого характера, который имеет вид $\Pi(z; z_0, z_1) = \int\limits_{z_2}^{z} f_0(z)\tau_{z_0,z_1}$, где $\pi(z_2) = P_2$, $\pi(z_0) = Q_0$, $\pi(z_1) = Q_1$, $z_2(\neq z_0, z_1)$ - начальная точка интегрирования на Δ_μ; τ_{z_0,z_1} - нормированный абелев дифференциал третьего рода с простыми полюсами z_0 и z_1, и вычетами $+1$ и -1 в них соответственно. Интеграл $\Pi(z; z_0, z_1)$ имеет главные части $-f_0(z_1)\log(z - z_1)$ и $f_0(z_0)\log(z - z_0)$ в точках z_1 и z_0 соответственно. Проведём дополнительно на $\mathcal{F}_\mu$ два разреза m и l, как на рисунке 5,

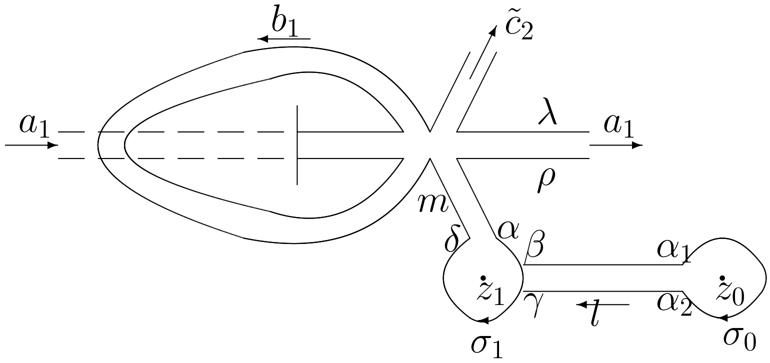

*Рис.*5

и получим новую область $\mathcal{F}_{\mu,m,l}$, на которой интеграл Прима $\Pi(P; z_0, z_1)$ будет однозначным аналитическим. Он имеет всего $3g+1$ периодов $\Pi(a_k)$, $\Pi(b_k), \Pi(\tilde{c}_h)$, $k = 1, ..., g, h = 2, ..., g$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$. Вычислим константы $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$. Для них имеем следующие выражения

$$\mathcal{L} = \Pi(\alpha_2; z_0, z_1) - \Pi(\alpha_1; z_0, z_1) = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_0(z)\tau_{z_0,z_1} =$$

$$= res_{z_0}(f_0(z)\tau_{z_0,z_1}) = -2\pi i f_0(z_0); \mathcal{M} = \Pi(\delta; z_0, z_1) - \Pi(\alpha; z_0, z_1).$$

Рассмотрим ещё разность

$$\mathcal{M} - \mathcal{L} = \Pi(\delta; z_0, z_1) - \Pi(\gamma; z_0, z_1) + \Pi(\beta; z_0, z_1) - \Pi(\alpha; z_0, z_1) =$$

$$= res_{z_1}(f_0(z)\tau_{z_0,z_1}) = -2\pi i(-f_0(z_1)).$$

Отсюда $\mathcal{M} = 2\pi i[f_0(z_1) - f_0(z_0)]$.

Снова из g равенств

$$\Pi(a_k)\left(1-\frac{1}{\rho(b_k)}\right)+\frac{\Pi(b_k)}{\rho(b_k)}(1-\rho(a_k))-\frac{1}{\rho(b_k)}\rho(a_k)\Pi(\tilde{c}_k)+\rho(a_k)\Pi(\tilde{c}_{k+1})=0,$$

$k=1,...,g$, учитывая равенства $\Pi(\tilde{c}_1)=2\pi i[f_0(z_1)-f_0(z_0)]$, $\Pi(\tilde{c}_{g+1})=0$ и исключая $\Pi(\tilde{c}_2),...,\Pi(\tilde{c}_g)$, получим следующее предложение

Предложение 2.3.2. *Для периодов элементарного дифференциала Прима $f_0\tau_{Q_0,Q_1}$ третьего рода с простыми полюсами в Q_0 и Q_1 для несущественного характера $\rho\neq 1$ на F_μ верно равенство*

$$\sum_{k=1}^{g}\frac{\Pi(b_k)(1-\rho(a_k))-\Pi(a_k)(1-\rho(b_k))}{\rho(a_k)}\rho(b_1)\cdots\rho(b_{k-1})=$$

$$=2\pi i[f_0(z_0)-f_0(z_1)].$$

Далее найдём билинейные соотношения между периодами интеграла $\Pi(z;z_0,z_1)$ и интеграла Прима $f_1(z)$ первого рода со взаимно обратными несущественными характерами. Снова по теореме Коши

$J=\int\limits_{\partial\Delta_{\mu,m,l}}f_1(z)d\Pi(z;z_0,z_1)=0$. Отсюда получим соотношение вида

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg[-\rho(b_k)\phi_1(b_k)\left(\frac{1}{\rho(a_k)}\Pi(a_k)+\Pi(\tilde{c}_{k+1})\right)+\phi_1(a_k)\Pi(b_k)-$$

$$-\frac{1}{\rho(a_k)}\phi_1(\tilde{c}_k)(-\Pi(b_k)+\Pi(a_k))+\frac{1}{\rho(a_k)}\phi_1(\tilde{c}_{k+1})\Pi(a_k)\Bigg]=$$

$$=2\pi i[f_1(z_0)f_0(z_0)-f_1(z_1)f_0(z_1)].$$

Проводя аналогичные рассуждения, как в §2.1, получаем, что справедлива следующая теорема

Теорема 2.3.2. *Для периодов голоморфного дифференциала Прима ϕ_1 и элементарного интеграла Прима $\Pi(z;z_0,z_1)$ третьего рода со взаимно обратными несущественными характерами ρ_1 и ρ на F_μ верно* *билинейное соотношение (равенство) между их периодами*

$$\sum_{k=1}^{g}\Big\{\Pi(a_k)\Big[-\frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)}\phi_1(b_k)+\frac{1}{\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k)-\frac{\sigma(b_k)}{\rho(a_k)}\sum_{j=k}^{g}\frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k...b_j)}\Big]+$$

$$+\Pi(b_k)\Big[\rho_1(a_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i)+\phi_1(a_k)+$$

$$+\frac{\sigma(a_k)}{\rho(a_k)}\sum_{j=k}^{g}\frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k...b_j)}\Big]+\rho(b_k)\phi_1(b_k)\sum_{i=1}^{k}\frac{2\pi i}{\rho(b_1)...\rho(b_i)}\Big\}=$$

$$=2\pi i[f_1(z_0)f_0(z_0)-f_1(z_1)f_0(z_1)].$$

Замечание 2.3.1. В частности, при $\rho(a_k)=\rho(b_k)=\rho_1(a_k)=\rho_1(b_k)=$ $=1,\ k=1,...,g$, имеем $f_0(z)\equiv 1$, и $f_1(z),\Pi(z;z_0,z_1)$ - абелевы интегралы первого и третьего рода соответственно. Затем все $\phi_1(\tilde{c}_j)=0=\Pi(\tilde{c}_j)$, $j=1,...,g$, а $\phi_1(\tilde{c}_{g+1})=0=\Pi(\tilde{c}_{g+1})$ по соглашению. Как следствие из предыдущей формулы получаем, что

$$\sum_{k=1}^{g}[-\phi_1(b_k)\Pi(a_k)+\phi_1(a_k)\Pi(b_k)]=2\pi i(f_1(z_0)-f_1(z_1)),$$

т. е. известное классическое билинейное соотношение Римана для периодов абелевых интегралов третьего и первого родов на F рода $g\geq 2$ [15; 11].

§2.4. Периоды дифференциалов Прима второго рода

Найдём соотношения между периодами интеграла Прима второго рода на F_μ. Пусть $T_{z_0}(z)$ – ветвь элементарного интеграла Прима второго рода с единственным простым полюсом в z_0 и вычетом 1 в z_0 для любого характера $\rho\neq 1$. Этот интеграл будет голоморфным на $\mathcal{F}_\mu\backslash\{z_0\}$, и также как интеграл Прима первого рода, имеет $3g-1$ периодов $\phi(a_k)$, $\phi(b_k)$, $\phi(\tilde{c}_h), k=1,...,g, h=2,...,g$. Здесь $T_{z_0}(\lambda)-\frac{1}{\rho(b_k)}T_{z_0}(\rho)=-\frac{\phi(b_k)}{\rho(b_k)}$ при аналитическом продолжении по петле b_k, $T_{z_0}(\lambda) - \rho(a_k)T_{z_0}(\rho) = \phi(a_k)$ – по петле $a_k, k = 1, ..., g$, и $T_{z_0}(\lambda) - T_{z_0}(\rho) = \phi(\tilde{c}_h)$ на $\tilde{c}_h$, $h = 2, ..., g$, где $\phi = dT_{z_0}(z)$ на $\Delta_\mu \backslash \{z_0\}$. Для такого дифференциала Прима с любым характером $\rho \neq 1$ его основное соотношение совпадает с основным соотношением для интеграла Прима первого рода (см. теорему 2.1.1).

Найдём теперь билинейные соотношения между периодами элементарного интеграла Прима $T_{z_0}(z)$ второго рода и интеграла Прима первого рода со взаимно обратными существенными характерами.

Пусть $f_1(z)$ - интеграл Прима первого рода для характера с мультипликаторами $\rho_1(a_k) = \frac{1}{\rho(a_k)}, \rho_1(b_k) = \frac{1}{\rho(b_k)}$ и с периодами $\phi_1(a_k), \phi_1(b_k)$, $k = 1, ..., g$, и $\phi_1(\tilde{c}_h)$, $h = 2, ..., g$. Тогда

$$I' = \int\limits_{\partial \mathcal{F}_{abc}} f_1(z) dT_{z_0}(z) = 2\pi i res_{z_0} f_1(z) \frac{dT_{z_0}(z)}{dz} = -2\pi i f_1'(z_0).$$

Действительно, на Δ_μ функция $f_1(z)\frac{dT_{z_0}(z)}{dz}$ будет однозначна и голоморфна, кроме z_0. При этом в окрестности точки z_0 имеем разложения

$$f_1(z) = f_1(z_0) + (z - z_0) f_1'(z_0) + ...,$$
$$\frac{dT_{z_0}(z)}{dz} = -\frac{1}{(z - z_0)^2} + c_0 + c_1(z - z_0) + ...$$

Отсюда $\operatorname*{res}\limits_{z_0} f_1(z)\frac{dT_{z_0}(z)}{dz} = -f_1'(z_0)$. С другой стороны

$$\sum_{k=1}^{g} \left[\frac{\phi(a_k)}{\rho(a_k)}(-\rho(b_k)\phi_1(b_k) - \phi_1(\tilde{c}_k) + \phi_1(\tilde{c}_{k+1})) + \frac{\phi(b_k)}{\rho(a_k)}(\rho(a_k)\phi_1(a_k) + \phi_1(\tilde{c}_k)) + \right.$$
$$\left. + \rho(b_k)\phi_1(b_k) \sum_{i=1}^{k} \frac{\phi(b_i)\sigma(a_i) - \phi(a_i)\sigma(b_i)}{\rho(b_i)\rho(b_{i+1})...\rho(b_k)\rho(a_i)} \right] = -2\pi i f_1'(z_0),$$

где $\phi(\tilde{c}_1) = \phi(\tilde{c}_{g+1}) = \phi_1(\tilde{c}_1) = \phi_1(\tilde{c}_{g+1}) = 0$.

Проводя аналогичные рассуждения, как в §2.1, получаем, что справедлива следующая теорема

Теорема 2.4.1. *Для периодов голоморфного дифференциала Прима ϕ_1 и элементарного интеграла Прима $T_{z_0}(z)$ второго рода со взаимно* *обратными существенными характерами* ρ_1 *и* ρ *на* F_μ *имеет место билинейное соотношение (равенство)*

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg\{\phi(a_k)\Bigg[-\frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)}\phi_1(b_k)+\frac{1}{\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k)-\frac{\sigma(b_k)}{\rho(a_k)}\sum_{j=k}^{g}\frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k...b_j)}\Bigg]+$$

$$+\phi(b_k)\Bigg[\rho_1(a_k)\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i)+\phi_1(a_k)+$$

$$+\frac{\sigma(a_k)}{\rho(a_k)}\sum_{j=k}^{g}\frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k...b_j)}\Bigg]\Bigg\}=-2\pi i f_1'(z_0).$$

Для несущественного характера, в общем случае, надо вместо $T_{z_0}(z)$ брать элементарный интеграл

$$T(z;z_0,z_1)=\int\limits_{z_2}^{z}\tau_{\rho;Q_0^2Q_1^2}=$$

$$=c_{-1}^1\int\limits_{z_3}^{z}f_0(z)dT_{z_0}(z)-c_{-1}\int\limits_{z_3}^{z}f_0(z)dT_{z_1}(z)+c_{-1}c_{-1}^1\int\limits_{z_3}^{z}f_0(z)\tau_{Q_0,Q_1}(z),$$

причём $c_{-1}=-\sum\limits_{j=1}^{g}\lambda_j\varphi_j'(z_0)$, $c_{-1}^1=-\sum\limits_{j=1}^{g}\lambda_j\varphi_j'(z_1)$ [1; 9; 10]. Здесь $(\varphi_1,...,\varphi_g)$ – отображение Якоби для F_μ [15; 11]. Этот интеграл Прима второго рода будет однозначным голоморфным на $\Delta_\mu\setminus\{z_0;z_1\}$ с вычетами $c_{-1}^1f_0(z_0)$ и $-c_{-1}f_0(z_1)$ в простых полюсах z_0 и z_1 соответственно.

Обозначим через $\phi(a_k),\phi(b_k),\phi(\tilde{c}_h)$, $k=1,...,g$, $h=2,...,g$, периоды для $T(z;z_0,z_1)$. Также, как и ранее, получается равенство

$$\sum_{k=1}^{g}\Bigg[\frac{\phi(a_k)}{\rho(a_k)}(-\rho(b_k)\phi_1(b_k)-\phi_1(\tilde{c}_k)+\phi_1(\tilde{c}_{k+1}))+\frac{\phi(b_k)}{\rho(a_k)}(\rho(a_k)\phi_1(a_k)+\phi_1(\tilde{c}_k))+$$

$$+\rho(b_k)\phi_1(b_k)\sum_{i=1}^{k}\frac{\phi(b_i)\sigma(a_i)-\phi(a_i)\sigma(b_i)}{\rho(b_i)\rho(b_{i+1})...\rho(b_k)\rho(a_i)}\Bigg]=$$

$$=2\pi i[c_{-1}^1f_0(z_0)f_1'(z_0)-c_{-1}f_0(z_1)f_1'(z_1)],$$

которое есть следствие равенства

$$I = \int\limits_{\partial\Delta_\mu} f_1(z) dT(z; z_0, z_1) =$$

$$= 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z_0} f_1(z) \frac{dT(z; z_0, z_1)}{dz} + res_{z_1} f_1(z) \frac{dT(z; z_0, z_1)}{dz} \right).$$

Проводя аналогичные рассуждения, как в §2.1, получим, что верна следующая теорема

Теорема 2.4.2. *Для периодов голоморфного дифференциала Прима* ϕ_1 *и элементарного интеграла Прима* $T(z; z_0, z_1)$ *второго рода со взаимно обратными несущественными характерами* ρ_1 *и* ρ *на* F_μ *имеет место билинейное соотношение (равенство)*

$$\sum_{k=1}^{g} \Bigg\{ \phi(a_k) \Bigg[-\frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)} \phi_1(b_k) + \frac{1}{\rho_1(b_k)} \phi_1(C_k) - \frac{\sigma(b_k)}{\rho(a_k)} \sum_{j=k}^{g} \frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k ... b_j)} \Bigg] +$$

$$+ \phi(b_k) \Bigg[\rho_1(a_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i ... b_{k-1})} \phi_1(C_i) + \phi_1(a_k) +$$

$$+ \frac{\sigma(a_k)}{\rho(a_k)} \sum_{j=k}^{g} \frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k ... b_j)} \Bigg] \Bigg\} = 2\pi i [c_{-1}^1 f_0(z_0) f_1^{'}(z_0) - c_{-1} f_0(z_1) f_1^{'}(z_1)].$$

Глава 3.

