Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Томский государственный университет»

На правах рукописи

Тимошенко Егор Александрович

ИДЕМПОТЕНТНЫЕ РАДИКАЛЫ В КАТЕГОРИИ МОДУЛЕЙ. CSP-КОЛЬЦА И МОДУЛИ НАД НИМИ

01.01.06 — Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор Крылов Пётр Андреевич

Томск — 2015

Оглавление

Введение

Актуальность темы. В работе [1] Андрунакиевич и Рябухин писали, что «при изучении алгебраических систем одной из основных задач является... построение соответствующей структурной теории. Структурные теоремы сводят изучение рассматриваемых алгебраических систем к изучению более “просто устроенных”. ⟨...⟩ Одной из конструкций, осуществляющих подобное сведение, и является радикал». Начало общей теории радикалов (для алгебр, колец и решёток) положили в 1950-х годах Курош [18] и Амицур [43, 44, 45]. С тех пор теория радикалов распространилась и на другие структуры, среди которых модули и группы занимают одно из самых первых мест.

На зрелость связанного с радикалами модулей направления указывает, в частности, существование заметного количества монографий по этой теме: Мишина и Скорняков [22], Кашу [12, 13], Ламбек [74], Стенстрём [82], Бицан, Кепка и Немец [49], Голан [64] и некоторые другие. В работах отечественных (Курош, Рябухин, Иванов) и зарубежных специалистов по алгебре (Гарднер, Диксон, Гёбель, Шелах и т. д.) рассматриваются и радикалы абелевых групп (т. е. модулей над кольцом $\mathbf{Z}$).

С другой стороны, во многих работах исследуются взаимосвязи между свойствами модулей и абелевых групп. В своей статье [80] Шульц определил E-*кольца* как кольца R со свойством $\mathrm{Hom}_R(R,R) = \mathrm{Hom}(R,R)$. Позднее это определение было распространено на модули: A_R называют E-*модулем*, если $\mathrm{Hom}_R(R,A) = \mathrm{Hom}(R,A)$. Одной из наиболее подробных работ о E-модулях является статья Пирса [76]. Основные результаты, относящиеся к E-кольцам и E-модулям, отражены и в книге Крылова, Михалёва и Туганбаева [72].

В диссертации исследуются радикалы, определяемые при помощи Hom и $\otimes$ — важнейших модульных функторов. Крылов и Приходовский в [15, 23] ввели понятия $\mathrm{E}(e)$-модуля и $\mathrm{T}(e)$-модуля следующим образом. Пусть задан гомоморфизм колец $e\colon S \to R$, тогда каждый R-модуль можно естественным образом превратить в (притягивающий) S-модуль. Говорят, что A_R является Е(e)-*модулем* (Т(e)-*модулем*), если выполняется $\mathrm{Hom}_S(R, A) = \mathrm{Hom}_R(R, A)$ (соответственно выполняется $A \otimes_S R = A \otimes_R R$). В диссертационной работе, в частности, определяется (обобщённый) Е-радикал, который по сути сводит воедино аналогичный радикал, рассматривавшийся Пирсом в его статье [76], и Е(e)-модули из [15, 23]. Двойственным образом в диссертации при помощи Т(e)-модулей вводится Т-радикал.

В своей работе [71] Кашу исследовал вопрос об аппроксимации данного радикала «наиболее близким» к нему радикалом, обладающим в каком-либо смысле «хорошими» свойствами. В диссертации решается вопрос, как можно аппроксимировать порождённый (копорождённый) произвольным S-модулем радикал при помощи радикала, порождённого (копорождённого) каким-либо S-S-бимодулем, и описываются все кольца S, для которых «самый близкий» радикал всегда будет совпадать с исходным радикалом. Это, в свою очередь, позволяет получить больше информации о Е-радикале, Т-радикале, а также о связанных с ними модулях.

При исследовании абелевых групп часто полезно рассматривать их как модули над подходящими кольцами (подробнее об этом важном направлении алгебры см. уже упомянутую книгу [72]). В работах Фомина [57] и Крылова, Пахомовой и Подберезиной [14] были независимо определены кольца псевдорациональных чисел. В [14] существенно использовался тот факт, что всякая sp-*группа* (т. е. редуцированная смешанная группа, допускающая сервантное вложение в прямое произведение своих примарных компонент такое, что при этом вложении любой элемент конечного порядка переходит сам в себя) есть модуль над таким кольцом. В работе Фомина [58] факторно делимые группы (A называют *факторно делимой группой*, если A не содержит отличных от 0 периодических делимых подгрупп и содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что факторгруппа A/F является периодической и делимой) также рассматриваются как модули над кольцом псевдорациональных чисел. Значимость факторно делимых групп проявляется, кроме прочего, в том, что образуемая ими категория будет двойственна категории, объекты которой — группы без кручения конечного ранга [58].

В связи со сказанным крайне важно исследовать модули над кольцами псевдорациональных чисел. В [37] Чегляковой описаны инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел кохарактеристики $(\infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$; Царев в работе [33] получил описание плоских модулей над тем же кольцом. Отметим, что модули над кольцами псевдорациональных чисел имеют много общего с обычными абелевыми группами: у таких модулей есть свои аналоги примарных компонент, делимости, редуцированности и ранга без кручения.

Царев в [35] отмечал: «...в силу оригинальности и красоты результатов теория модулей над кольцом псевдорациональных чисел заслуживает и независимого внимания. ...На сегодняшний день существуют конструкции, обобщающие кольцо псевдорациональных чисел». В качестве конструкций такого рода Крылов предложил рассматривать сперва кольца псевдоалгебраических чисел (таким кольцам и модулям над ними была посвящена диссертационная работа [8]), а затем csp-кольца (у каждого кольца псевдорациональных чисел базовым полем служит $\mathbf{Q}$, у кольца псевдоалгебраических чисел — конечное алгебраическое расширение поля $\mathbf{Q}$, у csp-кольца — любое поле). Настоящая диссертация во многом является продолжением перечисленных выше трудов. В частности, дано полное описание проективных модулей над произвольным csp-кольцом, а описание плоских модулей, полученное Царевым в статье [33], обобщено в диссертационной работе на случай csp-колец.

Важным направлением алгебры является решение проблем реализации (в общей постановке теорема реализации для колец эндоморфизмов говорит, что каждое кольцо из какого-либо класса изоморфно кольцу эндоморфизмов подходящего модуля или абелевой группы из заданного класса). В 1963 году опубликованы знаменитые теоремы Корнера [31, 53, 72], в одной из которых утверждается, что любое счётное редуцированное кольцо без кручения представимо в виде кольца эндоморфизмов редуцированной абелевой группы без кручения. В 1980–1990-х годах исследование проблем реализации составляло уже одну из основных частей теории колец эндоморфизмов. Благодаря ряду работ удалось снять предположение о счётности кольца из теоремы Корнера (см. работу Дугаса и Гёбеля [56] и монографию Гёбеля и Трлифая [63]).

Исследуются также и проблемы реализации для колец эндоморфизмов в категории Уокера. Известно, скажем (см. монографию Крылова, Михалёва и Туганбаева [72]), что каждое счётное редуцированное кольцо без кручения может быть представлено в виде кольца эндоморфизмов в категории Уокера какой-либо счётной редуцированной группы, которая является расширением периодической группы при помощи ненулевой делимой группы без кручения. В диссертации получены теоремы, позволяющие представлять заданное поле как базовое поле подходящего csp-кольца (что, в свою очередь, даёт возможность реализовать это поле как кольцо эндоморфизмов в категории Уокера и как $\mathbf{Q}$-алгебру квазиэндоморфизмов sp-группы с циклическими примарными компонентами — а это существенно обобщает один из результатов из работы Альбрехта, Гётерса и Уиклесса [42]; см. также [72, §30]). При доказательстве указанных теорем в рамках направления «теоретико-множественные методы в алгебре» (подробнее см. книгу Эклофа [40]; самым известным результатом в данном направлении является полученное Шелахом [81] решение проблемы Уайтхеда) автором был создан новый раздел, который связан с применением кардинальных характеристик континуума к изучению полей, колец и многочленов; кардинальные характеристики, первоначально появившиеся в теории множеств и топологии (см. обзорный труд Бласса [51]), в работах по алгебре пока нечасты.

Достаточно хорошо известно [12], что в категории модулей над данным кольцом все идемпотентные радикалы составляют большую решётку; статьи, в которых давалось бы полное описание этой большой решётки, встречаются реже (примером может служить работа [48], в которой Бицан, Кепка, Немец и Ямбор получили полную характеризацию всех колец, в категории модулей над которыми есть в точности два идемпотентных радикала). В диссертации даётся описание решётки $\otimes$-радикалов категории абелевых групп и описание решётки всех идемпотентных радикалов категории модулей над csp-кольцом, а также установлены некоторые решёточные свойства таких радикалов.

Цели и задачи. 1. В категории абелевых групп описать $\otimes$-радикалы, а также образуемое такими радикалами частично упорядоченное множество. Изучить решёточные свойства $\otimes$-радикалов категории абелевых групп.

2. Ответить на вопрос, при каких условиях на кольцо S каждый идемпотентный радикал категории S-модулей, в каком-либо смысле порождённый некоторым S-модулем, будет порождён также подходящим S-S-бимодулем.

3. Выяснить, при каких условиях данное поле может служить базовым полем некоторого csp-кольца.

4. Описать проективные и плоские модули над csp-кольцом.

5. В категории модулей над csp-кольцом дать описание идемпотентных радикалов и образуемого ими частично упорядоченного множества.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории абелевых групп и теории колец и модулей, для исследования идемпотентных радикалов применяются также методы теории решёток. Разработаны методы теоретико-множественного характера, позволившие, применяя кардинальные характеристики континуума, доказать тот факт, что базовые поля csp-колец могут иметь достаточно большую мощность; также развиты методы, дающие возможность исследовать некоторые модули над произвольным csp-кольцом, используя матрицы и определители с элементами из этого кольца.

Научная новизна. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Описаны $\otimes$-радикалы категории абелевых групп и решётка, которая состоит из этих радикалов.

2. Установлено, что идемпотентный радикал категории абелевых групп будет $\otimes$-радикалом в точности тогда, когда его радикальный класс обладает свойством замкнутости относительно сервантных подгрупп.

3. Показано, что в категории абелевых групп совпадают «решёточное» и «поточечное» пересечения $\otimes$-радикалов.

4. Доказано, что идемпотентный радикал, $\otimes$-порождённый каким-либо S-модулем, обязательно $\otimes$-порождён также подходящим S-S-бимодулем.

5. Получена характеризация колец, в категории модулей над которыми всякий идемпотентный радикал, порождённый (копорождённый) каким-либо S-модулем, порождён (копорождён) также подходящим S-S-бимодулем.

6. Показано, что всякое поле характеристики нуль, мощность которого не превосходит кардинальной характеристики $\mathfrak{b}$, есть базовое поле какого-то csp-кольца.

7. Получено описание проективных модулей над csp-кольцом (на языке кардинальных инвариантов).

8. Получены описание плоских модулей и критерий чистоты подмодуля в категории модулей над csp-кольцом.

9. В категории модулей над csp-кольцом дано описание идемпотентных радикалов; выяснено строение образуемой этими радикалами решётки.

10. Доказано, что в категории модулей над произвольным csp-кольцом «решёточное» и «поточечное» пересечения любых идемпотентных радикалов будут совпадать.

Теоретическая и практическая значимость. Данная работа носит теоретический характер и может быть использована в дальнейшем развитии теории абелевых групп и теории колец и модулей.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались на международных конференциях «Алгебра и её приложения» и «Алгебра и логика: теория и приложения» (Красноярск, 2002, 2007, 2010, 2013), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2002, 2003, 2008, 2009, 2012), «Алгебра, логика и кибернетика» (Иркутск, 2004), Международной конференции по математике и механике (Томск, 2003, 2008), Всероссийской конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 2010) и Всероссийских и Международных симпозиумах «Абелевы группы» (Бийск, 2005, 2006, 2010, 2012; Москва, 2014). Кроме этого, они докладывались автором на семинарах кафедры алгебры и на семинарах кафедры общей математики ТГУ, а также на Красноярском алгебраическом семинаре.

Публикации. По теме диссертации автором опубликовано 35 научных работ; 12 из них — в журналах, рекомендованных ВАК [90, 101, 102, 103, 105, 108, 109, 110, 111, 113, 115, 117].

Структура и объём работы. Диссертация включает в себя введение и четыре главы, разделённые на 17 параграфов, а также список обозначений и список литературы из 118 наименований. Объём работы — 222 страницы.

Содержание работы. Во введении содержится общая характеристика диссертации, обосновывается актуальность выбранного направления работы, даётся краткое содержание глав.

Первая глава содержит предварительные сведения и общие результаты, которые будут использоваться в последующих главах. §1 представляет собой теоретико-множественное введение и включает, кроме прочего, необходимую информацию о кардинальных характеристиках континуума. В §2 приведены основные определения и результаты теории радикалов модулей. §3 содержит некоторые свойства функторов $\otimes$ и Hom, играющих в диссертации ключевую роль. В §4 собраны необходимые факты, относящиеся к кольцам обобщённых матриц и модулям над этими кольцами (что пригодится нам при построении примеров в §12). В §5 приведён ряд технических результатов об аддитивных структурах некоторых колец и модулей. В §6 вводятся $\otimes$-радикалы, а также Hom-радикалы. Устанавливаются связанные с ними общие факты, имеющие и самостоятельное значение.

Приведём основные определения.

Определение 2.1. Пусть всякому модулю $A \in \text{mod-}S$ сопоставлен его подмодуль $\rho(A)$. Мы будем говорить, что ρ — *предрадикал* категории mod-S, если для любого S-гомоморфизма $\varphi\colon B \to A$ выполнено $\varphi(\rho(B)) \subset \rho(A)$.

Рассмотрим следующие возможные свойства предрадикала ρ.

R1. $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$ для любого модуля A.

R1*. $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любого модуля A.

R2. $\rho(B) = B \cap \rho(A)$ для любого модуля A и $B \subset A$.

Предрадикал ρ называется:

— *идемпотентным радикалом*, если выполнены условия R1 и R1*;

— *кручением*, если выполнены условия R1* и R2.

Идемпотентные радикалы могут быть частично упорядочены: полагаем $\rho \leqslant \sigma$ в том и только в том случае, когда $\rho(A) \subset \sigma(A)$ для всякого модуля A. Относительно этого частичного порядка совокупность $\mathcal{IR}(S)$ идемпотентных радикалов категории mod-S образует большую решётку.