Голоморфные дифференциалы Прима на специальных римановых поверхностях

В общей теории функций на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ встречаются в основном только теоремы существования дифференциалов и функций [8; 15; 11]. Для ряда специальных римановых поверхностей удается найти явный базис голоморфных абелевых дифференциалов и дать описание их точек Вейерштрасса [15; 11].

В.М. Бухштабер и А.К. Цих обратили наше внимание на важность построения явных базисов для специальных римановых поверхностей, которые заданы полиномиальными уравнениями. Специальные римановы поверхности нашли многочисленные приложения в геометрической теории функций, аналитической теории чисел, в алгебраической геометрии и при решении ряда нелинейных уравнений математической физики [4–7; 20–22].

Третья глава посвящена специальным римановым поверхностям, заданных явными полиномиальными уравнениями, а также всем кривым Ферма. На этих специальных кривых в §3.1 и §3.2 будут построены явные базисы голоморфных абелевых $q-$дифференциалов, а так же явные базисы голоморфных $(\rho, q)-$дифференциалов для несущественных характеров ρ.

§3.1. Голоморфные дифференциалы на некоторых специальных римановых поверхностях

В этом параграфе будут построены явные базисы голоморфных абелевых дифференциалов для четырех специальных римановых поверхностей, заданных полиномиальным уравнением, и получено некоторое описание точек Вейерштрасса и их весов на этих поверхностях.

Специальная компактная риманова поверхность F есть множество

$$\{(z,w) : A(z,w) = 0\} \subset \mathbf{C}^2 \qquad (1)$$

– комплексная кривая в $\mathbf{C}^2$, где $A(z,w)$ – конкретный неприводимый полином [11]. Здесь (1) определяет аффинную часть кривой F. Чтобы сделать кривую F компактной надо добавить конечное число точек лежащих над $z = \infty$ или $w = \infty$ [4; 15]. Для нахождения рода g римановой поверхности F алгебраической функции, определяемой неприводимым полиномиальным уравнением, применяют формулу Римана-Гурвица $g = 1 - n + \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{r} n_j$, где $A(z,w)$ - конкретный неприводимый полином степени n по w и алгебраические точки ветвления имеют порядки $n_1, ..., n_r$ [15; 11]

Определение 3.1.1. Точка P называется *точкой Вейерштрасса* для компактной римановой поверхности F рода g, если существует однозначная мероморфная функция с единственным полюсом в точке P порядка k не превышающего g.

По теореме Вейерштрасса для любой фиксированной точки P на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ существует набор из g натуральных чисел $1 \leq n_1 < n_2 < ... < n_g < 2g$ таких, что для любого n_j не существует однозначной мероморфной функции f с единственным полюсом в P точно порядка n_j, т. е. n_j – пробел Вейерштрасса в точке P на F. Заметим, что числа $n_1 - 1, n_2 - 1, ..., n_g - 1$ это порядки нулей адаптированного в точке P базиса $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_g$ голоморфных дифференциалов на F. Вес в точке Вейерштрасса P на F находится по формуле $\tau(P) = \sum\limits_{j=1}^{g}(n_j - j)$ или это порядок нуля для вронскиана базиса голоморфных дифференциалов в точке P на F [15].

Следуя работе Беннама [13] будем рассматривать специальные римановы поверхности вида

$$y^q = \prod_{j=0}^{p} (x - a_j)^{\alpha_j},$$

где $a_0, ..., a_p$ – попарно различные комплексные числа и p, q, α_j – натуральные числа.

Пусть q не делится на p. Для каждого $i, i = 0, ..., p$ $(p > 1)$, положим α_i некоторое натуральное число такое, что $1 \leq \alpha_i \leq q - 1$, $\sum\limits_{i=0}^{p} \alpha_i \equiv$ $\equiv 0(mod \ \ q)$. Это условие равносильно тому, что ∞ не является точкой ветвления. Положим $d_i =$ НОД (q, α_i) и $d' =$ НОД $(q, \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i)$.

Предположим, что q - простое, тогда род g римановой поверхности F будет $g = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.

Если q - не простое, то по теореме Римана-Гурвица имеем:

$$g = \frac{1}{2}\left((p-1)q - \sum_{i=1}^{p} d_i - d' + 2 \right).$$

Теорема (Беннама [13]). *Положим*

$$\begin{cases} \omega_{m,d} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} (x-a_i)^{b_i} x^d dx}{y^m}, \\ 0 \leq d \leq d'_m = [\sum\limits_{i=1}^{p} \frac{m\alpha_i}{q}] - \sum\limits_{i=1}^{q} [\frac{m\alpha_i}{q}] - 1, \\ 1 \leq m \leq q-1, b_i = [\frac{m\alpha_i}{q}]. \end{cases} \quad (2)$$

Тогда $\omega_{m,d}$ *будет не голоморфным для* $m = j\frac{q}{d'}$ *и* $d = d'_m$ *с целыми* j *и* $1 \leq j \leq d' - 1$. *Кроме того, для получения базы голоморфных дифференциалов, нужно исключить* $d' - 1$ *не голоморфных дифференциалов, которые даны в* (2).

Для данного числа q дифференциалы приведенные в (2) формируют некоторый базис, при условии исключения тех, которые не голоморфны над точками a_i, ∞.

п. 1. Риманова поверхность, заданная уравнением вида $y^9 = x^2(x-z)z^6$

Аффинная часть кривой имеет следующий вид $y^9 = x^2(x-1)$. Найдем род кривой $g = \frac{1}{2}((2-1)\cdot 9 - 2 - 3 + 2) = 3$. Выпишем набор мероморфных дифференциалов из (2) и найдем из них голоморфные. Получаем следующие дифференциалы:

$$\omega_1' = \frac{dx}{y^3},\ \omega_2' = \frac{dx}{y^4},\ \omega_3' = \frac{xdx}{y^6},\ \omega_4' = \frac{xdx}{y^7},\ \omega_5' = \frac{xdx}{y^8}.$$

По теореме Беннама исключаем не голоморфные дифференциалы при $m = j \cdot \frac{q}{d'},\ 1 \le j \le 2,\ m_1 = 3,\ m_2 = 6.$

Таким образом получим следующую базу дифференциалов

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^4},\ \omega_2 = \frac{xdx}{y^7},\ \omega_3 = \frac{xdx}{y^8}.$$

Проверим на голоморфность дифференциалы в точках $P(0,0),\ P(1,0),$ $P(\infty,\infty)$.

В точке $P(0,0)$, $x = t^9,\ dx = 9t^8dt,\ y^9 = t^{18}(t^9-1),\ y = t^2\sqrt[9]{t^9-1}$. Отсюда имеем выражения для дифференциалов

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^4} = \frac{9t^8dt}{t^8\sqrt[9]{(t^9-1)^4}} = \frac{9dt}{\sqrt[9]{(t^9-1)^4}},$$

$$\omega_2 = \frac{xdx}{y^7} = \frac{t^9 9t^8dt}{t^{14}\sqrt[9]{(t^9-1)^7}} = \frac{9t^3dt}{\sqrt[9]{(t^9-1)^7}},$$

$$\omega_3 = \frac{xdx}{y^8} = \frac{t^9 9t^8dt}{t^{16}\sqrt[9]{(t^9-1)^8}} = \frac{9tdt}{\sqrt[9]{(t^9-1)^8}}.$$

Эти дифференциалы голоморфны при $t = 0$ и аналитичны в $P(0,0)$.

Аналогично проверяется в остальных точках ветвления.

Найдем "пробелы" в точках:

В точке $P(0,0)$ порядки нулей будут $0, 1, 3$, тогда "пробелы" $1, 2, 4$. Вес в этой точке будет равен $\tau(P(0,0)) = (1-1) + (2-2) + (4-3) = 1$;

В точке $P(1,0)$ порядки нулей будут $0, 1, 4$, тогда "пробелы" $1, 2, 5$. Вес в этой точке будет равен $\tau(P(1,0)) = (1-1)+(2-2)+(5-3) = 2$;

В точке $P(\infty,\infty)$ порядки нулей будут $2, 3, 5$, тогда "пробелы" $3, 4, 6$. Вес в этой точке будет равен $\tau(P(\infty,\infty)) = (3-1)+(4-2)+(6-3) = 7$.

Таким образом доказано следующее предложение.

Предложение 3.1.1. *На поверхности, заданной уравнением вида* $y^9 = x^2(x-1)$, *базис голоморфных дифференциалов имеет следующий вид:*

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^4},\ \omega_2 = \frac{xdx}{y^7},\ \omega_3 = \frac{xdx}{y^8}.$$

Точки $P(0,0), P(1,0), P(\infty,\infty)$ *являются точками Вейерштрасса соответствующих весов* $1, 2, 7$.

п. 2. Риманова поверхность, заданная уравнением вида $y^8 = (x-z)^2(x-2z)^3z^3$

Аффинная часть кривой имеет следующий вид $y^8 = (x-1)^2(x-2)^3$. Найдем род кривой $g = \frac{1}{2}((2-1)\cdot 8 - 3 - 1 + 2) = 3$.

Предложение 3.1.2. *Базис голоморфных дифференциалов для кривой* $y^8 = (x-1)^2(x-2)^3$ *имеет следующий вид:*

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^2},\ \omega_2 = \frac{(x-1)(x-2)dx}{y^5},\ \omega_3 = \frac{(x-1)(x-2)^2dx}{y^7}.$$

Точка $P(1,0)$ *является точкой Вейерштрасса веса 6, а точки* $P(2,0)$ *и* $P(\infty,\infty)$ *не являются точками Вейерштрасса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим на голоморфность дифференциалы:

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^2},\ \omega_2 = \frac{(x-1)(x-2)dx}{y^5},\ \omega_3 = \frac{(x-1)(x-2)^2dx}{y^7},$$

в точках ветвления.

В точке $P(1,0)$, $x-1=t^8,\ x=t^8+1,\ dx=8t^7dt,\ y^8=(t^8+1-$ $-1)^2(t^8+1-2)^3=t^{16}(t^8-1)^3$, $y=t^2\sqrt[8]{(t^8-1)^3}$. Отсюда имеем

$$\omega_1=\frac{dx}{y^2}=\frac{8t^7dt}{t^4\sqrt[8]{(t^8-1)^6}}=\frac{8t^3dt}{\sqrt[8]{(t^8-1)^6}},$$

$$\omega_2=\frac{(x-1)(x-2)dx}{y^5}=\frac{t^8(t^8-1)8t^7dt}{t^{10}(t^8-1)\sqrt[8]{(t^8-1)^7}}=\frac{8t^5dt}{\sqrt[8]{(t^8-1)^7}},$$

$$\omega_3=\frac{(x-1)(x-2)^2dx}{y^7}=\frac{t^8(t^8-1)^28t^7dt}{t^{14}\sqrt[8]{(t^8-1)^{21}}}=\frac{8tdt}{\sqrt[8]{(t^8-1)^5}}.$$

Эти дифференциалы голоморфны при $t=0$ и аналитичны в $P(1,0)$.

Аналогично проверяем в остальных точках ветвления.

Порядки нулей в точке $P(1,0)$ будут $1,3,5$, тогда “пробелы” будут $2,4,6$. Вес будет $\tau(P(1,0))=(2-1)+(4-2)+(6-3)=6$.

Порядки нулей в точке $P(2,0)$ будут $0,1,2$, тогда “пробелы” будут $1,2,3$. Вес будет $\tau(P(2,0))=(1-1)+(2-2)+(3-3)=0$. Эта точка не является точкой Вейерштрасса.

Порядки нулей в точке $P(\infty,\infty)$ будут $0,1,2$, тогда “пробелы” будут $1,2,3$. Вес будет $\tau(P(\infty,\infty))=(1-1)+(2-2)+(3-3)=0$. Точка $P(\infty,\infty)$ не является точкой Вейерштрасса. Предложение доказано.

п. 3. Риманова поверхность, заданная уравнением вида $y^9=(x-z)^2(x-2z)^4z^3$

Аффинная часть кривой имеет следующий вид $y^9=(x-1)^2(x-2)^4$. Найдем род кривой $g=\frac{1}{2}\cdot((2-1)\cdot 9-2-3+2)=3$.

Выпишем набор мероморфных дифференциалов из (2) и выберем из них голоморфные. Получаем следующие дифференциалы:

$$\omega_1'=\frac{dx}{y^2},\ \omega_2'=\frac{(x-2)dx}{y^3},\ \omega_3'=\frac{(x-2)dx}{y^4},$$

$$\omega_4'=\frac{(x-1)(x-2)^2dx}{y^6},\ \omega_5'=\frac{(x-1)(x-2)^3dx}{y^8}.$$

По теореме Беннама исключаем не голоморфные дифференциалы при $m = j \cdot \frac{q}{d'},\ 1 \le j \le 2,\ m_1 = 3,\ m_2 = 6.$

Получим следующую базу дифференциалов

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^2},\ \omega_2 = \frac{(x-2)dx}{y^4},\ \omega_3 = \frac{(x-1)(x-2)^3dx}{y^8}.$$

Действительно:

1) В точке $P(1,0)$ имеем $x = t^9+1$, $dx = 9t^8dt,\ y^9 = (t^9+1-1)^2(t^9+1-2),\ y = t^2\sqrt[9]{t^9-1}$. Отсюда получаем выражения для дифференциалов

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^2} = \frac{9t^4dt}{\sqrt[9]{(t^9-1)^2}}, \omega_2 = \frac{(x-2)dx}{y^4} = \frac{9(t^9-1)dt}{\sqrt[9]{(t^9-1)^4}},$$

$$\omega_3 = \frac{(x-1)(x-2)^3dx}{y^8} = \frac{(t^9-1)^3 9tdt}{\sqrt[9]{(t^9-1)^8}}.$$

Эти дифференциалы голоморфны при $t=0$ и аналитичны в $P(1,0)$.

Порядки нулей в точке $P(1,0)$ будут $0,1,4$, тогда "пробелы" будут $1,2,5$. Вес равен $\tau(P(1,0)) = (1-1)+(2-2)+(5-3) = 2$;

2) В точке $P(2,0)$ имеем $x = t^9+2,\ dx = 9t^8dt,\ y^9 = (t^9+2-1)^2(t^9+2-2)^4,\ y = t^4\sqrt[9]{(t^9+1)^2}$. Отсюда имеем

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^2} = \frac{9dt}{\sqrt[9]{(t^9+1)^4}}, \omega_2 = \frac{(x-2)dx}{y^4} = \frac{9tdt}{\sqrt[9]{(t^9+1)^8}},$$

$$\omega_3 = \frac{(x-1)(x-2)^3dx}{y^8} = \frac{9t^3dt}{\sqrt[9]{(t^9+1)^7}}.$$

Эти дифференциалы голоморфны при $t=0$ и аналитичны в $P(2,0)$.

Порядки нулей в точке $P(2,0)$ будут $0,1,3$, тогда "пробелы" будут $1,2,4$. Вес будет равен $\tau(P(2,0)) = (1-1)+(2-2)+(4-3) = 1$;

3) В точке $P(\infty,\infty)$, $x = \frac{1}{t^9},\ dx = -9t^{-10}dt,\ y^9 = \left(\frac{1}{t^9}-1\right)^2\left(\frac{1}{t^9}-2\right)^4$, $y = \frac{1}{t^6}\sqrt[9]{(1-t^9)^2(1-2t^9)^4}$. Отсюда –

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^2} = \frac{-9t^2dt}{\sqrt[9]{(1-t^9)^4}\sqrt[9]{(1-2t^9)^8}}, \omega_2 = \frac{(x-2)dx}{y^4} = \frac{-9t^5dt}{\sqrt[9]{(1-t^9)^8(1-2t^9)^7}}$$

$$\omega_3 = \frac{(x-1)(x-2)^3dx}{y^8} = \frac{-9t^2dt}{\sqrt[9]{(1-t^9)^7}\sqrt[9]{(1-2t^9)^{12}}}.$$

Эти дифференциалы голоморфны при $t = 0$ и аналитичны в $P(\infty, \infty)$.

Этот базис не адаптированный в точке $P(\infty, \infty)$. Поэтому из ω_1 вычтем ω_3 и получим адаптированный базис для которого в точке $P(\infty, \infty)$ порядки 0, 2, 5. Пробелы тогда будут 1, 3, 6 и вес равен $\tau(P(\infty, \infty)) =$ $= (1-1) + (3-2) + (6-3) = 4$.

Таким образом доказано следующее предложение.

Предложение 3.1.3. *Для кривой* $y^9 = (x-1)^2(x-2)^4$ *базис голоморфных дифференциалов имеет вид:*

$$\omega_1 = \frac{dx}{y^2},\ \omega_2 = \frac{(x-2)dx}{y^4},\ \omega_3 = \frac{(x-1)(x-2)^3dx}{y^8}.$$

Точки Вейерштрасса: точка $P(1,0)$ *веса 2; точка* $P(2,0)$ *веса 1; точка* $P(\infty, \infty)$ *веса 4.*

п. 4. Риманова поверхность, заданная уравнением вида

$$y^{13} = x^9(x-1)$$

Так как q простое, то род поверхности считаем по формуле

$g = \frac{1}{2}(p-1)(q-1) = \frac{1}{2}(2-1)(13-1) = 6.$

Предложение 3.1.4. *Базис голоморфных дифференциалов для кривой Снайдера* $y^{13} = x^9(x-1)$ *имеет следующий вид*

$$\omega_1 = \frac{x^2dx}{y^4},\ \omega_2 = \frac{x^4dx}{y^7},\ \omega_3 = \frac{x^5dx}{y^8},\ \omega_4 = \frac{x^6dx}{y^{10}},\ \omega_5 = \frac{x^7dx}{y^{11}},\ \omega_6 = \frac{x^8dx}{y^{12}}.$$

Точки Вейерштрасса $P(0,0), P(1,0), P(\infty, \infty)$ *все веса 5.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно проверить эти дифференциалы на голоморфность только в точках ветвления $P(0,0),\ P(1,0),\ P(\infty, \infty)$.

Проверим в точке $P(0,0)$, $x = t^{13},\ dx = 13t^{12}dt,\ \ y^{13} = (t^{13})^9(1-t^{13})$, $y = t^9\sqrt[13]{t^{13}-1}$. Отсюда получаем, что

$$\omega_1 = \frac{x^2dx}{y^4} = \frac{13t^2dt}{\sqrt[13]{(t^{13}-1)^4}}, \omega_2 = \frac{x^4dx}{y^7} = \frac{13tdt}{\sqrt[13]{(t^{13}-1)^7}},$$

$$\omega_3 = \frac{x^5dx}{y^8} = \frac{13t^5dt}{\sqrt[13]{(t^{13}-1)^8}}, \omega_4 = \frac{x^6dx}{y^{10}} = \frac{13dt}{\sqrt[13]{(t^{13}-1)^{10}}},$$
$$\omega_5 = \frac{x^7dx}{y^{11}} = \frac{13t^4dt}{\sqrt[13]{(t^{13}-1)^{11}}}, \omega_6 = \frac{x^8dx}{y^{12}} = \frac{13t^8dt}{\sqrt[13]{(t^{13}-1)^{12}}}.$$

Все эти дифференциалы голоморфны при $t = 0$ и аналитичны в $P(0,0)$.

Порядки нулей в точке $P(0,0)$ будут $0,1,2,4,5,8$, тогда "пробелы" будут $1,2,3,5,6,9$. Вес будет равен $\tau(P(0,0)) = 5$. Аналогично показывается для точек $P(1,0)$, $P(\infty,\infty)$ веса 5.

Этот набор дифференциалов линейно независим, так как если есть линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами

$$C_1\frac{x^2dx}{y^4} + C_2\frac{x^4dx}{y^7} + C_3\frac{x^5dx}{y^8} + C_4\frac{x^6dx}{y^{10}} + C_5\frac{x^7dx}{y^{11}} + C_6\frac{x^8dx}{y^{12}} = 0,$$

то сокращая на $\frac{x^2dx}{y^{12}}$ имеем уравнение

$$C_1y^8 + C_2x^2y^5 + C_3x^3y^4 + C_4x^4y^2 + C_5x^5y + C_6x^6 = 0.$$

Так как не существует линейного соотношения между $y^8, x^2y^5, x^3y^4, x^4y^2$, x^5y и x^6, то эти шесть дифференциалов линейно независимы над **C**. Предложение доказано.

§3.2. Базисы голоморфных дифференциалов на кривых Ферма

В этом параграфе для всех кривых Ферма, заданных уравнениями $F_n : w^n = z^n - 1, n > 2$, найдем явные базисы голоморфных абелевых $q-$дифференциалов и голоморфных $(\rho, q)-$дифференциалов Прима для несущественных характеров ρ при $q > 0$.

Для любого $n \geq 3$ кривая Ферма $F_n : w^n = z^n - 1 = \prod_{j=1}^{n}(z - e_j)$, где $e_j = \exp\frac{2\pi i}{n}j,\ j = 1, ..., n$, имеет род $g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Действительно, сначала заметим, что на F_n точка $(z = \infty, w = \infty)$ не является точкой ветвления над $z = \infty$. Род n-ой кривой Ферма F_n находим по формуле Римана-Гурвица

$$g = 1 - n + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} n_j = 1 - n + \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Рассмотрим совокупность n-листных римановых поверхностей, заданных уравнениями вида

$$F(z,w) = \sum_{i+j\le n} a_{ij} z^i w^j = 0, \tag{3}$$

при всевозможных значениях коэффициентов a_{ij} (это так называемые плоские кривые степени n). Тогда для общей поверхности вида (3) имеется $n(n-1)$ точек ветвления, и все они имеют кратность 1. Кроме того, для общей поверхности вида (3) ее группа монодромии совпадает с полной симметричной группой S_n.

Теорема A [4]. *Пусть уравнения*

$$F(z,w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z^i w^j = 0 \tag{4}$$

задают n-листные кривые такие, что:

1) все точки этих кривых не особые;

2) уравнение $\sum\limits_{i+j=n} a_{ij} z^i = 0$ имеет попарно различные корни. Тогда для любого $n \ge 3$ голоморфные формы-вычет Пуанкаре

$$\eta_{ij}(z)dz = \frac{z^i w^j dz}{n w^{n-1}},\ 0 \le i+j \le n-3$$

образуют базис в пространстве голоморфных дифференциалов на поверхности, заданной уравнением (4).

Теорема 3.2.1. *Для любого $n \ge 3$ набор голоморфных дифференциалов*

$$\frac{z^i w^j dz}{n w^{n-1}},\ 0 \le i+j \le n-3$$

на кривой Ферма $F_n: \ w^n = z^n - 1$, *является базисом в пространстве голоморфных абелевых дифференциалов на кривой* F_n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему А для специального случая кривых Ферма $F_n: \ w^n = z^n - 1$. Проверим выполнение двух условий этой теоремы. В случае кривых Ферма имеем уравнение:

$$F_n(z, w) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z^i w^j = w^n - z^n + 1 = 0.$$

1) Найдем градиент для функции $F_n(z, w)$. Имеем $(\frac{\partial F_n}{\partial z}; \frac{\partial F_n}{\partial w})(z_0, w_0) = = (nz_0^{n-1}, nw_0^{n-1}) = 0$ тогда и только тогда, когда $(z_0, w_0) = 0$. Поэтому кривая Ферма F_n не содержит особых точек при любом $n > 2$.

2) По условию $a_{0,n} = 1, \ a_{n,0} = -1, \ a_{0,0} = 1$, а остальные коэффициенты для кривой Ферма все равны нулю.

Составим уравнение $\sum\limits_{i+j=n} a_{ij} z^i = 0$ из теоремы А. В нашем случае оно имеет вид:

$$a_{0,n} = z^0 + a_{n,0} z^n = 0 \text{ или } 1 - z^n = 0.$$

Это уравнение имеет попарно различные корни $z = \exp \frac{2\pi i}{n} k$,

$k = 0, 1, ..., n-1$. Следовательно, оба условия теоремы А выполнены для кривых Ферма $F_n: \ w^n = z^n - 1$ при $n > 2$. Таким образом, получили набор голоморфных абелевых дифференциалов вида $\eta_{ij}(z)dz = \frac{z^i w^j dz}{nw^{n-1}}, \ 0 \leq i + j \leq n - 3$. Их количество равно сумме $\frac{(n-1)(n-2)}{2} = g$, то есть роду кривой Ферма. Теорема доказана.

Замечание 3.2.1. При $n = 3$ имеем один элемент как базис

$\eta_{00} = \frac{z^0 w^0 dz}{3w^2}$ на F_3, которая имеет род $g = 1$. При $n = 4$ базис имеет вид $\frac{dz}{4w^3}, \frac{zdz}{4w^3}, \frac{wdz}{4w^3}$, что совпадает с базисом, найденным в книгах [8; 15]. При $n = 5$, с учетом условия $0 \leq i + j \leq 2$, базис имеет вид

$$\frac{z^0 w^0 dz}{5w^4}, \ \frac{z^1 w^0 dz}{5w^4}, \ \frac{z^2 w^0 dz}{5w^4}, \ \frac{z^0 w^1 dz}{5w^4}, \ \frac{z^0 w^2 dz}{5w^4}, \ \frac{z^1 w^1 dz}{5w^4}.$$

Сравним метод Беннама и метод, с использованием теоремы А, при построении базиса голоморфных абелевых дифференциалов на специальных римановых поверхностях.

1) Рассмотрим кривую из первого параграфа $y^8 = x^2(x-1)^3$. Имеем $a_{00} = 0,\ a_{08} = 1,\ a_{80} = 0$. Уравнение $y^8 = 0$ имеет кратный корень и не удовлетворяется второе условие теоремы А. Кроме того, имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (5x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x, 8y^7) = 0.$$

Точка $(x = 0,\ y = 0)$ является особой точкой на этой кривой и не удовлетворяется первое условие теоремы А.

2) Рассмотрим кривую $y^9 = x^2(x-1)$. Имеем $a_{00} = 0,\ a_{09} = 0,\ a_{80} = 1$. Уравнение $y^9 = 0$ имеет кратный корень и не удовлетворяется второе условие теоремы А. Также имеем уравнение

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}\right) = (3x^2 - 2x, 9y^8) = 0.$$

Точка $(x = 0,\ y = 0)$ является особой точкой на этой кривой. Следовательно не выполняется первое условие теоремы А.

Отсюда можно сделать вывод, что имеются кривые, базис голоморфных дифференциалов которых нельзя найти по теореме А, но можно найти по методу Беннама. Таким образом, метод Беннама охватывает более широкий класс специальных римановых поверхностей, чем метод теоремы А.

Из главы 1 известно, что если $\omega_1, ..., \omega_g$ канонический базис голоморфных абелевых дифференциалов, то мультипликативная единица f_0 для любого несущественного характера ρ имеет вид $f_0(P) = \exp 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{g} \int_{P_0}^{P} c_j \omega_j$. Таким образом, для всех кривых из §3.1 и §3.2 (все кривые Ферма F_n, $n \geq 3$) существует явный базис $f_0\omega_1, ..., f_0\omega_g$ в пространстве $\Omega_\rho(1; F_n)$. Кроме того, так как все поверхности из этих параграфов были негиперэллиптическими, то по классической теореме Нётера [15] можно построить явно базис в пространстве $\Omega^q_\rho(1; F_n)(q \geq 2, g \geq 3)$ в виде $f_0\omega_{i_1} \cdot ... \cdot \omega_{i_q}$, где $i_1 + ... + i_q = q, i_k \geq 0, i_k \in \mathbf{Z}, k = 1, ..., q$, для любого несущественного характера на этих специальных римановых поверхностях.

Глава 4.

Периоды гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности

Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов играют большую роль в современной теории функций на компактных римановых поверхностях [2; 3; 9; 10; 16–21]. В четвертой главе исследовано гармоническое расслоение Прима, слои которого есть пространства гармонических дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях и найдена его связь с когомологическим расслоением Ганнинга над пространством Тейхмюллера для двух важных подгрупп несущественных и нормированных характеров на компактной римановой поверхности.

§4.1. Предварительные сведения

Обозначим через $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ для $\rho \in Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma_\mu \to \mathbf{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T), S, T \in \Gamma_\mu$[19].

Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ будет единственно определяться упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1), ..., \phi(A_g), \phi(B_1), ..., \phi(B_g)$, удовлетворяющих уравнению $\sum\limits_{j=1}^{g}[\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)] = 0$, которое получается из соотношения $\prod\limits_{j=1}^{g} C_j = I$ в Γ_μ, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T), T \in \Gamma_\mu$. Тогда $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – комплексное векторное $(2g-1)-$мерное пространство для $\rho \neq 1$ и $2g-$мерное пространство для $\rho = 1$. Пусть $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$, порожденное элементом σ. Тогда $H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – комплексное векторное $(2g-2)-$мерное пространство для $\rho \neq 1$. Будем называть множество $G = \bigcup\limits_{\rho \neq 1, [\mu]} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$

когомологическим расслоением Ганнинга над $\mathbf{T}_g \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash\{1\})$ [19].

Пусть ϕ – замкнутый дифференциал Прима на F_0 для ρ. Тогда, определенные в главе 2, отображения вида $T \to \phi_{f,z_0}(T)$ (периоды по Р. Ганнингу) и вида $T \to \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F_0 для ρ. Поэтому корректно определено $\mathbf{C}-$линейное отображение $p : \phi \to [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима ϕ на F_0 для ρ в векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$.

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ пространство дифференциалов Прима второго рода на F_μ для характера ρ [8; 15].