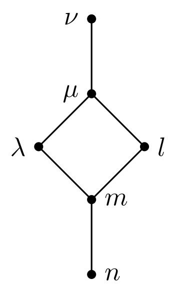
Для классов S-модулей $\mathcal{F} \subset S\text{-mod}$ и $\mathcal{V} \subset \text{mod-}S$ полагаем

$$
\begin{aligned}
{}^{\otimes}\mathcal{F} &= \{A \in \text{mod-}S \mid A \otimes_S F = 0 \text{ при всех } F \in \mathcal{F}\},\\
\mathcal{V}^{\downarrow} &= \{A \in \text{mod-}S \mid \operatorname{Hom}(V, A) = 0 \text{ при всех } V \in \mathcal{V}\}.
\end{aligned}
$$

Через $\mathrm{W}_{\mathcal{F}}(A)$ мы обозначим сумму всех подмодулей B модуля A таких, что выполнено $B \in {}^{\otimes}\mathcal{F}$. Символом $\mathrm{H}_{\mathcal{V}}(A)$ будем обозначать пересечение всех подмодулей $B \subset A$, для которых $A/B \in \mathcal{V}^{\downarrow}$. В этом случае как $\mathrm{W}_{\mathcal{F}}$, так и $\mathrm{H}_{\mathcal{V}}$ являются идемпотентными радикалами. Будем говорить, что первый из этих идемпотентных радикалов $\otimes$-*порождён* (читается как «тензорно порождён») классом $\mathcal{F}$, а второй — *порождён* классом $\mathcal{V}$.

В случаях $\mathcal{F} = \{F\}$ и $\mathcal{V} = \{V\}$ пишем просто W_F и H_V. Все радикалы, имеющие вид W_F или H_V, мы будем называть соответственно $\otimes$-*радикалами* (читается «тензор-радикалами») и Hom-*радикалами*. Через $\mathcal{L}(S)$ обозначаем класс всех $\otimes$-радикалов категории правых S-модулей mod-S.

Глава 2 посвящена изучению $\otimes$-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$. В §7 дано описание всех таких радикалов и решётки, которую они образуют. Символ $\mathbf{t}$ обозначает радикал, который сопоставляет каждой группе её периодическую часть; через $\mathbf{P}$ обозначим множество всех простых чисел.



Рассмотрим множество $\mathcal{K}$, состоящее из шести элементов l, m, n, λ, μ, ν; порядок на этом множестве зададим условиями $n < m < l < \mu < \nu$ и $m < \lambda < \mu$ (элементы l и λ будем считать несравнимыми). Далее, введём на множестве $\mathcal{K}^{\mathbf{P}}$ всех функций $\mathbf{P} \to \mathcal{K}$ отношение порядка, считая, что $\xi \leqslant \eta$ в точности в том случае, когда для всякого простого p выполняется $\xi(p) \leqslant \eta(p)$. Обозначим $\mathcal{J} = \{l, m, n\}^{\mathbf{P}} \cup \{\lambda, \mu, \nu\}^{\mathbf{P}}$.

Доказывается, что следующее правило корректно определяет функцию $\Gamma\colon \mathcal{L}(\mathbf{Z}) \to \mathcal{J}$ (здесь $p \in \mathbf{P}$, а через F_p обозначена p-компонента группы F):

$$\big[\Gamma(\mathrm{W}_F)\big](p) = \begin{cases} n, & \text{если } p(F/\,\mathbf{t}(F)) \neq F/\,\mathbf{t}(F), \\ m, & \text{если } pF \neq F \text{ и } p(F/\,\mathbf{t}(F)) = F/\,\mathbf{t}(F) \neq 0, \\ l, & \text{если } pF = F \neq \mathbf{t}(F), \\ \lambda, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } pF_p \neq F_p, \\ \mu, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } pF_p = F_p \neq 0, \\ \nu, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } F_p = 0. \end{cases}$$

Основным результатом §7 является

Теорема 7.6. *Отображение* $\Gamma\colon \mathcal{L}(\mathbf{Z}) \to \mathcal{J}$ *осуществляет изоморфизм частично упорядоченных множеств (следовательно,* $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ *является полной дистрибутивной решёткой).*

Заметим, однако, что $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ не является подрешёткой в $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$.

В §8 рассматриваются различные свойства замкнутости классов ${}^{\otimes}\{F\}$. Это позволило дать описание (на языке отображения Γ) всех идемпотентных радикалов ρ категории абелевых групп, для которых класс $\mathcal{R}(\rho)$ (он состоит из групп A таких, что $\rho(A) = A$) замкнут относительно:

— произвольных подгрупп;

— p-сервантных подгрупп;

— слабо сервантных подгрупп;

— сервантных подгрупп.

В §9 изучаются решёточные свойства $\otimes$-радикалов. В своей работе [27] Тэбырцэ установил справедливость теорем 9.8 и 9.10 для случая модулей над произвольным кольцом, но предполагая, что все рассматриваемые радикалы являются кручениями. Так как все кручения категории mod-$\mathbf{Z}$ принадлежат множеству $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, то эти две теоремы по сути представляют собой обобщение результатов Тэбырцэ для случая абелевых групп.

Теорема 9.8. *Если $\mathcal{S}$ есть какое-либо непустое семейство радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, то для всякой группы A выполнено*

$$\Big[\bigwedge_{\rho\in\mathcal{S}}\rho\Big](A) = \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}}\rho(A). \tag{9.2}$$

Следствие 9.9. *Для произвольных групп F, G и A выполнено*

$$\begin{aligned}\big[\mathrm{W}_F \wedge \mathrm{W}_G\big](A) = \mathrm{W}_F(\mathrm{W}_G(A)) = \mathrm{W}_G(\mathrm{W}_F(A)) = \\ = \mathrm{W}_{F\oplus G}(A) = \mathrm{W}_F(A) \cap \mathrm{W}_G(A).\end{aligned}$$

В частности, любые два радикала категории mod-$\mathbf{Z}$, *принадлежащие* $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, *коммутируют между собой.*

Теорема 9.10. *Для любого $\rho \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$ и любого непустого семейства $\mathcal{S}$ радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ выполнено*

$$\rho \wedge \Big(\bigvee_{\sigma\in\mathcal{S}}\sigma\Big) = \bigvee_{\sigma\in\mathcal{S}}(\rho \wedge \sigma).$$

(Символы $\wedge$ и $\vee$ всюду обозначают операции большой решётки $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$; множество $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ замкнуто относительно операции $\wedge$, но не относительно $\vee$.)

Кроме того, приводится пример, демонстрирующий, что для радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, вообще говоря, не выполняется тождество

$$(\rho \wedge \rho') \vee \sigma = (\rho \vee \sigma) \wedge (\rho' \vee \sigma).$$

При помощи того же примера установлен тот факт, что подрешётка большой решётки $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$, порождённая множеством $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, не будет модулярной и что в условии теоремы 9.8 нельзя отказаться от требования, чтобы все радикалы из равенства (9.2) принадлежали $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$.

В главе 3 диссертации изучаются $\mathrm{T}(e)$-модули и $\mathrm{E}(e)$-модули (в смысле работ [15, 23]), а также определяемые с их помощью T-радикал и E-радикал. Выясняется, что эти радикалы весьма близки к радикалам, $\otimes$-порождаемым или соответственно порождаемым S-S-бимодулями.

Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец; тогда любой модуль A_R можно рассматривать как правый S-модуль, полагая $as = ae(s)$ для всех элементов $a \in A$ и $s \in S$ (полученный модуль A_S называют *притягивающим*). Каждый R-гомоморфизм таких S-модулей является также S-гомоморфизмом; значит, сопоставление $A_R \rightsquigarrow A_S$ задаёт унивалентный функтор $\Theta_e\colon \text{mod-}R \to \text{mod-}S$.

Определение 10.2. Пусть $A \in \text{mod-}R$, и пусть $e\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм. Модуль A называется:

— $\mathrm{T}(e)$-*модулем*, если $A \otimes_R R = A \otimes_S R$;

— $\mathrm{E}(e)$-*модулем*, если $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}_S(R, A)$.

Через $\mathcal{T}$ (через $\mathcal{E}$) мы обозначим класс модулей A_S, на которых можно ввести R-модульную структуру таким образом, чтобы имело место равенство $\Theta_e(A_R) = A_S$ и A являлся $\mathrm{T}(e)$-модулем (или соответственно $\mathrm{E}(e)$-модулем). Сужение Θ_e на подкатегорию категории mod-R, которая состоит или из всех $\mathrm{T}(e)$-модулей, или из всех $\mathrm{E}(e)$-модулей, является инъективным на объектах и будет, помимо этого, полным унивалентным функтором; отсюда видно, что функтор Θ_e определяет изоморфизм между полной подкатегорией категории mod-R, объекты которой — это все $\mathrm{T}(e)$-модули (все $\mathrm{E}(e)$-модули), и полной подкатегорией $\mathcal{T}$ (соответственно подкатегорией $\mathcal{E}$) категории mod-S.

Пусть A есть правый R-модуль. Его T-*радикалом* назовём сумму $\mathrm{W}(A)$ всех R-подмодулей $B \subset A$, являющихся $\mathrm{T}(e)$-модулями, а его E-*радикалом* — пересечение $\mathrm{H}(A)$ всех R-подмодулей $B \subset A$ таких, что A/B — $\mathrm{E}(e)$-модуль.

В приводимых ниже теоремах §10 считается, что модуль V (модуль F) совпадает с правым S-модулем (соответственно с левым S-модулем) $R/e(S)$. Группы $U = V \otimes_S R$ и $G = R \otimes_S F$ естественным образом допускают правую (соответственно левую) R-модульную структуру, поэтому эти группы задают в категории mod-R идемпотентные радикалы H_U и W_G.

Теорема 10.7. *Для всякого модуля* $A \in \text{mod-}R$ *выполнены равенства* $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_G(A) = \mathrm{W}_F(A)$. *В частности,* $\mathrm{W} \in \mathcal{IR}(R)$.

Теорема 10.10. *Для всякого модуля* $A \in \text{mod-}R$ *выполнены равенства* $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_U(A) = \mathrm{H}_V(A)$. *В частности,* $\mathrm{H} \in \mathcal{IR}(R)$.

Теоремы 10.7 и 10.10 приводят к следующему результату:

Теорема 10.11. *Подмодули* $\mathrm{W}(A)$ *и* $\mathrm{H}(A)$ *определяются* S*-модульной структурой модуля* A_R *однозначно.*

Пусть S — кольцо и ${}_SF_S$ — бимодуль. Тогда, полагая

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in S,\, f \in F \right\} \quad \text{и} \quad e(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $s \in S$, мы получаем гомоморфизм $e\colon S \to R$ такой, что бимодули $R/e(S)$ и F изоморфны. Описанная ситуация позволяет превратить любой S-модуль в R-модуль при помощи гомоморфизма $d\colon R \to S$, где

$$d\begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} = s.$$

Тем самым мы получаем унивалентный функтор Θ_d из mod-S в mod-R; этот функтор осуществляет изоморфизм между mod-S и Θ_d(mod-S) (полной подкатегорией категории mod-R). Композиция $\Theta_e \circ \Theta_d$ является тождественным функтором категории mod-S (в частности, отсюда вытекает, что сужение Θ_d на $\mathcal{T}$ является функтором, обратным к сужению функтора Θ_e на состоящую из всех $\mathrm{T}(e)$-модулей полную подкатегорию категории mod-R). Итак, всякий модуль над S может быть получен как притягивающий модуль из некоторого R-модуля. Поэтому для рассматриваемого гомоморфизма колец e мы можем говорить не только о том, что W однозначно определяется $\otimes$-радикалом W_F, но и о том, что W_F однозначно определяется радикалом W (W_F фактически является сужением радикала W на полную подкатегорию категории mod-R). Аналогичный факт верен для радикалов $\mathrm{H} \in \mathcal{IR}(R)$ и $\mathrm{H}_V \in \mathcal{IR}(S)$.

В рассматриваемой ситуации выполнено равенство $\mathcal{T} = {}^{\otimes}\{F\}$. Логично поэтому задаться вопросом: при каких условиях на левый S-модуль F класс ${}^{\otimes}\{F\} \subset$ mod-S представи́м в виде класса $\mathcal{T}$ (для какого-либо гомоморфизма колец $e\colon S \to R$)? Из приведённых выше рассуждений следует, что это будет возможно, если F — S-S-бимодуль. По теореме 11.5 каждый $\otimes$-порождённый каким-то модулем $F \in S$-mod радикал $\otimes$-порождается также S-S-бимодулем $F \otimes S$. Отсюда следует, что подходящие кольцо R и кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$ существуют для любого модуля ${}_SF$.

Теорема 11.5. *Пусть S — кольцо. Тогда*:

(а) *для всякого модуля ${}_SF$ выполнено ${}^{\otimes}\{F\} = {}^{\otimes}\{F \otimes S\}$ и $\mathrm{W}_F = \mathrm{W}_{F\otimes S}$*;

(б) *каждый $\otimes$-порождённый каким-нибудь классом S-модулей радикал из $\mathcal{IR}(S)$ будет $\otimes$-порождён также некоторым классом S-S-бимодулей.*

Естественным будет поставить и вопрос, аналогичный рассмотренному: в каких случаях Hom-радикал $\mathrm{H}_V \in \mathcal{IR}(S)$ порождён не только модулем V_S, но и каким-либо S-S-бимодулем? Приводимая ниже теорема показывает, что «наиболее подходящим» является бимодуль $S \otimes V$.

Теорема 11.7. *Для модуля* $V \in \text{mod-}S$ *эквивалентны условия*:

1) *существует* S-S*-бимодуль* U *такой, что* $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$;

2) $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$;

3) $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$;

4) *радикал* H_V *порождается некоторым классом* S-S*-бимодулей*;

5) *для любого модуля* A_S *и* $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ *из* $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ *следует равенство* $X = 0$.

Отсюда получается

Теорема 11.8. *Для кольца* S *эквивалентны следующие условия*:

1) *для всякого* V_S *существует бимодуль* ${}_SU_S$ *такой, что* $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$;

2) *для всякого* V_S *выполнено* $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$;

3) *для всякого* V_S *выполнено* $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$;

4) *для всякого* V_S *идемпотентный радикал* H_V *порождён подходящим классом* S-S*-бимодулей*;

5) *если* $A, V \in \text{mod-}S$ *и* $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$, *то равенство* $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ *влечёт равенство* $X = 0$;

6) *в категории* $\text{mod-}S$ *каждый идемпотентный радикал порождается подходящим классом* S-S*-бимодулей*;

7) *для всякого* $V_S \neq 0$ *выполнено* $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0$.

Основное отличие от теоремы 11.5 — в том, что условиям теоремы 11.8 удовлетворяют не все кольца. Всякое кольцо S, для которого эквивалентные условия теоремы 11.8 выполнены, называется *правым* br*-кольцом*; итак, если S — правое br-кольцо, то для каждого модуля V_S класс $\{V\}^{\downarrow} \subset \text{mod-}S$ будет совпадать с классом $\mathcal{E}$, соответствующим подходящему гомоморфизму колец $e\colon S \to R$. В силу теоремы 11.8 достаточно положить

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} s & x \\ 0 & s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in S,\, x \in S \otimes V \right\}, \qquad e(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Логично будет поставить вопрос, двойственный к рассмотренному нами в теореме 11.8. Для класса $\mathcal{X} \subset \operatorname{mod-}S$ и модуля $V \in \operatorname{mod-}S$ обозначим через $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}(V)$ сумму всех подмодулей U модуля V, для которых $\operatorname{Hom}(U, A) = 0$ при всех $A \in \mathcal{X}$. Тогда $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$ будет идемпотентным радикалом; мы будем говорить, что класс $\mathcal{X}$ *копорождает* радикал $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$. Если $\mathcal{X} = \{A\}$, то пишем просто K_A.