Лемма 4.1.1 [9; 10]. *Если $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, то ω - мультипликативно точный дифференциал на F_μ для ρ.*

Пусть $\phi = df(z) = \varphi(z)dz$, тогда $\varphi(Tz)T'(z) = \rho(T)\varphi(z), T \in \Gamma, z \in U$, и ϕ для ρ на $F = U/\Gamma$ есть голоморфная мультипликативная касп-форма для (Γ, ρ) веса (-2) [10; 15; 16].

Также имеем $\varphi(Tz) = (1/T'(z))\rho(T)\varphi(z) = k(T, z)\rho(T)\varphi(z), T \in \Gamma$, $z \in U$, где $k(T, z)$ - канонический фактор автоморфности для U/Γ, который зависит только от комплексно-аналитической структуры на U/Γ. Следовательно, $\varphi(z)$ - голоморфное сечение для голоморфного линейного расслоения $k \otimes \rho$ над U/Γ, где $\otimes$ обозначает тензорное произведение линейных расслоений над U/Γ [17–19].

Лемма 4.1.2 [10; глава 3, лемма 3.2.1]. *Любой дифференциал Прима ϕ на F класса C^∞ для ρ единственно разлагается на сумму дифференциала Прима ϕ_1 типа $(1, 0)$ на F класса C^∞ для ρ и дифференциала Прима ϕ_2 типа $(0, 1)$ на F класса C^∞ для ρ.*

Определение 4.1.1. *Гармоническим дифференциалом Прима* на F для $\rho \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма $\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(z)d\overline{z}$ на U такая, что $\phi_1(Tz)dTz + \phi_2(Tz)d\overline{Tz} = \rho(T)(\phi_1(z)dz + \phi_2(z)d\overline{z})$, $T \in \Gamma, z \in U$.

Гармонический дифференциал Прима ϕ на U представляется в виде $\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(z)d\overline{z}$, где $\phi_1(z)dz = df_1(z), \phi_2(z)d\overline{z} = d\overline{f_2(z)}, f_j(z)$ - голоморфные функции на $U, j = 1, 2$, которые определяются с точностью до аддитивных комплексных констант. Поэтому $\phi = df(z)$, где $f(z) = f_1(z) + \overline{f_2(z)}$ - комплекснозначная гармоническая функция на U (гармонический интеграл Прима для дифференциала ϕ). Отсюда получаем следующие соотношения:

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T), \phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T), S, T \in \Gamma,$$

где $\phi(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0) = \phi_1(T) + \phi_2(T), \phi_1(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0)$, $\phi_2(T) = \overline{f_2(Tz_0)} - \rho(T)\overline{f_2(z_0)}$. Здесь

$$\phi_1(Tz)dTz = \rho(T)\phi_1(z)dz, \phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz} = \rho(T)\phi_2(\overline{z})d\overline{z}, T \in \Gamma, z \in U.$$

Следовательно, отображение периодов $\phi : T \to \phi(T)$ или $\phi : \Gamma \to \mathbf{C}$, относительно гармонического интеграла Прима $f(z)$, есть элемент из $Z^1(\Gamma, \rho)$. Если $\widehat{f_1}(z) = f_1(z) + c_1, \widehat{f_2}(z) = f_2(z) + c_2$ - другие интегралы Прима для $\phi_1(z)dz, \phi_2(\overline{z})d\overline{z}$ соответственно, то $\widehat{\phi_1}(T) = \phi_1(T) + c_1\sigma(T)$, $\widehat{\phi_2}(T) = (\overline{f_2(Tz_0) + c_2}) - \rho(T)(\overline{f_2(z_0) + c_2}) = \phi_2(T) + \overline{c_2}\sigma(T)$. Таким образом, $\widehat{\phi}(T) = \phi(T) + (c_1 + \overline{c_2})(1 - \rho(T)), T \in \Gamma$, и отображения периодов при различных гармонических интегралах Прима для одного и того же гармонического дифференциала Прима будут отличаться на элемент из $B^1(\Gamma, \rho)$. Поэтому $\mathbf{C}-$линейное отображение $p : \phi \to [\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$, которое гармонический дифференциал Прима ϕ переводит в его класс периодов $[\phi]$, корректно определено.

Обозначим через $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ пространство всех гармонических дифференциалов Прима для ρ на F [17; 18].

Теорема 4.1.1[10; глава 3, теорема 3.2.3]. *Если ϕ, ψ - замкнутые дифференциалы Прима на F класса C^∞ для ρ_1 и ρ_2 соответственно, то:*

$$\iint\limits_{\Delta} \phi \wedge \psi = \int\limits_{\partial\Delta} h(z)\psi =$$

$$= \sum_{j=1}^{g} [(1 - \rho_1\rho_2(B_j)) \int\limits_{z \in \widetilde{a_j}} h(z)\psi - (1 - \rho_1\rho_2(A_j)) \int\limits_{z \in \widetilde{b_j}} h(z)\psi] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{g} \{[\phi(C_1 ... C_{j-1})(1 - \rho_2(B_j)) - \rho_2(B_j)(\phi(C_j) + \phi_h(B_j))] \int\limits_{z \in \widetilde{a_j}} \psi +$$

$$+ [(\rho_2(A_j) - 1)\phi(C_1 ... C_{j-1}) + \rho_2(A_j)\phi_h(A_j) - \phi(C_j)] \int\limits_{z \in \widetilde{b_j}} \psi\},$$

где Δ - фиксированная фундаментальная область для Γ в U; $\phi = dh(z)$ на $U, h(Tz) = \rho(T)h(z) + \phi_h(T), T \in \Gamma$;

$$\int\limits_{\widetilde{a_j}} \psi = \int\limits_{z_0}^{A_j z_0} \psi; \int\limits_{\widetilde{b_j}} \psi = \int\limits_{z_0}^{B_j z_0} \psi,$$

причем это равенство инвариантно, относительно выбора интеграла $h(z)$ для ϕ с точностью до аддитивного слагаемого.

Зададим конечное покрытие для $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1$ открытыми окрестностями $U_j = \{\rho : \rho(A_j) \neq 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j) \neq 1\}, j = 1, ..., g$.

§4.2. Периоды гармонических дифференциалов Прима для существенных характеров

Обозначим через $[S^1]^{2g}$ подгруппу в $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$, состоящую из нормированных характеров ρ на Γ, т.е. $|\rho(T)| = 1, T \in \Gamma$.

Предложение 4.2.1. *Пусть F - компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, ϕ - гармонический дифференциал Прима на F для $\rho \in [S^1]^{2g}$ и $[\phi] = 0$ в $H^1(\Gamma, \rho)$. Тогда $\phi = 0$ на F.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 1 [10, с. 155]. По лемме 4.1.2 дифференциал $\phi = \varpi + \overline{\varphi}$, где ϖ и φ - голоморфные дифференциалы Прима для ρ и $\overline{\rho}$ соответственно на F. Из условия $[\phi] = 0$ и леммы 4.1.1 следует существование мультипликативной функции f на F для ρ такой, что $\varpi + \overline{\varphi} = df(z)$ на U. Покажем, что $\varpi = 0 = \varphi$ на U. От противного. Предположим, что $\varphi \neq 0$ на фундаментальной области Δ для группы Γ (или на F). Тогда, положив $\varphi = g(z)dz$ на Δ, имеем

$$\frac{i}{2} \iint\limits_{\Delta} \varphi \wedge \overline{\varphi} = \iint\limits_{\Delta} |g(z)|^2 dx \wedge dy > 0.$$

С другой стороны, $\varphi \wedge \overline{\varphi} = \varphi \wedge \varpi + \varphi \wedge \overline{\varphi} = \varphi \wedge df = -d(f\varphi)$. Отсюда

$$\iint\limits_{\Delta} \varphi \wedge \overline{\varphi} = \iint\limits_{\Delta} \varphi \wedge df = -\int\limits_{\partial\Delta} f\varphi = 0$$

по теореме 4.1.1, так как $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \overline{\rho}$, $\rho\overline{\rho} = 1$ и для дифференциала df все $a-$периоды и $b-$периоды равны 0. Получили противоречие. Поэтому $\phi = \varpi$.

Повторяя предыдущие рассуждения с ϖ, получим, что $\varpi = 0$ на U.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО 2. Используя обозначения предыдущего доказательства, получим, что

$$0 \leq (\phi, \phi) = \iint\limits_{\Delta} \phi \wedge *\overline{\phi} = \int\limits_{\partial\Delta} f(z)(*\overline{\phi}) = 0.$$

Последнее равенство снова выводится из теоремы 4.1.1. Отсюда $(\phi, \phi) = 0$ на Δ и $\phi = 0$ на Δ. Следовательно, $\phi = 0$ на F. Теорема доказана.

Следствие 4.2.1. *Гармонический дифференциал Прима ϕ на F для $\rho \in [S^1]^{2g} \backslash 1$ единственно определяется своим классом периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ и $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1(\Gamma, \rho)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как отображение периодов p является $\mathbf{C}-$линейным инъективным отображением $(2g-2)-$мерного векторного пространства $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ в $(2g-2)-$мерное векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$, то $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1(\Gamma, \rho)$ для $\rho \in [S^1]^{2g} \backslash 1$. Следствие доказано.

Множество всех гармонических дифференциалов Прима ϕ для $\rho \in Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$ образует комплексное $(2g-2)-$мерное векторное пространство $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ при $\rho \notin L_g \cup \overline{L_g}$, так как

$$\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho)),$$

где $\overline{L_g}$ - образ L_g при отображении комплексного сопряжения $\rho \to \overline{\rho}$. Выберем базис $\{\phi_j(z; \rho, [\mu])dz\}_{j=1}^{g-1}$ для $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, голоморфно зависящий от ρ в достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*) \backslash (L_g \cup \cup \overline{L_g})$ и голоморфно зависящий от $[\mu]$ в достаточно малой окрестности $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ [10, с. 105]. Одновременно выберем базис $\{\phi_j(z; \overline{\rho}, \overline{[\mu]})dz\}_{j=1}^{g-1}$ в $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\overline{\rho}))$, голоморфно зависящий от $\overline{\rho}$ в $\overline{U(\rho_0)}$ (образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho \to \overline{\rho}$, которое является автоморфизмом на $L_g \cup \overline{L_g}$) и голоморфно зависящий от $\overline{[\mu]}$ в достаточно малой окрестности $\overline{U([\mu_0])}$. Здесь класс $[\mu]$ имеет модули $(c_1, c_2, ..., c_{3g-3}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$, а класс $\overline{[\mu]}$ имеет модули $(\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_{3g-3}}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$.

Поэтому набор гармонических дифференциалов Прима

$$\phi_1(z; \rho, [\mu])dz, ..., \phi_{g-1}(z; \rho, [\mu])dz; \overline{\phi_1(z; \overline{\rho}, \overline{[\mu]})dz}, ..., \overline{\phi_{g-1}(z; \overline{\rho}, \overline{[\mu]})dz}$$

образует базис, голоморфно зависящий от $\rho \in U(\rho_0)$ и от $[\mu]$.

Таким образом, на комплексном векторном расслоении (это есть так называемое гармоническое расслоение Прима)

$$\mathbf{HP} = \bigcup_{[\mu], \rho \notin L_g \cup \overline{L_g}} \Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \mathbf{P}_{1,0} \oplus \mathbf{P}_{0,1}$$

ранга $2g-2$ над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash (L_g \cup \overline{L_g})$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ определено по формуле:

$$(\phi_1, \phi_2) = i \iint\limits_{w^{s([\mu])}(\Delta)} (u_1\overline{u_2} + v_1\overline{v_2}) dz \wedge d\overline{z},$$

где Δ - фиксированная фундаментальная область для Γ в U; $\phi_j = u_j(z)dz+$ $+v_j(z)d\overline{z}$, $j = 1, 2$. Здесь $s([\mu])$ – локально голоморфное сечение Эрла над пространством Тейхмюллера [14].

Скалярное произведение эрмитово, так как $(\phi_1, \phi_2) = (\overline{\phi_2, \phi_1})$. Легко видеть, что $\mathbf{C}-$линейный оператор $*$ (звезда Ходжа) будет изометрией на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$. Оператор $*$ также изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ на себя и изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ на себя.

Относительно этого скалярного произведения пространства $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ и $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ ортогональны, так как, если $\phi_1 = u(z)dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, $\phi_2 = v(z)d\overline{z} \in \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$, тогда $(\phi_1, \phi_2) = \iint\limits_{w^{s([\mu])}(\Delta)} udz \wedge *\overline{v(z)d\overline{z}} = 0$. Векторные расслоения $\mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{0,1}$ и $\mathbf{HP}$ являются эрмитовыми голоморфными векторными расслоениями над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash (L_g \cup \overline{L_g})$. Следовательно, доказана

Теорема 4.2.1. *Гармоническое расслоение Прима* $\mathbf{HP} = \bigcup\limits_{([\mu],\rho)} \Gamma(F_\mu,$ $O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ *является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга* $2g-2$ *над* $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash (L_g \cup \overline{L_g})$ *при любом* $g \geq 2$. *Кроме того,* $\mathbf{HP}$ *является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных* $*-$*инвариантных векторных подрасслоений* $\mathbf{P}_{1,0}$ *и* $\mathbf{P}_{0,1}$ *ранга* $g-1$ *над этой базой.*

Приведем основные свойства отображений ϕ из $Z^1(\Gamma, \rho)$:

1) $\phi(1) = 0$, так как $\phi(S \cdot 1) = \phi(S) + \rho(S)\phi(1)$ и $\rho(S) \neq 0$;

2) $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$, так как $0 = \phi(1) = \phi(SS^{-1}) = \phi(S) + \rho(S)\phi(S^{-1})$ и $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$;

3) $\phi([A, B] \cdot [C, D]) = \phi([A, B]) + \phi([C, D])$, так как $\rho([A, B]) = 1$;

4) $\phi([A,B]) = \sigma(B)\phi(A) - \sigma(A)\phi(B)$ для любых $A, B \in \Gamma$;

5) $\phi(ABA^{-1}) = \phi([A,B]B) = \phi([A,B]) + \phi(B), \quad A, B \in \Gamma$;

6) $\phi(ABA^{-1}) = \rho(A)\phi(B), \quad A \in \Gamma, B \in [\Gamma, \Gamma]$;

7) $\phi([A,B]^{-1}) = -\phi([A,B])$.

Теорема 4.2.2. *Когомологическое расслоение Ганнинга G является голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2$ над $\mathbf{T}_g(F) \times \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\rho_\mu \neq 1$ существует изоморфизм векторного пространства $H^1(\Gamma_\mu, \rho_\mu)$ и векторного пространства $Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$, состоящего из гомоморфизмов $\phi_0 : [\Gamma_\mu, \Gamma_\mu] \to (\mathbf{C}, +)$ таких, что $\phi_0(S^\mu T^\mu (S^\mu)^{-1}) = \rho_\mu(S^\mu)\phi_0(T^\mu)$, где $T^\mu \in [\Gamma_\mu, \Gamma_\mu]$ - коммутант группы Γ_μ, $S^\mu \in \Gamma_\mu$ [19]. Таким образом, расслоение G над $\mathbf{T}_g(F) \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1)$ изоморфно расслоению со слоем $Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ над $([\mu], \rho)$, где $\rho(A_j) = \rho_\mu(A_j^\mu), \rho(B_j) = \rho_\mu(B_j^\mu), j = 1, ..., g$. Зададим карту $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g)$ над $\mathbf{T}_g(F) \times U_l$ биективно отображающую $G\mid_{\mathbf{T}_g(F) \times U_l}$ на $\mathbf{T}_g(F) \times \times U_l \times \mathbf{C}^{2g-2}$ по правилу: элементу $\phi_0([\mu], \rho_\mu) \in Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ сопоставляется набор

$$([\mu], \rho; \xi_1^l, ..., \xi_{g-1}^l, \eta_1^l, ..., \eta_{g-1}^l).$$

Здесь над U_l имеем

$$\xi_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([A_{\tilde{j}}^\mu, A_l^\mu]), \eta_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([B_{\tilde{j}}^\mu, A_l^\mu]),$$

а над U_{g+l} -

$$\xi_j^{g+l} = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([A_{\tilde{j}}^\mu, B_l^\mu]), \eta_j^{g+l} = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([B_{\tilde{j}}^\mu, B_l^\mu]),$$

где $\widetilde{j} = j$, при $1 \leq j \leq l-1$, и $\widetilde{j} = j+1$, при $l \leq j \leq g-1$.