Для произвольного правого S-модуля A мы обозначим через A' прямое произведение всех S-S-бимодулей вида $(S \otimes C)/\,\mathrm{K}_A(S \otimes C)$, где C пробегает множество подмодулей модуля A. Тогда справедлива

Теорема 11.11. *Для кольца S эквивалентны следующие условия*:

1) *для любого A_S существует бимодуль ${}_SB_S$ такой, что* $\mathrm{K}_B = \mathrm{K}_A$;

2) *для любого A_S выполнено* $\mathrm{K}_{A'} = \mathrm{K}_A$;

3) *если* $0 \neq C_S \subset A_S$, *то* $\operatorname{Hom}_S(S \otimes C, A) \neq 0$;

4) *для любого A_S идемпотентный радикал K_A копорождён некоторым классом S-S-бимодулей*;

5) *если $A, V \in \operatorname{mod-}S$ и $X = \operatorname{Hom}_S(V, A)$, то равенство* $\operatorname{Hom}(S, X) = 0$ *влечёт равенство $X = 0$*;

6) *в категории $\operatorname{mod-}S$ любой идемпотентный радикал копорождается некоторым классом S-S-бимодулей.*

Примечательным оказывается тот факт, что двойственные в некотором смысле теоремы 11.8 и 11.11 описывают один и тот же класс колец. В самом деле, условия 5) этих теорем совпадают.

Теоремы 11.5, 11.8 и 11.11 и вопросы, приведшие к ним, перекликаются с работой Кашу [71], в которой изучался вопрос об аппроксимации заданного радикала «наиболее близким» радикалом с какими-нибудь дополнительными «хорошими» свойствами.

В §12 выделены некоторые известные классы колец, содержащиеся как в классе правых, так и в классе левых br-колец. Очевидно, имеет место

Предложение 12.1. *Все коммутативные кольца являются правыми* br-*кольцами.*

Ряд полученных результатов свидетельствует о том, что свойство быть правым br-кольцом сильно зависит от строения аддитивной группы кольца.

Теорема 12.11. *Пусть R — кольцо, для которого группа $S = R/\mathbf{t}(R)$ является делимой. Тогда R — правое* br-*кольцо.*

Отсюда, в свою очередь, следует

Теорема 12.12. *Класс правых* br-*колец строго содержит в себе класс всех колец, слабо π-регулярных справа или слева.*

Из теоремы 12.12 вытекает, что правыми br-кольцами являются кольца каждого из следующих классов:

— артиновы справа или слева;

— совершенные справа или слева;

— регулярные (в смысле фон Неймана);

— простые.

Завершающая часть §12 посвящена построению примеров. В частности, доказан такой факт: ни из примитивности справа и слева, ни из локальности, ни из того, что кольцо является левым br-кольцом, не следует, что оно будет правым br-кольцом.

В главе 4 рассматриваются csp-кольца и модули над ними.

Под *характеристикой* мы будем понимать всякую последовательность вида $\chi = (k_p)_{p\in\mathbf{P}}$, где $k_p \in \mathbf{N} \cup \{0, \infty\}$. Через L_χ обозначим множество таких $p \in \mathbf{P}$, что $k_p \neq 0$. Если выполняется $k_p = \infty$, мы будем считать, что R_p есть кольцо целых p-адических чисел $\mathbf{Q}_p^*$; в случае $k_p < \infty$ полагаем $R_p = \mathbf{Z}/p^{k_p}\mathbf{Z}$. Пусть множество $L = L_\chi$ бесконечно. Обозначим

$$K_\chi = \prod_{p\in L} R_p, \qquad T_\chi = \bigoplus_{p\in L} R_p \subset K_\chi. \tag{13.1}$$

Определение 13.1. Будем называть csp-*кольцом* всякое подкольцо R кольца K_χ такое, что $T_\chi \subset R$ и что кольцо R/T_χ является полем. Поле R/T_χ, а также любое изоморфное ему поле называем *базовым полем* csp-кольца R; характеристику χ будем называть *кохарактеристикой* csp-кольца R.

Доказывается, что справедлива

Теорема 13.5. (а) *Все* csp-*кольца являются* E-*кольцами.*

(б) *Аддитивные группы двух* csp-*колец изоморфны в точности в том случае, когда эти кольца совпадают.*

Главная цель §13 и §14 — получение ответа на вопрос о том, при каких условиях заданное поле может служить базовым для некоторого csp-кольца. Для этого мы (среди прочего) в дополнение к известным в теории множеств кардинальным характеристикам континуума определяем ещё одну. Если L — бесконечное подмножество из $\mathbf{N}$, то зададим на прямом произведении

$$K_L = \prod_{p \in L} \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$$

отношение "$\approx$", полагая $(r_p)_{p\in L} \approx (d_p)_{p\in L}$ в том и только в том случае, когда $r_p = d_p$ для бесконечного множества значений $p \in L$. Через $\mathfrak{ie}_L$ мы обозначим наименьшую мощность множества $B \subset K_L$, удовлетворяющего условию

для всякого $r \in K_L$ существует $d \in B$ такое, что $r \approx d$.

Напомним определения основных кардинальных характеристик.

Зададим на множестве $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ всех функций $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ строгий порядок "$\prec$" следующим образом: $z' \prec z$ в том и только в том случае, когда соотношению $z'(i) < z(i)$ удовлетворяют почти все $i \in \mathbf{N}$. Мы назовём множество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ *ограниченным*, если существует функция $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ с тем свойством, что $z' \prec z$ для произвольной функции $z' \in E$; в противном случае мы скажем, что E — *неограниченное* множество. *Конфинальным* назовём подмножество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, для которого при любой функции $z' \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ в E существует функция z такая, что $z' \prec z$. Символом $\mathfrak{b}$ (символом $\mathfrak{d}$) мы обозначим наименьшую возможную мощность неограниченного множества (конфинального множества) $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.

Все множества первой категории и все множества меры 0 образуют два σ-идеала множества всех подмножеств вещественной прямой. Обозначим эти идеалы через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно; через $\mathsf{non}(\mathcal{M})$ обозначим наименьшую мощность множества вещественных чисел, не принадлежащего σ-идеалу $\mathcal{M}$, через $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$ — наименьшую мощность семейства входящих в $\mathcal{M}$ множеств, объединение которого есть $\mathbf{R}$. Аналогичным образом вводятся кардинальные числа $\mathsf{non}(\mathcal{N})$ и $\mathsf{cov}(\mathcal{N})$. Приводимая ниже часть диаграммы Цихоня [47, 51] содержит полную информацию о неравенствах, связывающих перечисленные кардинальные характеристики.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[dr] & \\
\aleph_1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{b} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[ur] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \qquad (1.2)$$

Стрелка, ведущая от кардинала $\mathfrak{M}$ к кардиналу $\mathfrak{N}$, отражает тот факт, что справедливо соотношение $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$. Известно, что если приписать каждой из рассматриваемых шести кардинальных характеристик и кардиналу $\mathfrak{c}$ одно из значений $\aleph_1$ и $\aleph_2$ таким образом, чтобы это не противоречило схеме (1.2), то можно построить модель ZFC, в которой реализуются все семь требуемых равенств [47, 51].

Далее приведён ряд найденных свойств характеристики $\mathfrak{ie}_L$. Некоторые свойства ввиду леммы Бореля — Кантелли, известной в теории вероятностей, зависят от того, является ли конечной сумма

$$\sum_{p\in L} \frac{1}{p} \qquad (13.6)$$

(предложение 13.16 было подсказано автору Блассом).

Предложение 13.9. *Для всякого бесконечного подмножества* $L \subset \mathbf{N}$ *выполнено* $\mathfrak{ie}_L \geqslant \aleph_1$.

Предложение 13.15. *Если ряд* (13.6) *сходится, то* $\mathfrak{ie}_L \geqslant \mathsf{cov}(\mathcal{N})$.

Предложение 13.16. *Если ряд* (13.6) *расходится, то* $\mathfrak{ie}_L \leqslant \mathsf{non}(\mathcal{N})$.

Теорема 13.17. (а) *Если* $\mathfrak{d} < \mathsf{non}(\mathcal{M})$, *то* $\sup\limits_L \mathfrak{ie}_L = \mathsf{non}(\mathcal{M})$.

(б) *Если* $\mathfrak{d} < \mathrm{cf}(\mathsf{non}(\mathcal{M}))$, *то* $\mathfrak{ie}_L = \mathsf{non}(\mathcal{M})$ *для некоторого* $L \subset \mathbf{N}$.

Следствие 13.18. *Если* $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}$, *то* $\sup\limits_L \max(\mathfrak{ie}_L, \mathfrak{b}) = \mathsf{non}(\mathcal{M})$.

Теорема 13.20. *Из аксиомы Мартина вытекает, что для всех* $L \subset \mathbf{N}$ *выполнено* $\mathfrak{ie}_L = \mathfrak{c}$.

Предложение 13.22. *Каждое из следующих неравенств совместимо с системой аксиом* ZFC:

(а) $\mathfrak{ie}_L > \mathfrak{ie}_X$;

(б) $\mathfrak{ie}_L < \mathfrak{b}$;

(в) $\mathfrak{ie}_L > \mathfrak{b}$.

Ключевым результатом §13 является

Теорема 13.25. *Для каждой характеристики* χ *и каждого кардинала* $\mathfrak{M} \leqslant \max(\mathfrak{ie}_{L_\chi}, \mathfrak{b})$ *найдётся* csp-*кольцо кохарактеристики* χ, *имеющее своим базовым полем чисто трансцендентное расширение* $\mathbf{Q}(\mathfrak{M})$ *поля* $\mathbf{Q}$ *степени трансцендентности* $\mathfrak{M}$.

Всякое бесконечное подмножество $L \subset \mathbf{P}$ с тем свойством, что каждый целочисленный многочлен степени $\geqslant 1$ почти для всех p из L имеет в кольце целых p-адических чисел хотя бы один корень, назовём *универсальным.*

Теорема 14.6. *Универсальные множества существуют.*

С помощью теоремы 14.6 удаётся найти достаточные условия для того, чтобы поле было базовым для некоторого csp-кольца:

Теорема 14.11. *Пусть* L_χ *— универсальное множество. Тогда всякое поле* F *такое, что выполняется* $\operatorname{char} F = 0$ *и* $|F| \leqslant \mathfrak{b}$, *будет базовым полем подходящего* csp-*кольца кохарактеристики* χ.

Условия $\operatorname{char} F = 0$ и $|F| \leqslant \mathfrak{b}$ при некоторых теоретико-множественных допущениях будут также и необходимыми:

Теорема 14.13. *Если* $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, *то для поля* F *равносильны условия*:

1) $\operatorname{char} F = 0$ *и* $|F| \leqslant \mathfrak{c}$;

2) F *служит базовым полем некоторого* csp-*кольца.*

В частности, условия 1) и 2) теоремы 14.13 будут равносильными, если мы принимаем обобщённую континуум-гипотезу (ОКГ), континуум-гипотезу (КГ) или аксиому Мартина; это следует из справедливости импликаций

$$\text{ОКГ} \implies \text{КГ} \implies \text{аксиома Мартина} \implies \mathfrak{b} = \mathfrak{c}.$$

Таким образом, существует достаточно много csp-колец.

В §15 дано описание проективных модулей над csp-кольцами. Сначала доказывается, что строение этих модулей аналогично строению проективных модулей над наследственными кольцами:

Теорема 15.5. *Пусть* R *— какое-то* csp-*кольцо. В этом случае любой проективный* R-*модуль можно представить как прямую сумму семейства подмодулей, изоморфных идеалам кольца* R.

Пусть R — csp-кольцо произвольной кохарактеристики χ и выполнены соотношения (13.1). Поле R/T_χ обозначим через R_0. Для всякого модуля M_R будем писать $M_0 = M/MT_\chi$ и $M_p = Me_p$ для $p \in L$ (здесь e_p есть единичный элемент кольца R_p). Очевидно, M_p является R_p-модулем при всех $p \in L_0$, где $L_0 = L \cup \{0\}$.

Для всякого модуля M_R обозначим через $r(M)$ размерность модуля M_0 как линейного пространства над R_0. Из теоремы 15.5 вытекает, что в случае проективного модуля M все M_p (где $p \in L$) будут свободными R_p-модулями.

Ранги этих свободных модулей обозначим через $r_p(M)$. Итак, произвольному проективному модулю M_R мы можем сопоставить кардинальные числа $r(M)$ и $\{r_p(M)\}_{p\in L}$. Полученный набор кардинальных чисел называется *системой инвариантов* проективного R-модуля M.

Основным результатом §15 является

Теорема 15.9. *Два проективных модуля над* csp*-кольцом изоморфны в точности тогда, когда они имеют одинаковые системы инвариантов.*

Получен также ответ на вопрос о том, какие условия нужно наложить на заданный набор кардинальных чисел, чтобы этот набор служил системой инвариантов какого-то проективного R-модуля (в доказательстве следующей теоремы строение подходящего проективного модуля указано явно):

Теорема 15.10. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\{\mathfrak{M}_p\}_{p\in L}$ — какие-то кардинальные числа и $W = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\}$. Проективный модуль M_R такой, что $r(M) = \mathfrak{M}$ и $r_p(M) = \mathfrak{M}_p$ при всех $p \in L$, существует в точности тогда, когда*

(A) *множество W конечно*

или

(B) *выполнены следующие три условия*:

(B1) *множество W счётно*;

(B2) $\{\mathfrak{M}_p \mid p \in W\} = \{\mathfrak{N}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, *где*

$$\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2 < \ldots < \mathfrak{N}_n < \ldots \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M};$$

(B3) *для любого $n \in \mathbf{N}$ множество $\{p \in L \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n\}$ конечно.*

В §16 изучено строение тензорных произведений R-модулей, где R есть csp-кольцо. Главными результатами здесь являются теоремы 16.7 и 16.8.

Теорема 16.7. *Для R-модуля F эквивалентны условия*:

1) *F — плоский R-модуль*;

2) *F_p является плоским R-модулем для всех $p \in L$*;

3) *F_p является плоским R_p-модулем для всех $p \in L$*;

4) *F_p является R_p-модулем без кручения для всех $p \in L$ со свойством $R_p = \mathbf{Q}_p^*$ и свободным R_p-модулем для всех $p \in L$ со свойством $R_p \neq \mathbf{Q}_p^*$.*

Теорема 16.7 обобщает данное Царевым в работе [33] описание плоских модулей над csp-кольцом, которое имеет базовое поле $\mathbf{Q}$ и кохарактеристику $(\infty, \infty, \dots, \infty, \dots)$.

Напомним, что $\cap$-*чистым* называется всякий подмодуль B модуля A_S, для которого $B \cap As = Bs$ при всех $s \in S$.

Теорема 16.8. *Для подмодуля B модуля A_R равносильны условия:*

1) *B есть чистый подмодуль модуля A_R;*

2) *$B \cap AJ = BJ$ для любого идеала J кольца R;*

3) *B есть $\cap$-чистый подмодуль модуля A_R;*

4) *B_p есть чистый подмодуль R_p-модуля A_p (при всех $p \in L$);*

5) *$B_p \cap A_p J = B_p J$ для любого идеала J кольца R_p;*

6) *B_p есть $\cap$-чистый подмодуль R_p-модуля A_p (при всех $p \in L$).*

В §17 приведено описание идемпотентных радикалов категории mod-R (где R — csp-кольцо произвольной кохарактеристики χ). Выяснено строение решётки, образуемой этими радикалами.

Для всякого $p \in L_0$ будем считать, что $\mathcal{H}_p$ совпадает с введённой ранее решёткой $\mathcal{K} = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$, если выполнено $R_p = \mathbf{Q}_p^*$, и совпадает с цепью $\{n, \nu\} \subset \mathcal{K}$, если $p = 0$ или $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, где $k \in \mathbf{N}$.

Теорема 17.9. (а) *Большая решётка $\mathcal{IR}(R)$ изоморфна решётке*

$$\mathcal{J}_\chi = \prod_{p \in L_0} \mathcal{H}_p$$

(и, следовательно, является полной дистрибутивной решёткой).

(б) *Все радикалы из $\mathcal{IR}(R)$ суть $\otimes$-радикалы, т. е. $\mathcal{L}(R) = \mathcal{IR}(R)$.*

Следующая теорема служит аналогом известного результата Гарднера, в котором говорится о том, что идемпотентный радикал сопоставляет всякой абелевой группе её сервантную подгруппу [60].

Теорема 17.10. *Пусть* $\rho \in \mathcal{IR}(S)$, *где* $S = R_p$ (*для какого-то* $p \in L_0$) *или* $S = R$. *Тогда для всякого* $A \in \mathrm{mod}\text{-}S$ *подмодуль* $\rho(A)$ *чист в* A.

Пусть $\Gamma\colon \mathcal{IR}(R) \to \mathcal{J}_\chi$ есть изоморфизм, существование которого было установлено в теореме 17.9. Теорема 17.12 отвечает на вопрос о том, в каком случае радикал из $\mathcal{IR}(R)$ будет кручением (на языке отображения Γ).

Теорема 17.12. *Радикал* $\rho \in \mathcal{IR}(R)$ *является кручением в точности тогда, когда* $\big[\Gamma(\rho)\big](L) \subset \{n, l, \nu\}$.

Последние два результата — аналоги теоремы 9.8 и следствия 9.9.

Теорема 17.19. *Если* $\mathcal{S} \neq \varnothing$ — *некоторое семейство идемпотентных радикалов категории* $\mathrm{mod}\text{-}S$, *где* $S = R_p$ (*для какого-то* $p \in L_0$) *либо* $S = R$, *то для всякого* S*-модуля* A *справедливо равенство* (9.2).

Следствие 17.20. *Если* $\rho, \sigma \in \mathcal{IR}(R)$, *то*

$$[\rho \wedge \sigma](A) = \rho(\sigma(A)) = \sigma(\rho(A)) = \rho(A) \cap \sigma(A)$$

для всех R*-модулей* A (*в частности, любые два радикала категории* $\mathrm{mod}\text{-}R$ *коммутируют между собой*).

Автор глубоко признателен своему научному консультанту профессору Петру Андреевичу Крылову за введение в данную проблематику и внимание к работе, а также доценту Сергею Александровичу Зюбину за плодотворные беседы по теории полей и профессору Андреасу Блассу за переписку по теме кардинальных характеристик континуума.

ГЛАВА 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Первая глава носит предварительный характер. §1 представляет собой теоретико-множественное введение и включает, кроме прочего, необходимую информацию о кардинальных характеристиках континуума (которые, в свою очередь, тесно связаны с теорией меры и с теорией категории). В §2 собраны определения и результаты из теории радикалов модулей, а также некоторые факты, касающиеся радикалов абелевых групп; в §3 содержится ряд свойств важнейших модульных функторов $\otimes$ и Hom.

В §4 приводятся основные факты, относящиеся к кольцам обобщённых матриц и модулям над ними, что пригодится в §12 при построении примеров. §5 содержит технические результаты об аддитивных структурах модулей над некоторыми типами колец и об аддитивных структурах колец. В §6 вводятся $\otimes$-радикалы и Hom-радикалы; рассматриваются их основные свойства.

Все встречающиеся в этой работе кольца — ассоциативные с единицей, модули — унитарные и, если не оговорено обратное, правые. Слово «группа» всюду означает абелеву группу.

§1. Из теории множеств

Мы принимаем систему аксиом ZFC, т. е. аксиомы Цермело — Френкеля и аксиому выбора. В четвёртой главе часто будет использоваться следующее утверждение, которое, как известно, эквивалентно аксиоме выбора [2].

Лемма Цорна. *Если* $(W, \leqslant)$ *есть некоторое частично упорядоченное множество с тем свойством, что всякая цепь в* W *имеет верхнюю грань, принадлежащую* W, *то* $(W, \leqslant)$ *содержит максимальный элемент.*

При любом кардинале $\mathfrak{M} \geqslant \aleph_0$ найдётся семейство кардиналов $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ со свойством

$$\mathfrak{M}_i < \mathfrak{M} \text{ для всех } i \in I \qquad \text{и} \qquad \sum_{i\in I} \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M} \tag{1.1}$$

(достаточно взять $|I| = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_i = 1$ при любом $i \in I$). Это позволяет ввести понятие конфинальности бесконечного кардинального числа.

Определение 1.1. Если $\mathfrak{M}$ есть какое-либо бесконечное кардинальное число, то под *конфинальностью* этого кардинального числа понимают число $\mathrm{cf}(\mathfrak{M})$, равное наименьшей мощности множества I, для которого существует семейство кардинальных чисел $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ со свойством (1.1).

Очевидно, $\mathrm{cf}(\mathfrak{M}) \geqslant \aleph_0$; из определения следует, что $\mathrm{cf}(\mathfrak{M}) \leqslant \mathfrak{M}$.

Для изучения базовых полей произвольных csp-колец нам понадобятся свойства кардинальных чисел, известных как кардинальные характеристики континуума. Символами $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}$ обозначаем множества всех натуральных, целых и вещественных чисел соответственно.

Зададим на множестве $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ всех функций $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ строгий порядок “$\prec$” следующим образом: $z' \prec z$ в том и только в том случае, когда соотношению $z'(i) < z(i)$ удовлетворяют почти все $i \in \mathbf{N}$. Мы назовём множество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ *ограниченным*, если существует функция $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ с тем свойством, что $z' \prec z$ для произвольной функции $z' \in E$; в противном случае мы скажем, что E —

неограниченное множество. *Конфинальным* назовём подмножество $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, для которого при любой функции $z' \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ в E существует функция z такая, что $z' \prec z$. Символом $\mathfrak{b}$ (символом $\mathfrak{d}$) мы обозначим наименьшую возможную мощность неограниченного множества (конфинального множества) $E \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Нетрудно проверить, что эти кардиналы связаны соотношениями

$$\aleph_1 \leqslant \mathrm{cf}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \leqslant \mathrm{cf}(\mathfrak{d}) \leqslant \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c},$$

где $\mathfrak{c}$ есть мощность континуума [51, 83].

Подмножество вещественной прямой является *нигде не плотным*, если его замыкание не содержит внутренних точек; множество $H \subset \mathbf{R}$ называется *множеством первой категории*, если оно представимо как объединение подходящего счётного семейства нигде не плотных подмножеств (иначе скажем, что H — *множество второй категории*).

Все множества первой категории и все множества меры 0 образуют два σ-идеала множества всех подмножеств вещественной прямой. Обозначим эти идеалы через $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ соответственно; через $\mathsf{non}(\mathcal{M})$ обозначим наименьшую мощность множества вещественных чисел, не принадлежащего σ-идеалу $\mathcal{M}$, через $\mathsf{cov}(\mathcal{M})$ — наименьшую мощность семейства входящих в $\mathcal{M}$ множеств, объединение которого есть $\mathbf{R}$. Аналогичным образом вводятся кардинальные числа $\mathsf{non}(\mathcal{N})$ и $\mathsf{cov}(\mathcal{N})$. Приводимая ниже часть диаграммы Цихоня [47, 51] содержит полную информацию о неравенствах, связывающих перечисленные кардинальные характеристики.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{cov}(\mathcal{N}) \arrow[r] & \mathsf{non}(\mathcal{M}) \arrow[dr] & \\
\aleph_1 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathfrak{b} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathfrak{d} \arrow[r] & \mathfrak{c} \\
 & \mathsf{cov}(\mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[ur] & \mathsf{non}(\mathcal{N}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Стрелка, ведущая от кардинала $\mathfrak{M}$ к кардиналу $\mathfrak{N}$, отражает тот факт, что справедливо соотношение $\mathfrak{M} \leqslant \mathfrak{N}$. Известно, что если приписать каждой из рассматриваемых шести кардинальных характеристик и кардиналу $\mathfrak{c}$ одно из значений $\aleph_1$ и $\aleph_2$ таким образом, чтобы это не противоречило схеме (1.2), то можно построить модель ZFC, в которой реализуются все семь требуемых равенств [47, 51].

Для натурального числа p введём обозначение $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Кроме того, для всякого бесконечного множества $L \subset \mathbf{N}$ положим

$$K_L = \prod_{p \in L} \mathbf{Z}_p.$$

Рассматривая K_L как тихоновское произведение дискретных топологических пространств $\mathbf{Z}_p$, получим компактное топологическое пространство (см. [41]). Базу топологического пространства K_L составляют множества вида

$$A = \prod_{p \in L} A_p, \tag{1.3}$$

где $A_p \subset \mathbf{Z}_p$, причём почти для всех $p \in L$ выполнено $A_p = \mathbf{Z}_p$. Известно [32], что на K_L можно определить полную меру mes такую, что mes-измеримыми будут, в частности, все борелевские подмножества множества K_L и при этом для подмножеств вида (1.3) будет иметь место формула

$$\mathrm{mes}(A) = \prod_{p \in L} \frac{|A_p|}{p}.$$

Последнее равенство останется справедливым также в случае, когда $A_p \neq \mathbf{Z}_p$ для бесконечного множества значений $p \in L$. Ясно, что mes — вероятностная мера, т. е. $\mathrm{mes}(K_L) = 1$.

Точно так же определяются и топология, и полная вероятностная мера на множестве $2^{\mathbf{N}} = \{0, 1\}^{\mathbf{N}}$. Как и на вещественной прямой, в пространствах K_L и $2^{\mathbf{N}}$ можно рассматривать σ-идеалы $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Известно (см. [47, 51]), что кардинальные характеристики non и cov идеалов $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ не зависят от того, в каком из трёх пространств $\mathbf{R}$, K_L и $2^{\mathbf{N}}$ они рассматриваются.

Назовём *разбиением множества* $\mathbf{N}$ *на конечные интервалы* семейство $\Pi = \{I_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, для которого существуют числа $i_j \in \mathbf{N}$ со свойствами

$$1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_m < \ldots \quad \text{и} \quad I_j = \{i_j, i_j + 1, \ldots, i_{j+1} - 1\};$$

через $\mathcal{IP}$ обозначаем множество всех таких разбиений. Мы скажем, что разбиение $\{I_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ *мажорирует* разбиение $\{J_j\}_{j\in\mathbf{N}}$, если для всех $j \in \mathbf{N}$, кроме, возможно, конечного числа, найдётся $m \in \mathbf{N}$ со свойством $J_m \subset I_j$; нетрудно видеть, что введённое таким образом на $\mathcal{IP}$ отношение будет транзитивным. При доказательстве теоремы 13.17 понадобятся следующие две теоремы.

Теорема 1.2 [51]. *Наименьшая мощность подмножества $\mathcal{IP}' \subset \mathcal{IP}$ такого, что всякое разбиение из $\mathcal{IP}$ мажорируется некоторым разбиением из $\mathcal{IP}'$, равна $\mathfrak{d}$.*

Теорема 1.3 [51]. *Для множества $H \subset 2^{\mathbf{N}}$ равносильны условия:*

1) *H — множество первой категории;*

2) *можно найти функцию $h \in 2^{\mathbf{N}}$ и разбиение $\Pi = \{J_j\}_{j\in\mathbf{N}} \in \mathcal{IP}$, для которых при любой функции $h' \in H$ сужения h и h' на J_j совпадают лишь для конечного множества значений $j \in \mathbf{N}$.*

Важное место в теории множеств занимает аксиома Мартина (см. [51]). Она следует из континуум-гипотезы $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, но совместима и с соотношением $\aleph_1 < \mathfrak{c}$. Известен такой факт: из справедливости аксиомы Мартина вытекает, что все шесть кардинальных характеристик, входящих в схему (1.2), равны $\mathfrak{c}$ (это справедливо и для всех остальных кардинальных характеристик из диаграммы Цихоня [51]). Прежде чем привести формулировку аксиомы, следует напомнить некоторые понятия.

Определение 1.4. Пусть W — частично упорядоченное множество.

Скажем, что W удовлетворяет *условию счётности цепей* (у. с. ц.), если для каждого несчётного подмножества $\{c_\xi\}_{\xi\in\Delta} \subset W$ можно найти различные индексы $\xi, \eta \in \Delta$ и элемент $c \in W$ такие, что $c \leqslant c_\xi$ и $c \leqslant c_\eta$.

Множество $W' \subset W$ называют *плотным* в W, если для всякого $c \in W$ существует элемент $c' \in W'$ со свойством $c' \leqslant c$.

Определение 1.5. Пусть W есть частично упорядоченное множество, а $\mathcal{W}$ есть какое-либо семейство плотных подмножеств из W. Будем называть $\mathcal{W}$*-генерическим* всякое множество $W' \subset W$ со следующими свойствами:

1) если $c' \in W'$ и $c' \leqslant c$, то $c \in W'$;

2) если $c, c' \in W'$, то $b \leqslant c$ и $b \leqslant c'$ для некоторого $b \in W'$;

3) $W' \cap W'' \neq \varnothing$ для всякого множества W'' из семейства $\mathcal{W}$.

Аксиома Мартина. *Если W есть непустое частично упорядоченное множество, которое удовлетворяет у. с. ц., то для каждого семейства $\mathcal{W}$, элементы которого являются плотными подмножествами множества W, из $|\mathcal{W}| < \mathfrak{c}$ следует, что найдётся $\mathcal{W}$-генерическое множество $W' \subset W$.*

В заключение этого параграфа мы приведём некоторые факты о почти дизъюнктных семействах множеств.

Определение 1.6. *Почти дизъюнктным* называют каждое семейство множеств с тем свойством, что $X \cap Y$ конечно для любых различных X и Y из данного семейства.