Для $\rho \in U_1$, например, будет $\sigma_\mu(A_1^\mu) = 1 - \rho_\mu(A_1^\mu) \neq 0$ и любой элемент $\phi_0 = \phi_0([\mu], \rho_\mu) \in Hom_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ можно задать как $\phi_0 = \phi_1\mid_{[\Gamma_\mu, \Gamma_\mu]}$

для $\phi_1 = \phi_1([\mu], \rho_\mu) \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho_\mu)$ такого, что $\phi_1(A_1^\mu) = 0, \phi_1(T^\mu) = \sigma_\mu(A_1^\mu)^{-1}\phi_0([T^\mu, A_1^\mu]), T^\mu \in \Gamma_\mu$ [19]. Отсюда получаем соотношения:

$$\xi_j^1 = \phi_0([A_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \phi_1([A_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(A_{j+1}^\mu),$$

$$\eta_j^1 = \phi_0([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \phi_1([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(B_{j+1}^\mu), j = 1, ..., g-1.$$

Кроме того, из основного коциклического соотношения и задания координат над U_1 следует, что

$$\phi_1(B_1^\mu) = \sigma_\mu(A_1^\mu)^{-2}\sum_{j=1}^{g-1}[\sigma_\mu(B_{j+1}^\mu)\xi_j^1 - \sigma_\mu(A_{j+1}^\mu)\eta_j^1].$$

Таким образом, $\phi_1(A_j^\mu), \phi_1(B_j^\mu), j = 1, ..., g$, выражаются через $\xi_j^1, \eta_j^1, j = 1, ..., g-1$, и последние можно взять в качестве координат для ϕ_0 в слоях над $\mathbf{T}_g(F) \times U_1$. Аналогично можно поступить для остальных окрестностей.

Координаты ξ_j^l, η_j^l являются линейными комбинациями от $\phi_l(A_j), \phi_l(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_l$, а также линейными комбинациями от $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times (U_k \cap U_l)$, так как $\phi_l|_{[\Gamma,\Gamma]} = \phi_0 = \phi_k|_{[\Gamma,\Gamma]}$ над $U([\mu_0]) \times (U_k \cap U_l)$ (здесь ϕ_k и ϕ_l определяются, аналогично, как ϕ_1 над U_1, над U_k и U_l соответственно). Далее, $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ - линейные комбинации от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k$. Поэтому координаты ξ_j^l, η_j^l будут линейными комбинациями от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times (U_k \cap U_l)$. Таким образом, получим, что матрицы перехода $T_{k,l}$ голоморфны на $\mathbf{T}_g(F) \times (U_l \cap U_k)$ для всех $k, l = 1, ..., 2g$. Следовательно, такие карты $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g), l = 1, ..., 2g$, задают структуру голоморфного векторного расслоения на G над $\mathbf{T}_g(F) \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1)$. Теорема доказана.

Теорема 4.2.3. *Векторные расслоения Ганнинга* $G = \bigcup_{([\mu],\rho)} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ *и Прима* **HP** *над* $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$ *будут вещественно-аналитично изо-*

морфными, и расслоение Ганнинга G над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}\backslash 1$ равно прямой сумме двух вещественно-аналитических комплексных векторных подрасслоений ранга $g-1$ для любого $g \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем включения

$$[S^1]^{2g}\backslash 1 \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g}) \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash 1,$$

что сразу следует из следствия к теореме Фаркаша-Кра [15, с.130], по которой любой нормированный несущественный характер будет тривиальным. На $[S^1]^{2g}\backslash 1$ есть естественная вещественно-аналитическая структура, согласованная с комплексно-аналитической структурой на пространстве $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$. Поэтому голоморфные векторные расслоения G и $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash(L_g \cup \overline{L_g})$, ограниченные на $\mathbf{T}_g \times ([S^1]^{2g}\backslash 1)$, будут вещественно-аналитическими комплексными векторными расслоениями [17; 19; 10]. По предложению 4.2.1 послойный $\mathbf{C}-$линейный изоморфизм p будет также вещественно-аналитическим изоморфизмом расслоений G и $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times ([S^1]^{2g}\backslash 1)$.

Второе утверждение следует из теоремы 4.2.1. Теорема доказана.

§4.3. Периоды гармонических дифференциалов Прима для несущественных характеров

Обозначим через $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ пространство голоморфных дифференциалов Прима для несущественного характера ρ, а $< df_0 >$ – одномерное подпространство порожденное df_0 на F_μ [10; 15].

Теорема 4.3.1. *Векторное расслоение*

$$\mathbf{P}_{1,0} = \bigcup_{[\mu]\in\mathbf{T}_g, \rho\in L_g\backslash 1} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/ < df_0 >$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $g-1$ над $\mathbf{T}_g \times (L_g\backslash 1)$ для любого $g \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $U_j \cap (L_g \backslash 1), j = 1, ..., 2g$, образует открытое покрытие для базы $L_g \backslash 1$. Для фиксированного $k = 1, ..., g$, рассмотрим $\rho_0 \in U_k \cap (L_g \backslash 1)$. Известно, что $df_0 = 2\pi i(c_1 f_0 \zeta_1 + ... + c_g f_0 \zeta_g)$, где характер ρ_0 для f_0 имеет вид $\rho_0(a_j) = \exp(2\pi i c_j), j = 1, ..., g$. Для $\rho_0 \in U_k$ имеем $\rho_0(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0$ для $\rho \in U(\rho_0) \subset U_k \cap (L_g \backslash 1)$ и $[\mu] \in U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$. Отсюда $f_0 \zeta_k = \frac{1}{2\pi i c_k}(df_0) - \frac{1}{c_k} \sum\limits_{j \neq k} c_j f_0 \zeta_j$. Из [10] следует, что для любого $\phi(z; \rho, [\mu])dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ верно разложение

$$\phi(z; \rho, [\mu])dz = \alpha_1 f_0 \zeta_1 + ... + \alpha_g f_0 \zeta_g = \Sigma_{j \neq k} \alpha_j f_0 \zeta_j + \alpha_k f_0 \zeta_k =$$

$$= \Sigma_{j \neq k}(\alpha_j - \frac{\alpha_k}{c_k} c_j) f_0 \zeta_j + \alpha_k \frac{df_0}{2\pi i c_k}.$$

Отсюда получаем, что класс смежности

$$\langle \phi(z; \rho, [\mu])dz \rangle = \Sigma_{j \neq k}(\alpha_j - \frac{\alpha_k}{c_k} c_j) \langle f_0 \zeta_j \rangle.$$

Таким образом, набор классов смежности для дифференциалов Прима

$$f_0 \zeta_1, ..., \widehat{f_0 \zeta_k}, ..., f_0 \zeta_g$$

является базисом локально голоморфных сечений по $[\mu]$ и ρ для нашего расслоения над $U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$. Если $\phi^{'}(z; \rho, [\mu])dz$ – другой представитель класса смежности $\langle \phi(z; \rho, [\mu])dz \rangle$, то $\phi^{'}(z; \rho, [\mu])dz = \phi(z; \rho, [\mu])dz +$ $+ \, m \; df_0, m \in \mathbf{C}$, или $\sum_{j=1}^{g} \alpha_j^{'} f_0 \zeta_j = \sum_{j=1}^{g} \alpha_j f_0 \zeta_j + m \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j f_0 \zeta_j$. Таким образом $\alpha_j^{'} = \alpha_j + m 2\pi i c_j$, $j = 1, ..., g$. Следовательно

$$\langle \phi^{'}(z; \rho, [\mu])dz \rangle = \sum_{j \neq k} \left(\alpha_j^{'} - \frac{\alpha_k^{'}}{c_k} c_j \right) \langle f_0 \zeta_j \rangle =$$

$$= \sum_{j \neq k} \left(\alpha_j + m 2\pi i c_j - \frac{\alpha_k + m 2\pi i c_k}{c_k} c_j \right) \langle f_0 \zeta_j \rangle = \sum_{j \neq k} \left(\alpha_j - \frac{\alpha_k}{c_k} c_j \right) \langle f_0 \zeta_j \rangle.$$

Поэтому отображение

$$\langle \phi(z; \rho, [\mu])dz \rangle \to (\lambda_1, ..., \widehat{\lambda}_k, ..., \lambda_g),$$

где $\lambda_j = \alpha_j - \frac{\alpha_k}{c_k}c_j$ для $j \neq k$, над $U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$ задает карту (тривиализацию) $\Theta([\mu_0], \rho_0)$ для нашего расслоения, т. е. $\mathbf{P}_{1,0}|_{U([\mu_0])\times U(\rho_0)} \cong$ $\cong U([\mu_0]) \times U(\rho_0) \times \mathbf{C}^{g-1}$. Эти карты задают структуру голоморфного векторного расслоения на $\mathbf{P}_{1,0}$ над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash 1)$.

Для фиксированного $j, j = 1, ..., g$, пусть $\rho_0 \in U_{g+j} \cap (L_g \backslash 1)$, т. е. $\rho_0(b_j) \neq 1$. Предположим, что все $\rho_0(a_j) = 1$, т. е. $c_j = 0, j = 1, ..., g$. Имеем $\rho_0(a_j) = \exp(2\pi i c_j) = 1, \rho_0(b_j) = \exp(2\pi i \sum\limits_{k=1}^{g} c_k \pi_{jk})$, а значит $\rho_0(b_j) =$ $= 1$. Противоречие. Следовательно хотя бы одно $c_k \neq 0$ и $\rho_0 \in U_{g+j} \cap U_k$, т. е. $\rho_0(a_k) \neq 1$. Таким образом этот случай сводится к предыдущему. Теорема доказана.

Отображение периодов $p : \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/ < df_0 > \to H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ такое, что $\phi(z)dz \to p(\phi(z)dz) = [\phi] = \{\phi + c\sigma : c \in \mathbf{C}\} = \phi + B^1(\Gamma_\mu, \rho)$, будет $\mathbf{C}-$линейным послойным отображением из $\mathbf{P}_{1,0}$ в G над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash 1)$. Поэтому отображение периодов $p : \mathbf{P}_{1,0} \to G$ будет линейным отображением голоморфных векторных расслоений над $\mathbf{T}_g \times (L_g \backslash 1)$ [10].

Покажем, что отображение p будет послойно инъективным отображением из расслоения ранга $g - 1$ в когомологическое расслоение Ганнинга ранга $2g - 2$.

Пусть $\omega + kdf_0$ при отображении p переходит в класс $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$. По лемме 4.1.1 получаем, что ω – мультипликативно точный дифференциал, т. е. $\omega = df$, где f – голоморфная мультипликативная функция для несущественного характера $\rho \neq 1$. Функция $\frac{f}{f_0}$ будет однозначной голоморфной на компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$, а значит она будет константой $c \neq 0$, так как функция f не имеет нулей на этой поверхности. Следовательно $\omega = cdf_0, c \neq 0$, т. е. ω представляет нулевой класс в нашем фактор пространстве. Поэтому отображение p – послойная инъекция.

Теорема 4.3.2. *Последовательность голоморфных векторных расслоений и отображений*

$$0 \to \mathbf{P}_{1,0} \xrightarrow{p} G \xrightarrow{h} G/\mathbf{P}_{1,0} \to 0$$

над $\mathbf{T}_g(F) \times (L_g \backslash 1)$ *является точной для любого* $g \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предыдущей теореме и [10; глава 3, теорема 3.3.4] расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$ и G имеют структуру голоморфных векторных расслоений. Кроме того, уже доказано, что p - послойная инъекция.

Покажем, что отображение p будет голоморфным относительно этих структур. Пусть $U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$ - достаточно малая односвязная окрестность точки $([\mu_0], \rho_0)$, где $U(\rho_0) \subset (L_g \backslash 1)$. Тогда $U(\rho_0)$ лежит в одной из областей $U_j = \{\rho : \rho(A_j) \neq 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j) \neq 1\}$, $j = 1, ..., g$, покрытия для $L_g \backslash 1$. Пусть, например, $U(\rho_0) \subset U_g \cap (L_g \backslash 1)$. Тогда существует базис из классов смежности для голоморфных дифференциалов Прима $f_0\zeta_1, ..., f_0\zeta_{g-1}$ на F_μ (в слое расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$), голоморфно зависящий от $([\mu]; \rho) \in U([\mu_0]) \times U(\rho_0), z \in w^\mu(U)$. Любой элемент $\phi(z; \rho, [\mu])dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))/ < df_0 >$ имеет разложение

$$\langle \phi(z; \rho, [\mu])dz \rangle = \sum_{j=1}^{g-1} \lambda_j([\mu], \rho) \langle f_0\zeta_j \rangle.$$

В карте $\Theta([\mu_0], \rho_0)$ он имеет послойные координаты

$$(\lambda_1([\mu], \rho), ..., \lambda_{g-1}([\mu], \rho)).$$

Элемент $[\phi(\rho; [\mu])] = p(\phi(z; \rho, [\mu])dz) \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ в специальной карте $\Theta(U_g; \{A_j, B_j\}_{j=1}^g)$ над $\mathbf{T}_g(F) \times U_g$ имеет послойные координаты

$$\xi_j^g = \widetilde{\phi}^g([A_j^\mu, A_g^\mu]) = \int\limits_{z_0}^{[A_j^\mu, A_g^\mu]z_0} \phi(z; \rho, [\mu])dz,$$

$$\eta_j^g = \widetilde{\phi}^g([B_j^\mu, A_g^\mu]) = \int\limits_{z_0}^{[B_j^\mu, A_g^\mu]z_0} \phi(z; \rho, [\mu])dz, j = 1, ..., g-1,$$

где $\widetilde{\phi}^g \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ - любой представитель класса периодов $[\phi(\rho, [\mu])]$ при $[\mu] \in U([\mu_0])$, $\rho \in U_g$. Следовательно, вектор-столбец

$$(\xi_1^g, ..., \xi_{g-1}^g, \eta_1^g, ..., \eta_{g-1}^g)$$

получается как действие слева матрицы $A(\rho, [\mu])$ на вектор-столбец

$$(\lambda_1(\rho, [\mu]), ..., \lambda_{g-1}(\rho, [\mu]).$$

Здесь $j-$ая строка матрицы $A(\rho, [\mu])$ есть

$$(\widetilde{\phi_1}^g(\rho, [\mu])([A_j^\mu, A_g^\mu]), ..., \widetilde{\phi}_{g-1}^g(\rho, [\mu])([A_j^\mu, A_g^\mu]))$$

и $(g+j-1)-$ая строка есть

$$(\widetilde{\phi_1}^g(\rho, [\mu])([B_j^\mu, A_g^\mu]), ..., \widetilde{\phi}_{g-1}^g(\rho, [\mu])([B_j^\mu, A_g^\mu])), j = 1, ..., g-1.$$

Эта матрица порядка $(g-1)\times(2g-2)$ состоит из элементов, голоморфно зависящих от $([\mu], \rho) \in U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$, где

$$\widetilde{\phi_k}^g(\rho, [\mu])([A_j^\mu, A_g^\mu]) = \int\limits_{z_0}^{[A_j^\mu, A_g^\mu]z_0} f_0\zeta_k,$$

$$\widetilde{\phi_k}^g(\rho, [\mu])([B_j^\mu, A_g^\mu]) = \int\limits_{z_0}^{[B_j^\mu, A_g^\mu]z_0} f_0\zeta_k, k = 1, ..., g-1.$$

Аналогично получаются голоморфные матрицы для отображения p в остальных случаях, когда $U(\rho_0) \subset U_l, l = 1, 2, 3, ..., 2g$ [10]. Для доказательства этого только нужно рассматривать коммутаторы вида:

$$[A_1, A_l], ..., \widehat{,} ..., [A_g, A_l],$$

$$[B_1, A_l], ..., \widehat{,} ..., [B_g, A_l].$$

Здесь символ $\widehat{}$ обозначает пропуск $l-$го элемента в обоих строках, если $l = 2, 3, ..., g$. Для $l = g+1, g+2, ..., 2g$ нужно заменить A_l на B_l на вторых местах коммутаторов в этих строках.

Следовательно, p будет голоморфным отображением относительно структур на $\mathbf{P}_{1,0}$ и на G над $\mathbf{T}_g(F) \times (L_g \backslash 1)$.

Теперь нужно доказать, что на фактор-расслоении $G/\mathbf{P}_{1,0} \equiv G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ можно задать структуру голоморфного векторного расслоения, относительно которой естественное отображение $h : G \to G/\mathbf{P}_{1,0}$ будет голоморфным. Сначала покажем, что $p(\mathbf{P}_{1,0})$ является голоморфным векторным подрасслоением в голоморфном векторном расслоении G. Снова достаточно рассмотреть случай, когда $U(\rho_0) \subset U_g$. Над достаточно малой окрестностью $U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$ выберем фиксированный базис $\phi_1(z)dz = f_0\zeta_1, ..., \phi_{g-1}(z)dz = f_0\zeta_{g-1}$ (в слое расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$), голоморфно зависящий от $([\mu], \rho)$. В карте $\Theta([\mu_0], \rho_0)$ он имеет послойные координаты

$$(1, 0, ..., 0), ..., (0, ..., 0, 1) \in \mathbf{C}^{g-1}$$

соответственно. Голоморфное иньективное $\mathbf{C}-$линейное отображение p этот базис переводит в линейно независимую над $\mathbf{C}$ систему

$$\{p(\phi_j(z)dz)\}_{j=1}^{g-1}$$

сечений расслоения G, также голоморфно зависящую от $([\mu], \rho) \in U([\mu_0]) \times$ $\times U(\rho_0)$. В карте $\Theta(U_g; \{A_j, B_j\}_{j=1}^{g})$ сечение $p(\phi_1(z)dz)$ имеет координаты

$$(\xi_1, ..., \xi_{g-1}, \eta_1, ..., \eta_{g-1}) = (1, 0, ..., 0)A^T(\rho, [\mu]) =$$

$$(\widetilde{\phi}_1^g[A_1^\mu, A_g^\mu], ..., \widetilde{\phi}_1^g[A_{g-1}^\mu, A_g^\mu], \widetilde{\phi}_1^g[B_1^\mu, A_g^\mu], ..., \widetilde{\phi}_1^g[B_{g-1}^\mu, A_g^\mu]), ...,$$

сечение $p(\phi_{g-1}(z)dz)$ - координаты $(\widetilde{\phi}_{g-1}^g[A_1^\mu, A_g^\mu], ..., \widetilde{\phi}_{g-1}^g[B_{g-1}^\mu, A_g^\mu])$. Составим матрицу размера $(g-1)\times(2g-2)$ из этих строк. Она имеет ровно $g-1$ линейно независимых строк и столько же независимых столбцов. Рассмотрим эту матрицу при фиксированных $([\mu_0], \rho_0)$. Существует биголоморфный автоморфизм α для $\mathbf{C}^{2g-2}$, переставляющий координаты, такой, что после его естественного действия на столбцы этой матрицы она будет иметь вид $(C_1([\mu_0],\rho_0); C_2([\mu_0],\rho_0))$, где $\det C_1([\mu_0],\rho_0) \neq 0$. В достаточно малой окрестности (обозначим ее также) $U([\mu_0]) \times U(\rho_0)$ имеем $\det C_1([\mu],\rho) \neq 0$. Строки полученной матрицы дают набор линейно независимых сечений в тривиальном расслоении $U([\mu_0]) \times U(\rho_0) \times \times \mathbf{C}^{2g-2}$, голоморфно зависящих от $([\mu],\rho)$, и порождают, для фиксированной точки $([\mu],\rho)$, $(g-1)-$мерное подпространство в $\mathbf{C}^{2g-2}$. Дополним этот набор базисными векторами $e_g, ..., e_{2g-2}$ (постоянными сечениями) до базиса сечений в $U([\mu_0]) \times U(\rho_0) \times \mathbf{C}^{2g-2}$. Получаем квадратную матрицу порядка $2g-2$ вида $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ O & I \end{pmatrix}$, где I - единичная матрица порядка $g-1$. Биголоморфный автоморфизм β этого произведения, который при фиксированных $([\mu],\rho)$ имеет матрицу преобразования вида $\begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ O & I \end{pmatrix}$, переводит указанный базис сечений в стандартный базис сечений $e_1, ..., e_{2g-2}$ для $U([\mu_0]) \times U(\rho_0) \times \mathbf{C}^{2g-2}$. Поэтому в новой карте $\beta\ \alpha\ \Theta(U_g, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g) = \Psi$ (той же структуры голоморфного векторного расслоения) набор голоморфных сечений $p(\phi_1(z)dz), ..., p(\phi_{g-1}(z)dz)$ имеет вид $([\mu],\rho,e_1)$, ..., $([\mu],\rho,e_{g-1})$. Следовательно, получаем послойный изоморфизм

$$\Psi : p(\mathbf{P}_{1,0}) \mid_{U([\mu_0])\times U(\rho_0)} \to U([\mu_0]) \times U(\rho_0) \times (\mathbf{C}^{g-1}; 0) \subset U([\mu_0]) \times U(\rho_0) \times \mathbf{C}^{2g-2},$$

а значит, $p(\mathbf{P}_{1,0})$ является голоморфным векторным подрасслоением ранга $g-1$ в G.

В картах Ψ_k и Ψ_l (над U_k и U_l соответственно) $k,l = 1, ..., 2g$, $k \neq l$, матрица перехода $T_{0,1;k,l}(\rho,[\mu])$ для G имеет вид $\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix}$, так как этот оператор переводит векторы $e_1, ..., e_{g-1}$ в векторы $e_1, ..., e_{g-1}$ соответственно. Здесь матрицы $A = A(\rho,[\mu]) = I, B = B(\rho,[\mu]), D = D(\rho,[\mu])$ порядка $g-1$ голоморфно зависят от $([\mu],\rho) \in (U([\mu_0]) \cap U([\mu_1])) \times$

$\times\,(U_k \cap U_l \cap U(\rho_0))$. При этом $A(\rho,[\mu])$ и $D(\rho,[\mu])$ являются матрицами перехода для $p(\mathbf{P}_{1,0})$ и $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ соответственно [10; 17]. Поэтому $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$ - голоморфное векторное расслоение ранга $g-1$ со слоем

$$H^1(\Gamma_\mu,\rho)/(p(\mathbf{P}_{1,0})\mid_{([\mu],\rho)})$$

над точкой $([\mu],\rho)$. Отображение $h:[\phi(\rho,[\mu])]\to[\phi(\rho,[\mu])]+p(\mathbf{P}_{1,0})\mid_{(\rho,[\mu])}$ в таких картах Ψ будет иметь вид:

$$([\mu],\rho;\xi_1,...,\xi_{g-1};\eta_1,...,\eta_{g-1})\to([\mu],\rho;0,...,0;\eta_1,...,\eta_{g-1}).$$

Следовательно, отображение h будет голоморфным, относительно заданных структур голоморфных векторных расслоений на G и на $G/p(\mathbf{P}_{1,0})$. Теорема доказана.

Обозначим через

$$\mathbf{HP}=\bigcup_{[\mu]\in\mathbf{T}_g,\rho\in(L_g\cup\overline{L}_g)\setminus 1}\Gamma(F_\mu,\mathcal{H}^1(\rho))=$$

$$=\bigcup_{[\mu],\rho\in(L_g\cup\overline{L}_g)\setminus 1}\Gamma(F_\mu,O^{1,0}(\rho))\oplus\Gamma(F_\mu,O^{0,1}(\rho))=\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}\oplus\widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$$

гармоническое расслоение Прима над $\mathbf{T}_g\times((L_g\cup\overline{L_g})\setminus 1)$, где $\overline{L_g}$ – образ группы L_g при отображении комплексного сопряжения $(\rho\to\overline{\rho})$. Это расслоение имеет слои являющиеся прямой суммой двух векторных пространств размерности g.

Теорема 4.3.3. *Эрмитово голоморфное векторное расслоение* $\mathbf{HP}$ *ранга* $2g$ *является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных* $*-$*инвариантных векторных подрасслоений* $\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}$ *и* $\widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$ *ранга* g *над* $\mathbf{T}_g\times((L_g\cup\overline{L_g})\setminus 1)$ *при любом* $g\geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем базис

$$f_0(\rho,[\mu])\zeta_1(z,[\mu])dz,...,f_0(\rho,[\mu])\zeta_g(z,[\mu])dz,$$

дифференциалов Прима для слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, который голоморфно зависит от $[\mu]$ и ρ в достаточно малых окрестностях $U([\mu_0]) \times U(\rho_0) \subset$ $\subset \mathbf{T}_g \times ((L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1)$. Одновременно выберем базис

$$f_0(\overline{\rho}, \overline{[\mu]})\zeta_1(z, [\overline{\mu}])dz, ..., f_0(\overline{\rho}, \overline{[\mu]})\zeta_g(z, [\overline{\mu}])dz,$$

голоморфно зависящий от $[\overline{\mu}]$ и $\overline{\rho}$ в достаточно малых окрестностях $U([\overline{\mu}_0]) \times U(\overline{\rho}_0)$. Здесь $\overline{U(\rho_0)}$ – образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho \to \overline{\rho}$. Это отображение будет автоморфизмом на $L_g \cup \overline{L_g}$. Класс $[\mu]$ имеет модули $(c_1, c_2, ..., c_{3g-3}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$, а класс $\overline{[\mu]}$ имеет модули $(\overline{c_1}, \overline{c_2}, ..., \overline{c_{3g-3}}) \in$ $\in \mathbf{C}^{3g-3}$.

Тогда набор гармонических дифференциалов

$$f_0(\rho, [\mu])\zeta_1(z, [\mu])dz, ..., f_0(\rho, [\mu])\zeta_g(z, [\mu])dz,$$

$$\overline{f_0(\overline{\rho}, [\overline{\mu}])\zeta_1(z, [\overline{\mu}])dz}, ..., \overline{f_0(\overline{\rho}, [\overline{\mu}])\zeta_g(z, [\overline{\mu}], z)dz}$$

будет базис в $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ в достаточно малых окрестностях $U(\mu_0) \times U(\rho_0)$. Таким образом, на комплексном векторном расслоении

$$\mathbf{HP} = \bigcup_{\mu \in \mathbf{T}_g, \rho \in (L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1} \Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) = \widetilde{\mathbf{P}}_{1,0} \oplus \widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$$

ранга $2g$ над $\mathbf{T}_g \times (L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ определено по формуле: $(\phi_1, \phi_2) = i \iint\limits_{\Delta_\mu} (u_1 \overline{u_2} + v_1 \overline{v_2}) dz \wedge d\overline{z}$, где $\Delta_\mu = w^{s[\mu]}(\Delta)$, $s[\mu]$ - глобальное вещественно аналитическое сечение К. Эрла над $\mathbf{T}_g$ [14],$w^{s[\mu]}$ – (нормированное в трех точках) квазиконформное отображение на $\mathbf{C}$, которое имеет характеристику нуль на дополнении к кругу и Δ - фиксированная фундаментальная область для Γ в U; $\phi_j = u_j(z)dz + v_j(z)d\overline{z}$, $j = 1, 2$. Скалярное произведение эрмитово, так как $(\phi_1, \phi_2) = (\overline{\phi_2, \phi_1})$. Легко видеть, что $\mathbf{C}-$линейный оператор $*$ (звезда Ходжа) будет изометрией на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$. Оператор $*$ также изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ на себя и изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ на себя. Относительно этого скалярного произведения пространства $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ и $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ ортогональны, так как, если $\phi_1 = u(z)dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, $\phi_2 = v(z)d\overline{z} \in \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$, тогда $(\phi_1, \phi_2) = \iint\limits_{\Delta} udz \wedge *\overline{v(z)d\overline{z}} = 0$. Векторные расслоения $\widetilde{\mathbf{P}}_{1,0}, \widetilde{\mathbf{P}}_{0,1}$ и $\mathbf{HP}$ являются эрмитовыми голоморфными векторными расслоениями над $\mathbf{T}_g \times (L_g \cup \overline{L_g})\backslash 1$. Теорема доказана.

§4.4. Аналоги теорем де Рама и Ходжа для гармонических дифференциалов Прима

Первая группа $H^1_{DR}(F_\mu, \rho)$ когомологий де Рама на F_μ для ρ определяется как фактор-пространство пространства $\Lambda^1(F_\mu, \rho)$ (всех замкнутых дифференциалов Прима на F_μ класса C^∞ для ρ) по подпространству $dC^\infty(F_\mu, \rho)$ (образ пространства $C^\infty(F_\mu, \rho)$, которое состоит из всех мультипликативных функций на F_μ класса C^∞ для ρ, по оператору дифференцирования d). По лемме 3.2.2 [10] для любого $\rho \in [S^1]^{2g}$ отображение периодов $p : \Lambda^1(F_\mu, \rho)/dC^\infty(F_\mu, \rho) \to H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ корректно определено и инъективно. Из теоремы 3.2.4 [10] для $\rho \in [S^1]^{2g}$ следует, что естественное отображение

$$\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) \to H^1_{DR}(F_\mu, \rho),$$

которое сопоставляет гармоническому дифференциалу Прима ϕ для ρ его класс когомологий $\{\phi + dC^\infty(F_\mu, \rho)\}$, будет инъективным. Составим цепь инъективных $\mathbf{C}-$линейных отображений:

$$\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) \to H^1_{DR}(F_\mu, \rho) \xrightarrow{p} H^1(\Gamma_\mu, \rho).$$

Для $\rho \in [S^1]^{2g}$ комплексные векторные пространства на концах этой цепи имеют одинаковые размерности $2g-2$ при $\rho \neq 1$ и $2g$ при $\rho = 1$. Отсюда получаем

Предложение 4.4.1. (Аналоги теорем де Рама и Ходжа). *Для $\rho \in [S^1]^{2g}$ верно $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1_{DR}(F_\mu, \rho) \cong H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ и для любого замкнутого дифференциала Прима ϕ на F_μ класса C^∞ для ρ существует единственное разложение Ходжа $\phi = \phi_0 + df(z)$, где $\phi_0 \in \Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$, $f(z) \in C^\infty(F_\mu, \rho)$, а также для любого класса периодов $[\psi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ существует замкнутый дифференциал Прима ϕ на F_μ класса C^∞ для ρ такой, что $[\phi] = [\psi]$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$.*

Аналог теоремы Ходжа получен Э. Джеблоу в [20] с использованием сложной техники аналитических линейных расслоений только на фиксированной компактной римановой поверхности. Аналог теоремы де Рама получен ранее Р. Ганнингом в [17; 18] с использованием когомологий с коэффициентами в пучках на фиксированной поверхности F. Наше доказательство не требует такой сложной техники.