Предложение 1.7 [2, 51]. *Если множество L имеет мощность $\aleph_0$, то найдётся континуальное почти дизъюнктное семейство подмножеств множества L, каждое из которых имеет мощность $\aleph_0$.*

Замечание. Если для кардиналов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ выполнено $\aleph_0 > \mathfrak{M} \geqslant \mathfrak{N}$ или $\mathfrak{M} > \mathfrak{N}$, то существует единственное кардинальное число $\mathfrak{A}$, которое в сумме с $\mathfrak{N}$ даёт $\mathfrak{M}$; для удобства договоримся обозначать это число $\mathfrak{A}$ через $\mathfrak{M} - \mathfrak{N}$ (ясно, что если $\mathfrak{M} \geqslant \aleph_0$, то из $\mathfrak{M} > \mathfrak{N}$ будет следовать $\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = \mathfrak{M}$).

Лемма 1.8. *Если $\mathcal{D}$ — какое-либо континуальное почти дизъюнктное семейство счётных подмножеств счётного множества L, то множество $L \setminus (X \cup Y)$ бесконечно для любых $X, Y \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Пусть выполняется $X, Y \in \mathcal{D}$. Из $|\mathcal{D}| = \mathfrak{c}$ видно, что найдётся множество $Z \in \mathcal{D} \setminus \{X, Y\}$; тогда

$$Z \cap (X \cup Y) = (Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$$

есть конечное подмножество множества L и, значит,

$$\begin{aligned}\aleph_0 = |L| \geqslant |L \setminus (X \cup Y)| \geqslant |Z \setminus (X \cup Y)| = |Z| - |Z \cap (X \cup Y)| = \\ = \aleph_0 - |Z \cap (X \cup Y)| = \aleph_0,\end{aligned}$$

откуда следует равенство $|L \setminus (X \cup Y)| = \aleph_0$. ■

§2. Из теории радикалов модулей

Рассматриваемые в работе кольца будем предполагать ассоциативными и содержащими единичный элемент $\neq 0$; отсюда сразу получаем, что каждое кольцо содержит по меньшей мере два элемента. Категорию правых (левых) модулей над кольцом S мы обозначим через mod-S (соответственно S-mod), и для удобства классы объектов этих категорий обозначаются точно так же. Будем использовать символ 1_S для единичного элемента кольца S.

Прежде всего нам потребуется ряд определений и фактов, касающихся радикалов [12, 82].

Определение 2.1. Пусть всякому модулю $A \in$ mod-S сопоставлен его подмодуль $\rho(A)$. Мы будем говорить, что ρ — *предрадикал* категории mod-S, если выполнено следующее свойство:

$$\varphi(\rho(B)) \subset \rho(A) \text{ для любого } S\text{-гомоморфизма } \varphi\colon B \to A.$$

Предложение 2.2 [12]. *Если ρ — некоторый предрадикал категории* mod-S *и $\{A_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство правых S-модулей, то*

$$\rho\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i\Big) = \bigoplus_{i\in I} \rho(A_i).$$

Для всякого предрадикала ρ символами $\mathcal{R}(\rho)$ и $\mathcal{P}(\rho)$ обозначим классы всех модулей A соответственно со свойством $\rho(A) = A$ и свойством $\rho(A) = 0$. Рассмотрим следующие возможные свойства предрадикала ρ.

R1. $\rho(\rho(A)) = \rho(A)$ для любого модуля A.

R1*. $\rho(A/\rho(A)) = 0$ для любого модуля A.

R2. $\rho(B) = B \cap \rho(A)$ для любого модуля A и $B \subset A$.

R2*. $\rho(A/B) = (\rho(A) + B)/B$ для любого модуля A и $B \subset A$.

Определение 2.3. Предрадикал ρ называется:

— *идемпотентным*, если он удовлетворяет условию R1;

— *радикалом*, если он удовлетворяет условию R1*;

— *идемпотентным радикалом*, если выполнены условия R1 и R1*;

— *кручением*, если выполнены условия R1* и R2;

— *кокручением*, если выполнены условия R1 и R2*.

Из данного определения сразу вытекает, что и кручения, и кокручения являются идемпотентными радикалами. Заметим также, что идемпотентный радикал удовлетворяет условию R2 в том и только в том случае, когда класс $\mathcal{R}(\rho)$ является замкнутым относительно подмодулей, а условию R2* — в том и только в том случае, когда $\mathcal{P}(\rho)$ замкнут относительно фактормодулей.

Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}$ — какие-нибудь классы S-модулей. Введём предрадикалы $\rho^{\mathcal{R}}$ и $\rho_{\mathcal{P}}$, полагая

$$\rho^{\mathcal{R}}(A) = \sum\{B \subset A \mid B \in \mathcal{R}\},$$
$$\rho_{\mathcal{P}}(A) = \bigcap\{B \subset A \mid A/B \in \mathcal{P}\}.$$

Последовательность модулей и гомоморфизмов вида

$$A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A''$$

называется *точной*, если выполнено равенство $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Более длинную последовательность называют точной, если у любой пары последовательных гомоморфизмов образ первого гомоморфизма равен ядру второго: например, последовательность

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \longrightarrow 0 \tag{2.1}$$

точна тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\alpha$ совпадает с модулем $\operatorname{Ker}\beta$, а α и β — соответственно мономорфизм и эпиморфизм. Если для заданных модулей A, A' и A'' существует точная последовательность вида (2.1), то будем называть модуль A *расширением* модуля A' при помощи A''. В этом случае, очевидно, имеем $A' \cong \operatorname{Im}\alpha$ и $A'' \cong A/\operatorname{Im}\alpha$.

Определение 2.4. Непустой класс S-модулей $\mathcal{X}$ называется:

— *абстрактным*, если $\mathcal{X}$ замкнут относительно изоморфных образов;

— *предрадикальным*, если $\mathcal{X}$ замкнут относительно гомоморфных образов и прямых сумм;

— *предполупростым*, если $\mathcal{X}$ есть замкнутый относительно подмодулей и прямых произведений абстрактный класс;

— *радикальным* (соответственно *полупростым*), если $\mathcal{X}$ предрадикален (соответственно предполупрост) и замкнут относительно расширений.

Предложение 2.5 [12]. (a) *Для предрадикального класса* $\mathcal{R} \subset \text{mod-}S$ *следующие условия эквивалентны*:

1) $\rho^{\mathcal{R}}$ *является идемпотентным радикалом*;

2) *класс* $\mathcal{R}$ *замкнут относительно расширений.*

(б) *Для предполупростого класса* $\mathcal{P} \subset \text{mod-}S$ *следующие условия эквивалентны*:

1) $\rho_{\mathcal{P}}$ *является идемпотентным радикалом*;

2) *класс* $\mathcal{P}$ *замкнут относительно расширений.*

Следующий результат устанавливает связь между классами S-модулей и идемпотентными радикалами категории $\text{mod-}S$.

Предложение 2.6 [12]. (a) *Класс* $\mathcal{R} \subset \text{mod-}S$ *радикален в точности тогда, когда справедливо равенство* $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\rho)$, *где* ρ *есть подходящий идемпотентный радикал категории* $\text{mod-}S$. *Сопоставления* $\rho \rightsquigarrow \mathcal{R}(\rho)$ *и* $\mathcal{R} \rightsquigarrow \rho^{\mathcal{R}}$ *задают биективное соответствие между идемпотентными радикалами и радикальными классами категории* $\text{mod-}S$.

(б) *Класс* $\mathcal{P} \subset \text{mod-}S$ *полупрост в точности тогда, когда справедливо равенство* $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$, *где* ρ *есть подходящий идемпотентный радикал категории* $\text{mod-}S$. *Сопоставления* $\rho \rightsquigarrow \mathcal{P}(\rho)$ *и* $\mathcal{P} \rightsquigarrow \rho_{\mathcal{P}}$ *задают биективное соответствие между идемпотентными радикалами и полупростыми классами категории* $\text{mod-}S$.

Радикальным и полупростым классами идемпотентного радикала ρ мы называем классы $\mathcal{R}(\rho)$ и $\mathcal{P}(\rho)$ соответственно.

Предрадикалы можно частично упорядочить: будем считать, что $\rho \leqslant \sigma$ в точности в том случае, когда включение $\rho(A) \subset \sigma(A)$ имеет место при всех $A \in \text{mod-}S$.

Мы зафиксируем некоторый предрадикал ρ и для каждого ординала β сопоставим произвольному модулю A его подмодуль $\rho^\beta(A)$. Сделаем это так: обозначим $\rho^0(A) = A$; если для некоторого ординала α выполнено $\beta = \alpha + 1$, то $\rho^\beta(A) = \rho(\rho^\alpha(A))$; если же β является ненулевым предельным ординалом, полагаем $\rho^\beta(A) = \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \rho^\alpha(A)$. Получаем убывающую цепь подмодулей

$$A = \rho^0(A) \supset \rho^1(A) \supset \rho^2(A) \supset \ldots \supset \rho^\alpha(A) \supset \ldots .$$

Она, очевидно, стабилизируется, и существует наименьший ординал γ такой, что справедливо равенство $\rho^\gamma(A) = \rho^{\gamma+1}(A)$. Обозначим $\widehat{\rho}(A) = \rho^\gamma(A)$.

Двойственным образом задаются подмодули $\rho_\beta(A)$ модуля A: полагаем $\rho_0(A) = 0$; если $\beta = \alpha + 1$ для некоторого ординала α, то выберем $\rho_\beta(A)$ так, чтобы выполнялось $\rho(A/\rho_\alpha(A)) = \rho_\beta(A)/\rho_\alpha(A)$; наконец, если β — ненулевой предельный ординал, то $\rho_\beta(A) = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} \rho_\alpha(A)$. Получаем цепь подмодулей

$$0 = \rho_0(A) \subset \rho_1(A) \subset \rho_2(A) \subset \ldots \subset \rho_\alpha(A) \subset \ldots .$$

Пусть γ есть наименьшее ординальное число, для которого $\rho_\gamma(A) = \rho_{\gamma+1}(A)$. Введём обозначение $\bar{\rho}(A) = \rho_\gamma(A)$.

Нетрудно убедиться, что $\widehat{\rho}$ и $\bar{\rho}$ — предрадикалы.

Предложение 2.7 [82]. (а) *$\widehat{\rho}$ — идемпотентный предрадикал. Кроме того, $\widehat{\rho}$ — наибольший из всех идемпотентных предрадикалов σ таких, что выполнено $\sigma \leqslant \rho$.*

(б) *Предрадикал $\bar{\rho}$ является радикалом. Кроме того, $\bar{\rho}$ — наименьший из всех радикалов σ таких, что выполнено $\sigma \geqslant \rho$.*

Предложение 2.8 [12]. *При любом предрадикале ρ категории* mod-S *классы $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\rho)$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$ обладают следующими свойствами:*

(а) $\widehat{\rho} = \rho^{\mathcal{R}}$, *причём* $\mathcal{R}(\widehat{\rho}) = \mathcal{R}$;

(б) $\bar{\rho} = \rho_{\mathcal{P}}$, *причём* $\mathcal{P}(\bar{\rho}) = \mathcal{P}$.

Как отмечено в [12], для всякого идемпотентного радикала ρ и всякого модуля A справедливы равенства

$$\rho(A) = \sum\bigl\{B \subset A \mid \rho(B) = B\bigr\},$$
$$\rho(A) = \bigcap\bigl\{B \subset A \mid \rho(A/B) = 0\bigr\}.$$

Отсюда получаем полезный критерий:

Предложение 2.9. *Пусть ρ есть какой-то идемпотентный радикал категории* mod-S *и B есть какой-то подмодуль модуля A_S. Тогда $\rho(A) = B$ в том и только в том случае, когда $\rho(B) = B$ и $\rho(A/B) = 0$.*

Предложение 2.10 [12]. *Для любых идемпотентных радикалов ρ, σ эквивалентны следующие условия*:

1) $\rho \leqslant \sigma$;

2) $\mathcal{R}(\rho) \subset \mathcal{R}(\sigma)$;

3) $\mathcal{P}(\rho) \supset \mathcal{P}(\sigma)$.

При помощи этого предложения нетрудно убедиться, что совокупность идемпотентных радикалов категории mod-S будет полной большой решёткой с нулём и единицей (*большая решётка* отличается от обычной тем, что наша совокупность может оказаться собственным классом). Операции пересечения и объединения задаются в этой большой решётке соотношениями

$$\Bigl[\bigwedge_{\rho\in\mathcal{S}}\rho\Bigr](A) = \sum\bigl\{B \subset A \bigm| B \in \mathcal{R}(\rho) \text{ для всех } \rho \in \mathcal{S}\bigr\}, \tag{2.2}$$

$$\Bigl[\bigvee_{\rho\in\mathcal{S}}\rho\Bigr](A) = \bigcap\bigl\{B \subset A \bigm| A/B \in \mathcal{P}(\rho) \text{ для всех } \rho \in \mathcal{S}\bigr\} \tag{2.3}$$

(здесь $\mathcal{S}$ — любое семейство идемпотентных радикалов); при этом

$$\mathcal{R}\Bigl(\bigwedge_{\rho\in\mathcal{S}}\rho\Bigr) = \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}}\mathcal{R}(\rho) \quad \text{и} \quad \mathcal{P}\Bigl(\bigvee_{\rho\in\mathcal{S}}\rho\Bigr) = \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}}\mathcal{P}(\rho).$$

Через $\mathcal{IR}(S)$ будем обозначать большую решётку идемпотентных радикалов категории mod-S. Нуль и единицу этой большой решётки обозначаем через 0 и 1 соответственно.

Для произвольного кольца S можно дать полное описание кокручений категории mod-S.

Предложение 2.11 [12]. *Пусть ρ — какой-то предрадикал в* mod-S. *Следующие условия эквивалентны*:

1) ρ — *кокручение*;

2) *можно найти идемпотентный идеал J кольца S, для которого при любом $A \in$* mod-S *выполнено $\rho(A) = AJ$.*

Вторая глава диссертации будет посвящена идемпотентным радикалам категории mod-$\mathbf{Z}$, объектами которой служат абелевы группы. Мы приведём ряд фактов о таких радикалах [19, 22, 54, 60].

Все встречающиеся в диссертации группы считаем абелевыми. Через $\mathbf{P}$ обозначаем множество всех простых чисел, через $\mathbf{t}_p(A)$ и $\mathbf{t}(A)$ — примарную p-компоненту ($p \in \mathbf{P}$) и периодическую часть группы A соответственно.

Теорема 2.12 [22, 54]. *Предрадикал ρ, заданный в категории* mod-$\mathbf{Z}$, *будет кручением в точности тогда, когда выполнено одно из условий*:

(а) $\rho(A) = A$ *для всякой группы A*;

(б) *существует подмножество X (возможно, пустое) множества $\mathbf{P}$ такое, что для всякой группы A выполнено*

$$\rho(A) = \bigoplus_{p \in X} \mathbf{t}_p(A). \tag{2.4}$$

В частности, предрадикалы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}_p$, где $p \in \mathbf{P}$, будут кручениями.

Теорема 2.13 [54]. *Для любого идемпотентного радикала $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ и любой группы A эквивалентны следующие условия*:

1) $A \in \mathcal{R}(\rho)$;

2) $\mathbf{t}(A) \in \mathcal{R}(\rho)$ *и* $A/\,\mathbf{t}(A) \in \mathcal{R}(\rho)$.

В частности, из $A \in \mathcal{R}(\rho)$ следует, что $\mathbf{t}_p(A) \in \mathcal{R}(\rho)$ для всех $p \in \mathbf{P}$.

Подгруппу B группы A называют *сервантной*, если для всякого $n \in \mathbf{N}$ выполнено $B \cap nA = nB$, т. е. для каждого $b \in B$ и для каждого n уравнение $nx = b$ разрешимо в A тогда и только тогда, когда оно разрешимо в B.

Предложение 2.14 [60]. *Для всякого радикала $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ подгруппа $\rho(A) \subset A$ является сервантной при всех $A \in \mathrm{mod}\text{-}\mathbf{Z}$.*

Следуя [30, 31], мы назовём *рациональной* всякую группу, изоморфную некоторой ненулевой подгруппе группы всех рациональных чисел $\mathbf{Q}$.

Следствие 2.15 [60]. *Если $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$, то для каждой рациональной группы A выполнено $\rho(A) = 0$ или $\rho(A) = A$.*

Следствие 2.16 [60]. *Предрадикал $\mathbf{d}$, который ставит произвольной группе в соответствие наибольшую из её делимых подгрупп, представляет собой наименьший среди идемпотентных радикалов $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ таких, что класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит непериодические группы.*

Приведём описание радикалов $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$, имеющих свойство $\rho \leqslant \mathbf{t}$.

Теорема 2.17 [19, 54]. *Для каждого радикала $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ следующие условия эквивалентны:*

1) $\rho \leqslant \mathbf{t}$;

2) *радикальный класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит лишь периодические группы*;

3) *существуют непересекающиеся подмножества X и Y из $\mathbf{P}$ такие, что для любой группы A выполнено*

$$\rho(A) = \Big(\bigoplus_{p \in X} \mathbf{t}_p(A)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in Y} \mathbf{d}(\mathbf{t}_p(A))\Big). \tag{2.5}$$

§3. Основные свойства функторов $\otimes$ и Hom

Пусть $A \in \text{mod-}S$ и $F \in S\text{-mod}$, и пусть Λ — свободная абелева группа, базисом которой является множество $A \times F$. Через Λ' обозначаем подгруппу группы Λ, порождаемую элементами вида

$$(a + a', f) - (a, f) - (a', f),$$
$$(a, f + f') - (a, f) - (a, f'),$$
$$(as, f) - (a, sf);$$

здесь $a, a' \in A$, $f, f' \in F$ и $s \in S$. Группа Λ/Λ' будет называться *тензорным произведением* модулей A и F и обозначаться через $A \otimes_S F$. Образ элемента $(a, f) \in \Lambda$ при естественном эпиморфизме $\Lambda \to \Lambda/\Lambda'$ обозначим через $a \otimes_S f$. Если кольцо S коммутативно, то $A \otimes_S F \cong F \otimes_S A$.

Очевидно, что в случае абелевых групп при определении подгруппы Λ' можно не учитывать элементы вида $(as, f) - (a, sf)$. Если выполнено $S = \mathbf{Z}$, то пишем просто $A \otimes F$ и $a \otimes f$.

Определение 3.1. Пусть даны модули A_S и ${}_SF$ и (абелева) группа N. Отображение $g\colon A \times F \to N$ называется *билинейным*, если для всех $a, a' \in A$ и $f, f' \in F$ выполнено

$$g(a + a', f) = g(a, f) + g(a', f),$$
$$g(a, f + f') = g(a, f) + g(a, f').$$

Билинейное отображение g называем *S-сбалансированным*, если для каждых элементов $a \in A$, $f \in F$ и $s \in S$ выполнено $g(as, f) = g(a, sf)$.

Нетрудно показать, что отображение $h\colon A \times F \to A \otimes_S F$, переводящее всякую пару (a, f) в $a \otimes_S f$, будет S-сбалансированным. Следующая теорема подчёркивает важность тензорных произведений.

Теорема 3.2 [11]. *Если даны абелева группа N и S-сбалансированное отображение $g\colon A \times F \to N$, то можно найти в точности один групповой* *гомоморфизм* $\bar{g}\colon A \otimes_S F \to N$ *такой, что* $g = \bar{g}h$ *(это свойство определяет группу* $A \otimes_S F$ *однозначно с точностью до изоморфизма).*

Предложение 3.3 [11]. *Пусть даны два модуля* ${}_SF$, A_S *и выполнено* $F = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$ *и* $A = \bigoplus\limits_{j\in J} A_j$. *Тогда* $A \otimes_S F \cong \bigoplus\limits_{i,j}(A_j \otimes_S F_i)$.

Множество $\mathrm{Hom}_S(V, A)$, элементами которого служат все S-модульные гомоморфизмы из V в A, образует группу относительно операции

$$(\varphi + \varphi')(v) = \varphi(v) + \varphi'(v), \qquad \text{где } \varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}_S(V, A) \text{ и } v \in V.$$

Если $S = \mathbf{Z}$, то пишем просто $\mathrm{Hom}(V, A)$. Очевидно, что для любых V_S и A_S выполнено $\mathrm{Hom}_S(V, A) \subset \mathrm{Hom}(V, A)$.

Элементы множества $\mathrm{Hom}_S(V, V)$ назовём *эндоморфизмами* модуля V_S (вместо $\mathrm{Hom}_S(V, V)$ мы часто будем писать $\mathrm{End}\, V_S$). Если выполнено $V_S \neq 0$, то $\mathrm{End}\, V_S$ окажется кольцом относительно операций сложения и композиции эндоморфизмов.

Предложение 3.4 [11]. *Пусть даны два модуля* V_S, A_S *и выполнено* $V = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$ *и* $A = \prod\limits_{j\in J} A_j$. *Тогда* $\mathrm{Hom}_S(V, A) \cong \prod\limits_{i,j} \mathrm{Hom}_S(V_i, A_j)$.

Два приведённых ниже результата говорят о том, что операция взятия тензорного произведения ассоциативна (с точностью до изоморфизма) и что функтор Hom сопряжён справа к функтору $\otimes$.

Теорема 3.5 [11]. *Пусть* $A \in \text{mod-}S$, $C \in R\text{-mod}$ *и* B *есть какой-то* S-R-*бимодуль. Тогда*:

(а) $A \otimes_S B$ *и* $B \otimes_R C$ *можно естественным образом снабдить правой* R-*модульной и левой* S-*модульной структурой соответственно*;

(б) *имеет место групповой изоморфизм*

$$(A \otimes_S B) \otimes_R C \overset{\varepsilon}{\cong} A \otimes_S (B \otimes_R C),$$

задаваемый равенством $\varepsilon\big((a \otimes_S b) \otimes_R c\big) = a \otimes_S (b \otimes_R c)$.

Теорема 3.6 [11]. *Пусть* $A \in \text{mod-}S$, $C \in \text{mod-}R$ *и* B *есть какой-то* R-S*-бимодуль. Тогда*:

(а) $\mathrm{Hom}_S(B, A)$ (*соответственно* $\mathrm{Hom}_S(A, B)$) *можно естественным образом снабдить структурой правого* (*соответственно левого*) R*-модуля*;

(б) *имеет место групповой изоморфизм*

$$\mathrm{Hom}_R(C, \mathrm{Hom}_S(B, A)) \overset{\varepsilon}{\cong} \mathrm{Hom}_S(C \otimes_R B, A),$$

задаваемый равенством $\bigl[\varepsilon(\varphi)\bigr](c \otimes_R b) = \bigl[\varphi(c)\bigr](b)$.

Предложение 3.7 [20, 46]. *Пусть* $A \in \text{mod-}S$. *Тогда*:

(а) *отображения* $a \rightsquigarrow a \otimes_S 1$ *и* $a \otimes_S s \rightsquigarrow as$ *задают взаимно обратные изоморфизмы между* A_S *и* $A \otimes_S S$;

(б) *отображения* $a \rightsquigarrow \varphi_a$ (*где* $\varphi_a(s) = as$ *при любом* $s \in S$) *и* $\varphi \rightsquigarrow \varphi(1)$ *задают взаимно обратные изоморфизмы между* A_S *и* $\mathrm{Hom}_S(S, A)$.

Если $F \in S\text{-mod}$, то гомоморфизм правых S-модулей $\beta \in \mathrm{Hom}_S(A, A'')$ индуцирует гомоморфизм групп $\overline{\beta}\colon A \otimes_S F \to A'' \otimes_S F$, переводящий всякий элемент $a \otimes_S f$, где $a \in A$ и $f \in F$, в $\beta(a) \otimes_S f$. Далее, при любом модуле V_S мы можем задать групповые гомоморфизмы $\beta_*\colon \mathrm{Hom}_S(V, A) \to \mathrm{Hom}_S(V, A'')$ и $\beta^*\colon \mathrm{Hom}_S(A'', V) \to \mathrm{Hom}_S(A, V)$, действующие следующим образом:

$$\bigl[\beta_*(\varphi)\bigr](v) = \beta(\varphi(v)), \qquad \text{где } v \in V \text{ и } \varphi \in \mathrm{Hom}_S(V, A),$$
$$\bigl[\beta^*(\varphi)\bigr](a) = \varphi(\beta(a)), \qquad \text{где } a \in A \text{ и } \varphi \in \mathrm{Hom}_S(A'', V).$$

Теорема 3.8 [9]. *Если* (2.1) — *какая-то точная последовательность правых* S*-модулей, то при любых* $F \in S\text{-mod}$ *и* $V \in \text{mod-}S$ *индуцированные последовательности групп*

$$A' \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\beta}} A'' \otimes_S F \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(V, A') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_S(V, A) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_S(V, A''),$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(A'', V) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_S(A, V) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_S(A', V)$$

также являются точными.

Определение 3.9. Модуль V_S назовём *проективным* (*инъективным*), если в категории mod-S для любой точной последовательности модулей (2.1) индуцированная последовательность групп

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(V, A') \xrightarrow{\alpha_*} \mathrm{Hom}_S(V, A) \xrightarrow{\beta_*} \mathrm{Hom}_S(V, A'') \longrightarrow 0$$

или соответственно индуцированная последовательность групп

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(A'', V) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{Hom}_S(A, V) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_S(A', V) \longrightarrow 0$$

также является точной.

Определение 3.10. Левый S-модуль F назовём *плоским*, если всякая точная последовательность правых S-модулей вида (2.1) индуцирует точную последовательность групп

$$0 \longrightarrow A' \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\beta}} A'' \otimes_S F \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

Определение 3.11. Будем называть подмодуль B модуля A_S *чистым* (говорят также «чистым в смысле Кона»), если для любого модуля ${}_SF$ гомоморфизм $B \otimes_S F \to A \otimes_S F$, индуцируемый естественным вложением B в A, является мономорфизмом.

Легко заметить, что всякое прямое слагаемое модуля будет его чистым подмодулем [29].

Определение 3.12. Будем называть $\cap$-*чистым* каждый подмодуль B модуля A_S такой, что $B \cap Ar = Br$ при всех $r \in S$.

В заключение параграфа мы приведём несколько фактов, относящихся к свойствам тензорных произведений абелевых групп и p-адических модулей (т. е. модулей над кольцом целых p-адических чисел $\mathbf{Q}_p^*$). Приведённые ниже теоремы 3.13 и 3.16 следуют из того, что кольца $\mathbf{Q}_p^*$ и $\mathbf{Z}$ являются областями главных идеалов.

Пусть p — произвольное простое число.

Теорема 3.13 [20]. (а) *A будет плоским модулем над $\mathbf{Z}$ в точности в том случае, когда A есть группа без кручения.*

(б) *A будет плоским модулем над $\mathbf{Q}_p^*$ в точности в том случае, когда A есть p-адический модуль без кручения.*

Подгруппа B группы A называется *p-сервантной*, если $B \cap p^k A = p^k B$ для любого натурального числа k.

Определение 3.14. Точную последовательность групп (2.1) называют *сервантно точной* (*p-сервантно точной*) в том случае, если подгруппа $\operatorname{Im}\alpha$ группы A сервантна (соответственно p-сервантна).

Теорема 3.15 [30]. (а) *Если последовательность* (3.1) *индуцируется сервантно точной последовательностью вида* (2.1), *то она сама сервантно точна для всякой группы F.*

(б) *Если последовательность* (3.1) *индуцируется p-сервантно точной последовательностью вида* (2.1), *то она сервантно точна, если $\mathbf{t}_p(F) = F$.*

Теорема 3.16 [73]. (а) *Подгруппа группы A чиста в том и только в том случае, когда она сервантна* (*т. е. $\cap$-чиста*) *в A.*

(б) *Если A есть p-адический модуль, то его подмодуль B чист в том и только в том случае, когда $B \cap p^k A = p^k B$ для всякого $k \in \mathbf{N}$* (*т. е. когда B является $\cap$-чистым подмодулем*).

§4. Матричные кольца и модули над ними

Конструкции, которые мы рассмотрим в данном параграфе, позволяют строить кольца с разнообразными свойствами, что будет использовано в §12. Для множеств A, B, B', C условимся использовать обозначение

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B' & C \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b' & c \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in A,\, b \in B,\, b' \in B',\, c \in C \right\}.$$

Если V' и V'' — правые S-модули, хотя бы один из которых не равен 0, то нетрудно видеть, что множество матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End} V'_S & \operatorname{Hom}_S(V'', V') \\ \operatorname{Hom}_S(V', V'') & \operatorname{End} V''_S \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

является кольцом относительно матричного сложения и умножения.

Предложение 4.1 [26]. *Если ненулевой модуль V_S обладает прямым разложением $V = V' \oplus V''$, то кольцо $\operatorname{End} V_S$ изоморфно кольцу (4.1).*

Предложение 4.2 [28]. *Пусть A и C — некоторые кольца, и пусть ${}_A B_C$ — бимодуль. Тогда множество матриц, задаваемое равенством*

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

образует кольцо относительно матричного сложения и умножения.

С этого места и до конца параграфа мы будем считать, что A и C суть некоторые кольца, B есть A-C-бимодуль и кольцо S задано равенством (4.2).

Заметим, что существует кольцевой изоморфизм

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \overset{\varepsilon}{\cong} \begin{pmatrix} C & 0 \\ B & A \end{pmatrix}, \qquad \text{где } \varepsilon \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Легко также видеть, что $1_S = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_C \end{pmatrix}$.

Теорема 4.3 [65, 66]. *При любом правом S-модуле существует изоморфный ему модуль $V = X \times Y$, где X и Y — правые модули над кольцами A и C соответственно, операция сложения на V задаётся покоординатно, а умножение на элемент кольца S определяется правилом*

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \bigl(xa, f(x \otimes_A b) + yc\bigr),$$

где $f \in \mathrm{Hom}_C(X \otimes_A B, Y)$. Обратно, если на множестве $X_A \times Y_C$ вводятся операции указанного вида, то оно становится правым S-модулем.

В дальнейшем описанный выше S-модуль мы из соображений удобства будем обозначать не через $X \times Y$, а через (X, Y).