Следствие 4.4.1. *Гармоническое расслоение Прима* **HP** *является вещественно-аналитически изоморфным тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times ([S^1]^{2g} \cap U_j)$ для любого $j = 1, ..., 2g$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать утверждение для $\rho \in U_1 = \{\rho : \rho(A_1) \neq 1\}$. Имеем отображения $\phi \xrightarrow{p} [\phi] \to (\phi(A_2), ..., \phi(A_g), \phi(B_2), ..., \phi(B_g))$. Первое отображение p инъективно по предложению 4.1.1 над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g}$. Второе будет инъективно в виду того, что $\phi(A_1) = 0$ и

$$\phi(B_1) = \frac{1}{\sigma(A_1)} \sum_{j=2}^{g} [\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)]$$

над U_1. Причем оба отображения вещественно-аналитически зависят от $([\mu], \rho) \in \mathbf{T}_g \times ([S^1]^{2g} \cap U_1)$. Таким образом, $\mathbf{HP} \cong \mathbf{T}_g \times ([S^1]^{2g} \cap U_1) \times \mathbf{C}^{2g-2}$. Следствие доказано.

Теорема 4.4.1. *Для любого* $[\mu_0] \in \mathbf{T}_g, \rho_0 \in [S^1]^{2g} \backslash 1$ *существуют окрестности* $U([\mu_0]), U(\rho_0) \subset \{[S^1]^{2g} \backslash 1\}$ *такие, что для* $\rho \in U(\rho_0) \cap U_1$ *и* $[\mu] \in U([\mu_0])$ *в* $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ *существует базис гармонических дифференциалов Прима*

$$\phi_1 = \phi_1(z; \rho, [\mu]), ..., \phi_{2g-2} = \phi_{2g-2}(z; \rho, [\mu]),$$

вещественно-аналитически зависящий ρ *и комплексно-аналитически зависящий от* $[\mu]$*, с матрицей периодов, относительно* $A_2, ..., A_g, B_2, ..., B_g$*, вида* I_{2g-2} *(единичная матрица порядка* $2g-2$*).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Над $U(\mu_0) \times U(\rho_0)$ выберем базис гармонических дифференциалов Прима:

$$\widetilde{\phi}_1(z; \rho, [\mu])dz, ..., \widetilde{\phi}_{g-1}(z; \rho, [\mu])dz, \overline{\widetilde{\phi}_1(z; \overline{\rho}, [\overline{\mu}])dz}, ..., \overline{\widetilde{\phi}_{g-1}(z; \overline{\rho}, [\overline{\mu}])dz}$$

на F_μ для ρ, вещественно-аналитически зависящий от ρ (теорема 3.1.5 [10]) и комплексно-аналитически зависящий от $[\mu]$. Составим блочную матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ классических периодов, относительно $A_2, ..., A_g$, B_1, $B_2, ..., B_g$, для этого базиса, где $A = (a_{mk}), B = (b_{ml}), C = (c_{mk})$, $D = (d_{ml}),\ m = 1, ..., g-1, k = 2, 3, ..., g, l = 1, 2, ..., g$, так как для $\rho \in U_1$ можно выбрать представитель в классе периодов такой, что период на A_1 будет 0. Если существует линейная зависимость над $\mathbf{C}$ для $2g-2$ строк, то существует гармонический дифференциал Прима на F_μ для ρ с нулевыми базисными периодами. По предложению 4.1.1 он тождественно равен нулю на F_μ для ρ. Но это невозможно из-за выбора базиса в $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$. Таким образом матрица $\begin{pmatrix} a_{mk} & b_{mk} \\ c_{mk} & d_{mk} \end{pmatrix} = M$, где $m = 1, ..., g-1, k = 2, 3, ..., g$, имеет $2g-2$ линейно независимых над $\mathbf{C}$ строк и ее определитель не равен нулю. Сделав невырожденное линейное преобразование в $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ с матрицей M^{-1}, получим требуемый базис гармонических дифференциалов Прима на F_μ. Теорема доказана.

§4.5. Периоды голоморфных дифференциалов Прима для существенных характеров

Выясним какое минимальное число базисных периодов надо задать, чтобы полностью определить голоморфный дифференциал Прима ϕ на F_μ для существенного характера ρ.

Теорема 4.5.1. *Дифференциал Прима* $\phi \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ *для существенного характера* $\rho, \rho \in U_1$, *и* $[\mu] \in U(\mu_0)$ *единственно определяется "половиной" своих базисных периодов* $\phi(N_{j_1}), ..., \phi(N_{j_{g-1}})$, *где* $\phi(A_1) = 0$,

$$\{N_1, ..., N_g, N_{g+1}, ..., N_{2g}\} = \{A_1, A_2, ..., A_g, B_1, B_2, ..., B_g\}$$

и $\{j_1, ..., j_{g-1}\}$ *- подмножество из* $g-1$ *элементов в* $\{2, 3, ..., g, g+2, g+3, ..., 2g\}$, *зависящее от выбора базиса в* $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho^{-1}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [19; 10], что голоморфный дифференциал Прима ϕ на F_μ для существенного характера ρ единственно определяется своим классом периодов $[\phi]$, а класс $[\phi]$ при $\rho \in U_1$ единственно задается через свои базисные периоды $\phi(A_1) = 0, \phi(A_2), ..., \phi(A_g)$, $\phi(B_1), ..., \phi(B_g)$. Найдем минимальное число базисных периодов, чтобы они полностью определяли наш дифференциал Прима ϕ.

Пусть ϕ - голоморфный дифференциал Прима на F_μ для существенного характера $\rho, \rho \in U_1$. Выберем базис голоморфных дифференциалов Прима $\phi_1, ..., \phi_{g-1}$ на F_μ для характера $\rho^{-1} \in U_1$. Тогда классические базисные периоды $\phi_{z_0}(A_1), ..., \phi_{z_0}(A_g)$, $\phi_{z_0}(B_1), ..., \phi_{z_0}(B_g)$ связаны системой уравнений:

$$0 = \iint\limits_{\Delta} \phi_m \wedge \phi, m = 1, ..., g-1,$$

$$\sum_{j=1}^{g} [\sigma(B_j)\phi_{z_0}(A_j) - \sigma(A_j)\phi_{z_0}(B_j)] = 0.$$

По теореме 4.1.1 первые $g-1$ уравнений можно записать в виде системы из $g-1$ линейных уравнений с $2g$ неизвестными $\phi_{z_0}(A_1),...,\phi_{z_0}(A_g)$, $\phi_{z_0}(B_1),...,\phi_{z_0}(B_g)$:

$$\sum_{j=1}^{g}\{[\phi_m(C_1...C_{j-1})(1-\rho(B_j))-\rho(B_j)(\phi_m(C_j)+\phi_m(B_j))]\phi_{z_0}(A_j)+$$

$$+[(\rho(A_j)-1)\phi_m(C_1...C_{j-1})+\rho(A_j)\phi_m(A_j)-\phi_m(C_j)]\phi_{z_0}(B_j)\}=0, \quad (*)$$

$m=1,...,g-1.$

Если $\phi_{z_0}(A_1)\neq 0$, то выберем другую базисную точку z_1 с условием $\phi_{z_1}(A_1)=0$, где $\frac{1}{\sigma(A_1)}\phi_{z_0}(A_1)+f(z_0)=f(z_1)$, $\phi=df(z)$ на U. Зафиксировав z_1, для каждого $m=1,...,g-1$, отдельно выберем интеграл Прима $f_m(z)$ для ϕ_m с условием $(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)=0$. Так, если $(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)\neq 0$, то заменим $f_m(z)$ на $f_m(z)+c_m$ с условием $c_m=-\frac{1}{\sigma(A_1)}(\phi_m)_{f_m,z_1}(A_1)$. В дальнейшем для краткости записи будем опускать индексы f_m и z_1 у периодов.

После этого выбора, предыдущая система $(*)$ будет иметь матрицу вида $(a_{mk};b_{ml})$, где

$$a_{mk}=[\phi_m(C_1...C_{k-1})(1-\rho(B_k))-\rho(B_k)(\phi_m(C_k)+\phi_m(B_k))];$$

$$b_{ml}=[\phi_m(C_1...C_{l-1})(\rho(A_l)-1)+\rho(A_l)\phi_m(A_l)-\phi_m(C_l)],$$

$k=2,...,g, l=1,...,g, m=1,...,g-1$. Покажем, что ранг этой матрицы равен $g-1$. От противного, пусть ранг строго меньше, чем $g-1$. Тогда существует линейная комбинация из строк этой матрицы, равная нулю. Из этого получаем систему уравнений для некоторого голоморфного дифференциала Прима $\widetilde{\phi}$ для ρ^{-1} с классом периодов $[\widetilde{\phi}]$ на F_μ :

$$\widetilde{\phi}(C_1)\sigma(B_2)-\rho(B_2)(\widetilde{\phi}(C_2)+\widetilde{\phi}(B_2))=0$$

$$\widetilde{\phi}(C_1C_2)\sigma(B_3)-\rho(B_3)(\widetilde{\phi}(C_3)+\widetilde{\phi}(B_3))=0$$

....

$$\widetilde{\phi}(C_1...C_{g-1})\sigma(B_g) - \rho(B_g)(\widetilde{\phi}(C_g) + \widetilde{\phi}(B_g)) = 0$$

$$-\widetilde{\phi}(1)\sigma(A_1) + \rho(A_1)\widetilde{\phi}(A_1) - \widetilde{\phi}(C_1) = 0$$

$$-\widetilde{\phi}(C_1)\sigma(A_2) + \rho(A_2)\widetilde{\phi}(A_2) - \widetilde{\phi}(C_2) = 0$$

....

$$-\widetilde{\phi}(C_1...C_{g-1})\sigma(A_g) + \rho(A_g)\widetilde{\phi}(A_g) - \widetilde{\phi}(C_g) = 0.$$

Учитывая, что $\widetilde{\phi}(1) = 0, \sigma(A_1) \neq 0, \widetilde{\phi}(A_1) = 0$, из $g-$го уравнения получим $\widetilde{\phi}(C_1) = 0$ и $\widetilde{\phi}(B_1) = 0$. Из первого и $(g+1)-$го уравнения выводится, что

$$-\frac{\sigma(B_2)}{\rho(B_2)}\widetilde{\phi}(A_2) + \widetilde{\phi}(B_2)\frac{1}{\rho(A_2)} = 0$$

$$\left(\rho(A_2) + \frac{\sigma(B_2)}{\rho(B_2)}\right)\widetilde{\phi}(A_2) - \frac{\sigma(A_2)}{\rho(A_2)}\widetilde{\phi}(B_2) = 0.$$

Отсюда $\widetilde{\phi}(A_2) = 0 = \widetilde{\phi}(B_2)$. Затем из $(m-1)-$го и $(g+m-1)-$го уравнения получаем систему

$$\widetilde{\phi}(C_m) = -\widetilde{\phi}(B_m)$$

$$\rho(A_m)\widetilde{\phi}(A_m) - \widetilde{\phi}(C_m) = 0$$

или систему

$$-\frac{\sigma(B_m)}{\rho(B_m)}\widetilde{\phi}(A_m) + \widetilde{\phi}(B_m)\left(1 + \frac{\sigma(A_m)}{\rho(A_m)}\right) = 0$$

$$\rho(A_m)\widetilde{\phi}(A_m) + \widetilde{\phi}(B_m) = 0.$$

Таким образом $\widetilde{\phi}(A_m) = 0 = \widetilde{\phi}(B_m)$ для $m = 3, 4, ..., g$. Следовательно голоморфный дифференциал Прима $\widetilde{\phi}(z)$ для ρ^{-1} будет иметь класс периодов $[\widetilde{\phi}] = 0$. Поэтому $\widetilde{\phi} = 0$ на Δ_μ, но это противоречит линейной независимости дифференциалов Прима $\phi_1, ..., \phi_{g-1}$ для ρ^{-1} на F_μ.

Далее по теореме о ранге матрицы будет существовать точно $g-1$ линейно независимых столбцов матрицы системы $(*)$. Выполняя элементарные преобразования над всеми столбцами, кроме $g-$столбца, получаем, что эта матрица эквивалентна матрице Прима из базисных периодов для базиса $\phi_1, ..., \phi_{g-1} : (\phi_m(A_k); \phi_m(B_l))$, где $m = 1, ..., g-1, k = 2, ..., g, l = 1, ..., g$. В матрице Прима столбец $(\phi_1(B_1), ..., \phi_{g-1}(B_1))'$ является линейной комбинацией остальных столбцов. Введем обозначения:

$$\{N_1, ..., N_g, N_{g+1}, ..., N_{2g}\} = \{A_1, A_2, ..., A_g, B_1, B_2, ..., B_g\}$$

(это равенство упорядоченных наборов). Существует ровно $g-1$ индексов $i_1, ..., i_{g-1}$ из $\{2, 3, ..., g, g+2, g+3, ..., 2g\}$, которые соответствуют линейно независимым столбцам матрицы для системы $(*)$. Тогда положив $\phi(N_j) = 0$ для всех $j \notin \{i_1, ..., i_{g-1}\}, j \in \{2, 3, ..., g, g+1, g+2, ..., 2g\}$, из системы $(*)$ получим однородную систему из $g-1$ уравнений с неизвестными $\phi(N_{i_1}), ..., \phi(N_{i_{g-1}})$ и определителем не равным 0. Отсюда следует, что все $\phi(N_{i_1}), ..., \phi(N_{i_{g-1}})$ тоже равны нулю. Поэтому при этих условиях $[\phi] = 0$ и ϕ тождественно равен нулю на F_μ для ρ.

Рассмотрим систему с расширенной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}.........a_{1g}b_{11}................b_{1g} \\ ... \\ ... \\ ... \\ a_{g-1,1}a_{g-1,2}...a_{g-1,g}b_{g-1,1}....b_{g-1,g} \\ \sigma(B_1)\sigma(B_2)...\sigma(B_g) - \sigma(A_1)... - \sigma(A_g) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(A_1) \\ ... \\ \phi(A_g) \\ \phi(B_1) \\ ... \\ \phi(B_g) \end{pmatrix} = 0.$$

Взяв подходящую линейную комбинацию первого и $(g+1)-$го столбцов, получим вместо $(g+1)-$го столбца новый столбец, у которого все элементы равны нулю, кроме последнего. Этот последний элемент будет иметь вид $\frac{-\sigma(B_1)\sigma(A_1)}{\rho(B_1)} - \sigma(A_1) = \frac{-\sigma(A_1)}{\rho(B_1)} = m_1 \neq 0$ при $\rho \in U_1$ и

$[\mu] \in U([\mu_0])$. Уже доказано, что ранг матрицы $(a_{mk}; b_{ml})$, где $m = 1, ..., g-1, k = 2, 3, ..., g, l = 1, 2, ..., g$, равен $g-1$, а значит, она имеет ровно $g-1$ линейно независимых столбцов. Перестановкой столбцов расширенной матрицы поставим эти линейно независимые столбцы с номерами $i_1, ..., i_{g-1} \subset \{2, 3, ..., g, g+2, g+3, ..., 2g\}$ на место $2, 3, ..., g$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} n_{1,i_1} \ldots\ldots\ldots\ldots n_{1,i_{g-1}} & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ n_{g-1,i_1} \ldots\ldots\ldots\ldots n_{g-1,i_{g-1}} & 0 \\ * \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots * & m_1 \end{pmatrix}$$

где, например, $\{a_{11}, ..., a_{1g}, b_{11}, ..., b_{1g}\} = \{n_{11}, ..., n_{1,2g}\}$, имеет определитель не равный нулю при $\rho, \rho \in U_1$ и $[\mu] \in U([\mu_0])$. Поскольку $\phi(A_1) = 0$, то, взяв $\phi(N_j) = 0$, $j \in \{2, 3, ..., g, g+2, g+3, ..., 2g\}, j \notin \{i_1, ..., i_{g-1}\}$, получим, что $\phi(N_{i_k}) = 0, k = 1, ..., g-1$. Поэтому $[\phi] = 0$, а значит и $\phi = 0$ на Δ_μ. Теорема доказана.

Напомним, что в теореме 3.1.3 [10] для базиса $\phi_1, ..., \phi_{g-1}$ в пространстве $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho^{-1}))$ при $\rho \in U_1 \backslash L_g$ и $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ исследовалась матрица из коммутаторных периодов

$$(\phi_m([A_k, A_1]); \phi_m([B_k, A_1])) = \sigma(A_1)(\phi_m(A_k); \phi_m(B_k)),$$

$\sigma(A_1) \neq 0$, где $m = 1, 2, ..., g-1, k = 2, 3, ..., g$. Последняя матрица имеет ранг $g-1$, и, переставляя линейно независимые столбцы с номерами $i_1, ..., i_{g-1}$ на левую половину этой матрицы, получим эквивалентную матрицу $(\phi_m(N_{i_k}))$, $m = 1, 2, ..., g-1, k = 1, 2, ..., 2g-2$. Здесь $i_1, ..., i_{2g-2}$ - перестановка символов $2, 3, ..., g, g+2, g+3, ..., 2g$. Обозначим эту матрицу (M_1, M_2), $\det M_1 \neq 0$. Взяв новый базис

$$(\widetilde{\phi}_1, ..., \widetilde{\phi}_{g-1})' = M_1^{-1}(\phi_1, ..., \phi_{g-1})',$$

где $'$ означает транспонирование, получим так называемый канонический базис голоморфных дифференциалов Прима, который имеет матрицу периодов вида $(I_{g-1}, M_1^{-1}M_2)$, относительно некоторой перестановки для $a_2, ..., a_g$, $b_2, ..., b_g$ на F_μ. Таким образом доказано

Следствие 4.5.1. *Для любого* $\rho_0 \notin L_g$ *и* $\mu_0 \in \mathbf{T}_g$ *существуют окрестности* $U(\rho_0) \subset Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\backslash L_g$ *и* $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ *такие, что для* $\rho \in U(\rho_0)$ *и* $\mu \in U([\mu_0])$ *существует канонический базис голоморфных дифференциалов Прима на* F_μ, *голоморфно зависящий от* ρ *и* $[\mu]$ *при любом* $g \geq 2$.

Заметим, что последнее следствие ранее получено Р. Ганнингом [18] для фиксированной поверхности, но его доказательство требует построения базиса голоморфных дифференциалов Прима через сложный аппарат так называемых обобщенных тэта-функций и базис голоморфно зависит только от характеров. Наше доказательство использует другой базис голоморфных дифференциалов Прима, который зависит голоморфно не только от характеров, но и от модулей компактных римановых поверхностей.

Следствие 4.5.2. *Пусть* ρ *удовлетворяет условиям* $\rho^2 = 1, \rho(A_1) = -1$ *и* $[\mu] \in U(\mu_0)$. *Тогда столбцы в матрице* $\{(a_{ij}); (b_{ij})\}_{i=1,...,(g-1); j=2,...,g}$ *периодов для базиса голоморфных дифференциалов Прима на* F_μ *для* ρ *из следствия 4.5.1, будут* $\mathbf{R}-$*линейно независимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. От противного. Предположим, что эта матрица, представленная как набор столбцов $(\pi_1, ..., \pi_{2g-2})$, имеет $\mathbf{R}-$линейно зависимые столбцы, т. е. существуют $x_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, ..., 2g-2$, (не все нули) и $x_1\pi_1 + ... + x_{2g-2}\pi_{2g-2} = 0$, где $\pi_j = \pi_j([\mu], \rho)$. Из-за выбора специального базиса в $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ имеем $x_1\overline{\pi_1(\overline{[\mu]},\overline{\rho})} + ... + x_{2g-2}\overline{\pi_{2g-2}(\overline{[\mu]},\overline{\rho})} = 0$. Образуем квадратную матрицу $\begin{pmatrix} \pi_1([\mu],\rho) ... \pi_{2g-2}([\mu],\rho) \\ \overline{\pi_1(\overline{[\mu]},\overline{\rho})} ... \overline{\pi_{2g-2}(\overline{[\mu]},\overline{\rho})} \end{pmatrix} = M$ порядка $2g-2$. Из предыдущих двух равенств следует, что существует линейная комбинация из $2g-2$ столбцов с вещественными коэффициентами $x_j, j = 1, ..., 2g-2$, которая равна 0. Следовательно, ранг M меньше, чем $2g-2$. Поэтому существуют комплексные числа $(z_1, ..., z_{g-1}, w_1, ..., w_{g-1})$ (не все нули) такие, что существует линейная комбинация из $2g-2$ строк с этими коэффициентами равная нулю, т. е.

$$\int\limits_{N_i} \left(\sum_{j=1}^{g-1} z_j\phi_j(z;\rho,[\mu])dz + \sum_{j=1}^{g-1} w_j\overline{\phi_j(z;\overline{\rho},\overline{[\mu]})dz} \right) = 0, i = 1, ..., 2g.$$

Положив

$$\varphi = \sum_{j=1}^{g-1} z_j\phi_j(z;\rho,[\mu])dz, \psi = \sum_{j=1}^{g-1} \overline{w_j}\phi_j(z;\overline{\rho},\overline{[\mu]})dz,$$

получаем равенства $\int\limits_{N_i} \varphi + \overline{\psi} = 0, i = 1, ..., 2g$. Поэтому из леммы 4.1.1 следует, что $\varphi + \overline{\psi} = df, f \in C^\infty(F_\mu, \rho)$. По предложению 4.1.1 имеем $\varphi = 0 = \psi$ на F. Но это противоречит либо $\mathbf{C}-$линейной независимости $\phi_1(z;\rho,[\mu])dz, ..., \phi_{g-1}(z;\rho,[\mu])dz$, либо $\mathbf{C}-$линейной независимости $\overline{\phi_1(z;\overline{\rho},\overline{[\mu]})dz}, ..., \overline{\phi_{g-1}(z;\overline{\rho},\overline{[\mu]})dz}$. Следствие доказано.

Для таких ρ (связанных со спинорными структурами и смотри также пример [15; с. 350]) получается, что столбцы $\pi_1, ..., \pi_{2g-2}$ задают целочисленную решетку $\widetilde{L}$ максимального ранга в $\mathbf{C}^{g-1}$ и $\mathbf{C}^{g-1}/\widetilde{L}$ - комплексный тор размерности $g-1$. Его естественно называть многообразием Якоби-Прима для F_μ.

Замечание 4.5.1. Пространство Торелли Υ_g определяется как фактор пространство $\mathbf{T}_g(F)/\tau_g$, где группа Торелли τ_g - нормальная подгруппа в модулярной группе Тейхмюллера $Mod\ \mathbf{T}_g$, состоящая из элементов тождественно действующих на первой группе гомологий $H_1(F_\mu, \mathbf{Z})$ поверхности F_μ [1; 11]. Так как группа τ_g действует свободно на $\mathbf{T}_g(F)$, т. е. без неподвижных точек, то определено естественное неразветвленное голоморфное накрытие $\mathbf{T}_g(F) \to \Upsilon_g$ [1; 11]. Группа преобразований наложения этого накрытия естественно действует как группа биголоморфных автоморфизмов пространства $\mathbf{T}_g(F) \times (Hom(H_1(F, \mathbf{Z}), \mathbf{C}^*)\backslash 1)$ (тождественно на втором сомножителе).

Поэтому все предыдущие теоремы остаются верными для естественно определенных над $\Upsilon_g \times (L_g \cup \overline{L_g}\backslash 1)$ ($\Upsilon_g \times ([S^1]^{2g}\backslash 1)$ расслоений Прима и Ганнинга, так как

$$Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*) \cong Hom(\Gamma_\mu/[\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C}^*) = Hom(H_1(F_\mu, \mathbf{Z}), \mathbf{C}^*).$$

Список литературы

1. Альфорс Л. В., Берс, Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. – М., ИЛ, 1961.

2. Бейкер Г.Ф. Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций.– М.: МЦНМО, 2008.

3. Головина М.И. Дивизоры дифференциалов Прима на римановой поверхности. Вестник КемГУ, N 3/1, 2011. С. 193–198.

4. Дубровин Б.А. Римановы поверхности и нелинейные уравнения. – М., МГУ, 1986.

5. Кричевер И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. Успехи матем. наук. 1977. Т. 32, Вып. 6. С. 180–208.

6. Кричевер И.М., Новиков С.П. Алгебра типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях. Функцион. анализ и его приложения. 1989. Т.23. В.1. С. 24 – 40.

7. Монахов В.Н., Семенко Е.В. Краевые задачи псевдодифференциальных операторов на римановых поверхностях. – М., Физматлит., 2003.

8. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.– М. ИЛ.: 1960.

9. Тулина М.И. Однозначные дифференциалы и специальные дивизоры дифференциалов Прима. Сибирский матем. ж., 2013, т. 54, N 4, С. 914 – 931.

10. Чуешев В.В. Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2 – Кемерово, КемГУ, 2003.

11. Чуешев В.В. Пространства Шоттки, Кебе и Тейхмюллера. Геометрическая теория функций. LAMBERT Academic Publishing, 2012, Saarbruecken, Deutschland, 427 p.

12. Appell, P. Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application an developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques. Acta Math. – 1890. – Vol. 13, n. 3/4. P. 1–174.

13. Bennama H. Base de differentielles de premiere espece des courbes $y^q = \prod_{i=0}^{p}(x-a_i)^{\alpha_i}$: Application aux points de Weierstrass. Journal of Algebra, 1998, v.203, P.261–269.

14. Earle C.J. Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties. Annals of Mathematics. 1978. V. 107. P. 255–286.

15. Farkas, H. M., Kra, I. Riemann surfaces. – Grad. Text's Math.. – V. 71. – New-York, Springer, 1992.

16. Fay J. Analytic Torsion and Prym differential. Proc. of the 1978 Stony Brook Conf., Princeton Univ. Press, Princeton, 1980, P. 107–122.

17. Gunning R.C. Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press., 1967.

18. Gunning R. C. Riemann surfaces and generalized theta functions. Ergebnisse Math. Bd. 91. Berlin 1976.

19. Gunning R.C. On the period classes of Prym differentials. J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153 – 171.

20. Jablow E. An analogue of the Rauch variational formula for Prym differentials. Israel J. of Math. 1989. V. 65. N 3. P. 323 – 355.

21. Jorgensson J. Analytic torsion for line bundle on Riemann surface. Duke Math. J. 1991. V. 62. N 3. P. 527 – 549.

22. Kempf G. A property of the periods of a Prym differential. Proc. of the Amer. Math. Soc. 1976. V.54. P. 181 – 184.

23. Prym F., Rost G. Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann's. Leipzig: Teubner, 1911.

Список работ автора по теме диссертации.

Список тезисов

1. Пушкарева Т.А. *Голоморфные дифференциалы на специальных римановых поверхностях* // XLVIII Международная научная студенческая конференция "Студент и наусно-технический прогресс"/ Новосибирск, 2010, С. 105.

2. Пушкарева Т.А. *Голоморфные дифференциалы на специальных римановых поверхностях* // VI Всесибирский конгресс женщин - математиков / Красноярск, 2010, С. 362-364.

3. Пушкарева Т.А. *Базисы голоморфных дифференциалов на специальных римановых поверхностях* // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу / Горно-Алтайск, 2010, С. 59.

4. Пушкарева Т.А. *Классы периодов гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности* // Международная школа-конференция по геометрии и анализу / Кемерово, КемГУ, 2011, С.1-2

5. Пушкарева Т.А. *Periods of harmonic Prym differentials on a variable Rietmann surface* // 8-й Международный конгресс ISAAK 2011 / Москва, 2011, С. 60.

6. Пушкарева Т.А. *Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на переменной компактной римановой поверхности* // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу / Горно-Алтайск, 2011, С. 40-41.

7. Пушкарева Т.А. *Голоморфные дифференциалы на специальных римановых поверхностях.* // Материалы десятой международной Казанской летней научной школы-конференции / Казань, 2011, С. 293-294.

8. Пушкарева Т.А. *Вычеты дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности* // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу / Горно-Алтайск, 2012, С. 42-43.

9. Пушкарева Т.А. *Теоремы о вычетах для дифференциалов Прима любого порядка* // IV российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам / СФУ, Красноярск, 2012, С. 58-59.

10. Пушкарева Т.А. *Гармонические дифференциалы Прима для нормированных характеров* // 4-я международная конференция (90-лет Л.Д. Кудрявцеву) / РУДН, Москва, 2013, С. 354-355.

11. Пушкарева Т.А. *Гармонические дифференциалы Прима и расслоение Ганнинга* // Дни геометрии в Новосибирске, 2013 / Новосибирск, 2013, С. 70.

Список статей

1. Пушкарева Т.А. *Базис голоморфных дифференциалов на некоторых специальных римановых поверхностях* // Сборник научных трудов кафедры математического анализа Г-АГУ / Горно-Алтайск. N 2, 2010, С. 65-78.

2. Пушкарева Т.А., Чуешев В.В. *Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на переменной компактной римановой поверхности* // Вестник КемГУ / Кемерово, 2011, т. 3/1, С.211-216.

3. Пушкарева Т.А. *Вычеты и элементарные дифференциалы Прима на компактной римановой поверхности* // Вестник НГУ / Новосибирск, т. 13, № 2, 2013, С.99–118.

4. Пушкарева Т.А. *Билинейные соотношения для периодов дифференциалов Прима на римановой поверхности* // Вестник НГУ. Новосибирск, т. 14, № 1, 2014, С. 66 – 83.

5. Пушкарева Т.А., Чуешев В.В. *Пространство гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности* // Сибирский матем. журнал. т.55, N 2 ,2014, с. 379 – 395.