Теорема 4.4 [65, 66]. *Пусть $V = (X, Y)$ — описанный в теореме 4.3 правый S-модуль. Для отображения $\chi\colon V \to V$ эквивалентны условия:*

1) $\chi \in \mathrm{End}\, V_S$;

2) *для всех $(x, y) \in V$ выполнено $\chi(x, y) = \bigl(\xi(x), \eta(y)\bigr)$, где $\xi \in \mathrm{End}\, X_A$, $\eta \in \mathrm{End}\, Y_C$ и $\eta\bigl(f(x \otimes_A b)\bigr) = f\bigl(\xi(x) \otimes_A b\bigr)$ при любых $x \in X$ и $b \in B$.*

Предложение 4.5. *Пусть A, C, Σ — какие-нибудь кольца, $\alpha\colon A \to \Sigma$ и $\gamma\colon C \to \Sigma$ — кольцевые гомоморфизмы. Тогда множество*

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S \;\middle|\; \alpha(a) = \gamma(c) \right\}$$

является кольцом относительно матричного сложения и умножения.

Доказательство. Пусть $s_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ и $s_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$s_1 - s_2 = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & c_1 - c_2 \end{pmatrix}, \qquad s_1 s_2 = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix};$$

если $s_1, s_2 \in S'$, имеем $\alpha(a_1 - a_2) = \alpha(a_1) - \alpha(a_2) = \gamma(c_1) - \gamma(c_2) = \gamma(c_1 - c_2)$ и $\alpha(a_1 a_2) = \alpha(a_1)\alpha(a_2) = \gamma(c_1)\gamma(c_2) = \gamma(c_1 c_2)$, откуда $s_1 - s_2 \in S'$ и $s_1 s_2 \in S'$.

Наконец, из равенств $\alpha(1_A) = 1_\Sigma = \gamma(1_C)$ получаем $1_S \in S'$. Поэтому S' есть подкольцо кольца S. ■

Известно, что квадратная матрица над полем обратима в том и только в том случае, когда её определитель не равен нулю. Имеет место следующий критерий обратимости матрицы над коммутативным кольцом:

Теорема 4.6 [4]. *Произвольная $(n \times n)$-матрица, элементы которой принадлежат какому-либо коммутативному кольцу Σ, обратима в полном кольце матриц порядка n над этим кольцом в том и только в том случае, когда её определитель обратим в Σ.*

Матрица $(\beta_{ij})_{i,j\in\mathbf{N}}$ с элементами из фиксированного кольца называется *конечно-столбцовой*, если всякий столбец матрицы содержит лишь конечное число отличных от 0 элементов (множество всех конечно-столбцовых матриц образует кольцо относительно матричного сложения и умножения).

Предложение 4.7 [46]. *Пусть Σ — какое-нибудь тело. Тогда кольцо всех конечно-столбцовых $(\mathbf{N} \times \mathbf{N})$-матриц, элементы которых лежат в Σ, изоморфно кольцу всех линейных преобразований Σ-пространства*

$$\Sigma^{(\mathbf{N})} = \bigoplus_{j=1}^{\infty} \Sigma_j, \qquad \text{где } \Sigma_j \cong \Sigma_\Sigma.$$

Определение 4.8. Мы назовём кольцо *примитивным справа* (*слева*), если в нём существует максимальный правый (соответственно левый) идеал, не содержащий ненулевых двусторонних идеалов.

И класс примитивных справа колец, и класс примитивных слева колец содержит, в частности, все *простые* кольца, т. е. кольца, имеющие ровно два двусторонних идеала.

Предложение 4.9 [46]. *Пусть R — некоторое подкольцо кольца всех конечно-столбцовых матриц с элементами из тела Σ, причём для каждого* *числа* $n \geqslant 1$ *и каждой* $(n \times n)$*-матрицы* M *с элементами из* Σ *подкольцо* R *содержит некоторую матрицу вида*

$$\begin{pmatrix} M & M' \\ 0 & M'' \end{pmatrix}.$$

Тогда R — *примитивное слева кольцо.*

Будет справедлив и правый аналог предложения 4.9: если подкольцо R кольца конечно-строчных матриц обладает тем свойством, что для любого n и любой $(n \times n)$-матрицы M это подкольцо содержит матрицу вида

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ M' & M'' \end{pmatrix},$$

то R — примитивное справа кольцо.

§5. Аддитивные структуры колец и модулей

Будем приписывать кольцам свойства их аддитивных групп; например, мы называем кольцо S периодическим в случае, если аддитивная группа S^+ указанного кольца является периодической. Напомним, что *характеристика* $\operatorname{char} S$ кольца S — это наименьшее натуральное число n такое, что $n \cdot 1_S = 0$ (если такого натурального числа не существует, полагают $\operatorname{char} S = 0$).

Определение 5.1. Группа A называется *n-ограниченной*, если $nA = 0$ (здесь n — какое-либо натуральное число). Группа называется *ограниченной*, если она является n-ограниченной хотя бы для одного $n \in \mathbf{N}$.

Предложение 5.2. *Пусть S — кольцо и* $\operatorname{char} S = n > 0$. *Тогда*:

(а) *для любого модуля V_S выполнено $nV = 0$ и $n \operatorname{End} V_S = 0$;*

(б) *циклическая группа $\langle 1_S \rangle$ есть прямое слагаемое группы S^+.*

Доказательство. (а) Достаточно заметить, что для всех $v \in V$ имеют место равенства $nv = v(n \cdot 1_S) = 0$.

(б) Пусть $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, где $p_i \in \mathbf{P}$. Тогда ввиду соотношения $nS = 0$ порядки элементов каждой p_i-компоненты группы S^+ ограничены числом $p_i^{k_i}$ и, значит, каждая циклическая подгруппа порядка $p_i^{k_i}$ есть прямое слагаемое соответствующей примарной компоненты группы S^+ [30]. Отсюда мы видим, что подгруппа

$$\langle 1_S \rangle \cong \mathbf{Z}(p_1^{k_1}) \oplus \mathbf{Z}(p_2^{k_2}) \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}(p_m^{k_m})$$

будет прямым слагаемым группы S^+. ■

В частности, если $S = \mathbf{Z}_n$ (где n — натуральное число), то для всякого модуля V_S имеем $nV = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если V есть n-ограниченная группа, то V допускает структуру модуля над $\mathbf{Z}_n$; очевидно, что эта модульная структура единственна.

Через p будем обозначать некоторое простое число. В этом параграфе, как и в следующих двух главах, мы для краткости обозначаем p-компоненту группы A символом A_p. Если S — произвольное кольцо, то S_p будет идеалом этого кольца и для любого модуля V_S подгруппа V_p будет S-подмодулем.

Лемма 5.3. *Если S — кольцо, а целое число $k \geqslant 0$ таково, что $p^k \cdot 1_S$ имеет бесконечную p-высоту в группе S^+, то при любом $V \in \text{mod-}S$ будет выполнено $p^k V_p = 0$.*

Доказательство. Пусть $v \in V_p$. В силу условия леммы элемент $p^k \cdot 1_S$ делится в группе S^+ на порядок элемента v. Отсюда сразу вытекает $p^k v = 0$, что и требовалось. ■

Предложение 5.4. *Если кольцо S удовлетворяет равенству $pS = S$, то для всякого модуля V_S выполнено $V_p = 0$ и $pV = V$.*

Доказательство. Ясно, что $pV = V(pS) = VS = V$. Далее, применяя лемму 5.3 к случаю $k = 0$, получаем $V_p = 0$. ■

Лемма 5.5. *Пусть S — кольцо, для которого $S/\,\mathbf{t}(S)$ есть p-делимая группа. Тогда:*

(а) *можно найти целое число $k \geqslant 0$ такое, что $p^k V_p = 0$ для каждого модуля $V \in \text{mod-}S$;*

(б) *каждый модуль V_S разлагается в прямую сумму $V = V' \oplus V_p$ двух своих подмодулей, где V' — множество всех элементов модуля V, которые имеют в V бесконечную p-высоту;*

(в) *кольцо S разлагается в прямую сумму*

$$S = S' \oplus S_p \tag{5.1}$$

двух идеалов, причём первое прямое слагаемое является p-делимой группой, а второе — ограниченной группой;

(г) *для кольца $Z(S)$ справедливо прямое разложение*

$$Z(S) = Z(S') \oplus Z(S_p), \tag{5.2}$$

обладающее теми же свойствами, что и разложение (5.1).

Доказательство. (а) $S/\mathbf{t}(S)$ и $\mathbf{t}(S)/S_p$ — p-делимые группы, поэтому тем же свойством обладает аддитивная группа кольца S/S_p. Таким образом, $1 + S_p = p(s + S_p)$ для подходящего элемента $s \in S$. Следовательно, элемент $1 - ps \in S$ имеет порядок p^k для некоторого $k \geqslant 0$, а тогда элемент $p^k \cdot 1 \in S$ имеет бесконечную p-высоту. Применяя лемму 5.3, получаем требуемое.

(б) Из пункта (а) вытекает, что сервантная подгруппа $V_p \subset V$ является ограниченной, поэтому существует подгруппа $V' \subset V$ такая, что $V = V' \oplus V_p$ (см. [17]); факторгруппу $V' \cong V/V_p$ можно естественным образом превратить в правый модуль над p-делимым кольцом S/S_p, а значит, все элементы из V' имеют бесконечную p-высоту. Обратно, ввиду ограниченности группы V_p все элементы модуля V, имеющие бесконечную p-высоту, должны принадлежать подгруппе V'. Следовательно, V' является подмодулем в V_S, а $V = V' \oplus V_p$ — модульное прямое разложение.

(в) Применяя пункты (а) и (б) к ситуации $V = S$, мы получаем прямое разложение (5.1), где $p^k S_p = 0$, а правый идеал S' состоит из всех элементов кольца S, которые имеют бесконечную p-высоту. Отсюда уже легко вывести, что S' — двусторонний идеал.

(г) Из пункта (в) несложно получить разложение (5.2), при этом $Z(S_p)$ совпадает с p-компонентой группы $Z(S)$. Следовательно, остаётся проверить p-делимость группы $Z(S')$. Для всякого $a \in Z(S')$ существует элемент $b \in S'$ со свойством $pb = a$; при любом $s \in S'$ выполняется равенство

$$p(bs - sb) = as - sa = 0.$$

В идеале S' нет элементов порядка p, так что $b \in Z(S')$. Итак, мы доказали, что $Z(S')$ является p-делимой группой.

Утверждения леммы остаются справедливыми, если выполнено $S = S_p$: тогда $V' = 0$ и $S' = Z(S') = 0$, а в качестве p^k можно взять $\operatorname{char} S$. ■

Для $n \in \mathbf{N}$ символом $\mathbf{Q}^{(n)}$ обозначим кольцо всех рациональных чисел, у которых знаменатель делит какую-то натуральную степень числа n; далее, если $L \subset \mathbf{P}$, то кольцо всех тех рациональных чисел, у которых знаменатели являются произведениями простых чисел, входящих в L, будет обозначаться символом $\mathbf{Q}^{(L)}$. Очевидно, тогда $\mathbf{Q}^{(\varnothing)} = \mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}^{(\mathbf{P})} = \mathbf{Q}$. Известно, что каждое кольцо без кручения, имеющее ранг 1, изоморфно одному из колец $\mathbf{Q}^{(L)}$.

Из предложения 5.4 следует, что для произвольного модуля V над $\mathbf{Q}^{(L)}$ при всех $p \in L$ выполнено $V_p = 0$ и $pV = V$. Несложно проверить и обратное утверждение: если группа V удовлетворяет равенствам $V_p = 0$ и $pV = V$ при всех $p \in L$, то она допускает $\mathbf{Q}^{(L)}$-модульную структуру; очевидно, что такая структура единственна. Таким образом, справедливо

Предложение 5.6. *Пусть V — какая-то группа и выполнено $L \subset \mathbf{P}$. Следующие условия эквивалентны*:

1) $V_p = 0$ *и* $pV = V$ *при всех* $p \in L$;
2) V *допускает структуру модуля над кольцом* $\mathbf{Q}^{(L)}$;
3) *для всякого* $p \in L$ *группа* V *допускает структуру модуля над* $\mathbf{Q}^{(p)}$.

Предложение 5.7. *Пусть $L \subset \mathbf{P}$ и модуль V_S допускает структуру модуля над кольцом $\mathbf{Q}^{(L)}$. Тогда*:

(а) V *является* $\mathbf{Q}^{(L)}$-S-*бимодулем*;
(б) *для всякого* ${}_SF$ *группа* $V \otimes_S F$ *допускает структуру* $\mathbf{Q}^{(L)}$-*модуля*;
(в) $\operatorname{End} V_S$ *допускает структуру* $\mathbf{Q}^{(L)}$-*модуля.*

Доказательство. Утверждение (а) непосредственно вытекает из того, что умножение на произвольный элемент кольца $\mathbf{Q}^{(L)}$ коммутирует с любым эндоморфизмом из множества $\operatorname{End} V_{\mathbf{Z}}$. Утверждения (б) и (в) следуют из (а) ввиду теорем 3.5 и 3.6 соответственно. ■

Теорема 5.8 справедлива, в частности, для кольца $S = \mathbf{Q}^{(L)}$, где $L \subset \mathbf{P}$.

Теорема 5.8 [21]. *Пусть S — область главных идеалов. Тогда любой конечно порождённый модуль над S может быть представлен как прямая сумма циклических подмодулей.*

Из описания модулей над кольцами $\mathbf{Z}_n$ и $\mathbf{Q}^{(L)}$ следует, что если $S = \mathbf{Z}_n$ или $S = \mathbf{Q}^{(L)}$, то всякое разложение S-модуля в прямую сумму его подгрупп автоматически является S-модульным. Далее, любой модуль над кольцом $\mathbf{Z}_n$ может быть представлен в виде прямой суммы n-ограниченных циклических подгрупп (см. [30]) и, значит, изоморфен прямой сумме некоторого семейства идеалов кольца $\mathbf{Z}_n$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathbf{Z}_n$ есть кообразующий модуль категории mod-$\mathbf{Z}_n$.

Предложение 5.9. *Для модуля V над кольцом $S = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ следующие условия эквивалентны*:

1) V — *свободный модуль*;

2) V — *проективный модуль*;

3) V — *плоский модуль*;

4) V — *инъективный модуль.*

Доказательство. Как известно [11], импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) имеют место для модулей над произвольным кольцом. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из локальности кольца S (см. [70]), а импликация 3) $\Rightarrow$ 2) — из того, что оно является совершенным [11].

Из артиновости кольца S и того факта, что S является кообразующим S-модулем, вытекает, что S — квазифробениусово кольцо. Отсюда получаем, что условия 2) и 4) эквивалентны [11]. ■

Рассмотрим далее некоторые классы колец, обладающих аддитивными группами с достаточно хорошими свойствами.

Определение 5.10. Кольцо R называется *слабо π-регулярным справа* (*слева*), если для каждого $r \in R$ можно найти такое $k \in \mathbf{N}$, что $r^k \in r^kRr^kR$ (соответственно $r^k \in Rr^kRr^k$).

Приведённая ниже диаграмма иллюстрирует связи между некоторыми классами колец [11, 26, 28, 29, 50, 55]. Два класса колец соединены стрелкой, если один из них (расположенный выше) содержит в себе другой.

$$
\begin{tikzcd}
\text{слабо } \pi\text{-регулярные справа} & & \\
& \pi\text{-регулярные} \arrow[ul] & \\
& & \text{строго } \pi\text{-регулярные} \arrow[ul] \\
\text{простые} \arrow[uuu] & \text{регулярные} \arrow[uu] & \text{совершенные справа} \arrow[u] \\
& & \text{артиновы справа или слева} \arrow[u] \\
& \text{классически полупростые} \arrow[uu] \arrow[ur] & \\
\text{тела} \arrow[uuu] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
\tag{5.3}
$$

Лемма 5.11. *Пусть R — слабо π-регулярное справа или слева кольцо. Тогда группа $R/\,\mathbf{t}(R)$ делима.*

Доказательство. Очевидно, что нам достаточно рассмотреть случай, когда R не является периодическим кольцом. Положим $r = p \cdot 1_R$, где $p \in \mathbf{P}$. Пользуясь определением 5.10, получаем, что при некотором $k \geqslant 1$ выполнено условие $p^k \cdot 1_R \in p^{2k}R$. Это означает, что единичный элемент кольца $R/\,\mathbf{t}(R)$ имеет бесконечную p-высоту, т. е. аддитивная группа этого кольца p-делима. Итак, $R/\,\mathbf{t}(R)$ — делимая группа. ■

В завершение параграфа рассмотрим важное понятие, введённое в [80].

Определение 5.12. Пусть R — кольцо; его называют E-*кольцом*, если $\zeta\colon R \to R$ является эндоморфизмом группы R^+ в том и только в том случае, когда ζ есть умножение слева на некоторый элемент кольца R.

Заметим, что все E-кольца являются коммутативными [80]; следующая теорема показывает, что примеры E-колец, а также локальных колец можно обнаружить среди подколец кольца целых p-адических чисел $\mathbf{Q}_p^*$.

Теорема 5.13 [72, 75]. *Пусть* R — *сервантное подкольцо кольца* $\mathbf{Q}_p^*$. *Справедливы следующие утверждения*:

(а) R *является* E-*кольцом*;

(б) *если* R *локально, то все элементы из* $R \setminus pR$ *обратимы в* R;

(в) *если* R' — *собственное сервантное подкольцо конечного ранга в* R, *то* $\mathrm{Hom}(R, R') = 0$;

(г) *если* R *имеет конечный ранг, то* R — *локальное кольцо.*

Доказательство. Утверждение (а) доказано в работе [75].

(б) Для ненулевой сервантной подгруппы G группы $\mathbf{Q}_p^*$ из локальности кольца $\mathrm{End}\, G_{\mathbf{Z}}$ следует, что $p\,\mathrm{End}\, G_{\mathbf{Z}}$ является единственным максимальным идеалом данного кольца [72]. Учитывая кольцевой изоморфизм $\mathrm{End}\, R_{\mathbf{Z}} \cong R$, справедливость которого следует из (а), получаем нужное утверждение.

(в) Предположим, что $\zeta\colon R \to R'$ — аддитивный гомоморфизм и $\zeta \neq 0$. Из пункта (а) и включения $R' \subset R$ следует, что отображение ζ представляет собой умножение на подходящий ненулевой элемент кольца R. Значит, гомоморфизм ζ инъективен, поэтому ранги групп $\mathrm{Im}\,\zeta$ и R^+ совпадают. С другой стороны, из условия $R' \neq R$ и сервантности подкольца R' вытекает, что ранг этого подкольца строго меньше ранга кольца R и, таким образом, $\mathrm{Im}\,\zeta \not\subset R'$. Полученное противоречие доказывает равенство $\mathrm{Hom}(R, R') = 0$.

(г) Для любой отличной от 0 сервантной подгруппы конечного ранга G группы $\mathbf{Q}_p^*$ кольцо $\mathrm{End}\, G_{\mathbf{Z}}$ локально [75]. В силу пункта (а) имеем кольцевой изоморфизм $\mathrm{End}\, R_{\mathbf{Z}} \cong R$, из которого следует требуемое утверждение. ■

§6. $\otimes$-радикалы и Hom-радикалы

Некоторые результаты данного параграфа (предложения 6.1, 6.2 и 6.5) хорошо известны в теории радикалов. Для полноты изложения мы приведём их с доказательствами.

Пусть F есть некоторый левый S-модуль. Введём обозначение

$$^{\otimes}\{F\} = \{A \in \text{mod-}S \mid A \otimes_S F = 0\}.$$

Предложение 6.1. *Класс* $^{\otimes}\{F\}$ *является замкнутым относительно*:

(а) *прямых сумм*;

(б) *гомоморфных образов*;

(в) *расширений.*

Доказательство. (а) Если все слагаемые из какого-либо прямого разложения модуля A принадлежат классу $^{\otimes}\{F\}$, то по предложению 3.3 будем иметь $A \in {}^{\otimes}\{F\}$.

(б) Если $A \in {}^{\otimes}\{F\}$, то для каждого гомоморфного образа A'' модуля A выполнено $A'' \in {}^{\otimes}\{F\}$ (теорема 3.8).

(в) Если A — некоторое расширение модуля A' при помощи модуля A'', то по теореме 3.8 из $A' \in {}^{\otimes}\{F\}$ и $A'' \in {}^{\otimes}\{F\}$ следует $A \in {}^{\otimes}\{F\}$. ■

Итак, класс $^{\otimes}\{F\}$ радикален. Позднее мы увидим, что (вообще говоря) он не замкнут относительно взятия прямых произведений.

Пусть V — правый S-модуль. Обозначим

$$\{V\}^{\downarrow} = \{A \in \text{mod-}S \mid \operatorname{Hom}_S(V, A) = 0\}.$$

Следующий результат служит аналогом предложения 6.1.

Предложение 6.2. *Класс* $\{V\}^{\downarrow}$ *является замкнутым относительно*:

(а) *прямых произведений*;

(б) *подмодулей*;

(в) *расширений.*

Доказательство. (а) Если $\{A_j\}_{j\in J}$ есть некоторое семейство модулей, принадлежащих классу $\{V\}^{\downarrow}$, то $\prod\limits_{j\in J} A_j \in \{V\}^{\downarrow}$ в силу предложения 3.4.

(б) Пусть A' — какой-то подмодуль модуля A. Если $A \in \{V\}^{\downarrow}$, то ввиду теоремы 3.8 имеем $A' \in \{V\}^{\downarrow}$.

(в) Если A — некоторое расширение модуля A' при помощи модуля A'', то из $A' \in \{V\}^{\downarrow}$ и $A'' \in \{V\}^{\downarrow}$ следует $A \in \{V\}^{\downarrow}$ (теорема 3.8). ■

В частности, класс $\{V\}^{\downarrow}$ замкнут относительно прямых сумм.

Через $\mathrm{W}_F(A)$ мы обозначим сумму всех подмодулей B модуля A таких, что выполняется $B \in {}^{\otimes}\{F\}$. Через $\mathrm{H}_V(A)$ будем обозначать пересечение всех подмодулей $B \subset A$ таких, что $A/B \in \{V\}^{\downarrow}$. По предложению 2.5 и W_F, и H_V суть идемпотентные радикалы. Все радикалы вида W_F и H_V мы будем далее называть соответственно ⊗-*радикалами* (читается как «тензор-радикалами») и Hom-*радикалами*.

Теперь мы введём важные понятия нейтрализатора и следа, связанные с ⊗-радикалами и Hom-радикалами соответственно.

Определение 6.3. Пусть A есть правый S-модуль. Через $\mathrm{n}_F(A)$ будем обозначать множество всех элементов $a \in A$ таких, что равенство $a \otimes_S f = 0$ справедливо в группе $A \otimes_S F$ для всех $f \in F$. Указанное множество назовём F-*нейтрализатором* модуля A_S. Возникающий предрадикал n_F также будет называться (F-)нейтрализатором.

Известно [12, 13], что n_F является радикалом. Для полноты изложения докажем это утверждение. Пусть A_S есть произвольный модуль; рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{n}_F(A) \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/\,\mathrm{n}_F(A) \longrightarrow 0$$

(где α — вложение) и индуцированную ею последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{n}_F(A) \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S F \xrightarrow{\overline{\beta}} (A/\,\mathrm{n}_F(A)) \otimes_S F \longrightarrow 0. \qquad (6.1)$$

Можно переформулировать определение F-нейтрализатора так: $\mathrm{n}_F(A)$ — это наибольший подмодуль в A, для которого $\overline{\alpha} = 0$.

Пользуясь этим определением и теоремой 3.8, получаем, что $\overline{\beta}$ — мономорфизм (и, значит, изоморфизм). Далее, если элемент $\overline{a} = a + \mathrm{n}_F(A)$ лежит в $\mathrm{n}_F(A/\mathrm{n}_F(A))$, то для любого $f \in F$ имеем $\overline{\beta}(a \otimes_S f) = \overline{a} \otimes_S f = 0$, так что $a \otimes_S f = 0$. Это означает, что $a \in \mathrm{n}_F(A)$, т. е. $\overline{a} = 0$. Итак, $\mathrm{n}_F(A/\mathrm{n}_F(A)) = 0$, поэтому F-нейтрализатор является радикалом.

Нетрудно заметить, что $\mathcal{R}(\mathrm{n}_F) = {}^{\otimes}\{F\}$. Отсюда ввиду предложения 2.8 получаем, что W_F — это наибольший из всех идемпотентных предрадикалов (а следовательно, из всех идемпотентных радикалов) ρ, для которых $\rho \leqslant \mathrm{n}_F$; кроме того, $\mathcal{R}(\mathrm{W}_F) = {}^{\otimes}\{F\}$. Если мы построим для произвольного модуля A убывающую последовательность подмодулей

$$\mathrm{n}_F^{\beta}(A) = \begin{cases} A, & \text{если } \beta = 0, \\ \mathrm{n}_F(\mathrm{n}_F^{\alpha}(A)), & \text{если } \beta = \alpha + 1, \\ \bigcap\limits_{\alpha<\beta} \mathrm{n}_F^{\alpha}(A), & \text{если } \beta \text{ — ненулевой предельный ординал,} \end{cases}$$

то всегда найдётся ординал γ такой, что $\mathrm{n}_F^{\gamma}(A) = \widehat{\mathrm{n}}_F(A) = \mathrm{W}_F(A)$.

Следующий пример показывает, что неравенство $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{n}_F$ может быть строгим, т. е. радикал n_F не обязан обладать свойством идемпотентности.

Пример 6.4. Пусть ${}_{\mathbf{Z}}F = \mathbf{Z}(p)$ и $A_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$. Тогда для любой подгруппы $B \neq 0$ группы A имеем $B \cong \mathbf{Z}$, а значит, $B \otimes F \cong F \neq 0$; отсюда $\mathrm{W}_F(A) = 0$. В частности, $A \notin {}^{\otimes}\{F\}$ и поэтому $\mathrm{n}_F(A) \neq A$. С другой стороны, при любых $a \in A$ и $f \in F$ выполняются равенства $pa \otimes f = a \otimes pf = 0$, т. е. $pA \subset \mathrm{n}_F(A)$. Подгруппа pA максимальна в A, так что $\mathrm{n}_F(A) = pA$. Таким образом, имеем соотношение $\mathrm{n}_F \neq \mathrm{W}_F$.

Предложение 6.5 [12]. *Пусть F — плоский модуль. Тогда*:

(а) $\mathrm{n}_F = \mathrm{W}_F$;

(б) *радикал W_F является кручением.*

Доказательство. (а) Ясно, что последовательность (6.1) точна в силу определения плоского модуля. Поэтому из условия $\overline{\alpha} = 0$ вытекает равенство $\mathrm{n}_F(A) \otimes_S F = 0$. Следовательно, для всех $A \in \text{mod-}S$ имеет место включение $\mathrm{n}_F(A) \subset \mathrm{W}_F(A)$, т. е. $\mathrm{n}_F \leqslant \mathrm{W}_F$ и, значит, $\mathrm{n}_F = \mathrm{W}_F$.

(б) Пусть B есть произвольный подмодуль модуля A. Индуцированный вложением $\alpha\colon B \to A$ гомоморфизм $\overline{\alpha}\colon B \otimes_S F \to A \otimes_S F$ инъективен ввиду того факта, что F — плоский модуль; таким образом, из условия $A \otimes_S F = 0$ следует $B \otimes_S F = 0$. Это значит, что A может входить в ${}^{\otimes}\{F\}$ только вместе со всеми своими подмодулями. Итак, W_F — кручение. ■

Замечание. Шелтер и Робертс [79] установили следующий факт: если S — коммутативное нётерово кольцо, то всякое кручение ρ категории mod-S имеет указанный выше вид, т. е. существует плоский модуль ${}_SF$ со свойством $\rho = \mathrm{n}_F = \mathrm{W}_F$. В той же статье авторами построено коммутативное кольцо S, для которого это утверждение неверно.

Так как эпиморфизм модулей ${}_SG \to {}_SF$ индуцирует эпиморфизм групп $A \otimes_S G \to A \otimes_S F$ (для любого модуля A_S), имеет место

Лемма 6.6. *Если существует эпиморфизм ${}_SG \to {}_SF$, то справедливо соотношение* $\mathrm{n}_G \leqslant \mathrm{n}_F$.

Определение 6.7. Если A — правый S-модуль, то сумму образов всех гомоморфизмов из $\mathrm{Hom}_S(V, A)$ назовём *V-следом в модуле A*. Эту сумму мы будем обозначать через $\mathrm{tr}_V(A)$. Полученный таким образом предрадикал tr_V также будет называться (V-)следом.

Заметим, что введённая нами в определении 6.7 терминология, а также сопутствующая нотация отличаются от используемых, скажем, в [28, 76].

Предложение 6.8 [12]. *Предрадикал* tr_V *идемпотентен для каждого модуля V_S. Кроме того,* tr_V *— наименьший из всех предрадикалов ρ таких, что $V \in \mathcal{R}(\rho)$.*

Как и в случае с F-нейтрализатором, определение V-следа может быть переформулировано. Точная последовательность S-модулей

$$0 \longrightarrow \operatorname{tr}_V(A) \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A/\operatorname{tr}_V(A) \longrightarrow 0$$

(где α — вложение) индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_S(V, \operatorname{tr}_V(A)) \xrightarrow{\alpha_*} \operatorname{Hom}_S(V, A) \xrightarrow{\beta_*} \operatorname{Hom}_S(V, A/\operatorname{tr}_V(A)).$$

Подмодуль $\operatorname{tr}_V(A)$ модуля A — наименьший, для которого $\beta_* = 0$.

Очевидно, что $\mathcal{P}(\operatorname{tr}_V) = \{V\}^{\downarrow}$. Из предложения 2.8 вытекает, что H_V — наименьший из всех радикалов (а значит, из всех идемпотентных радикалов) ρ со свойством $\rho \geqslant \operatorname{tr}_V$ и что $\mathcal{P}(\mathrm{H}_V) = \{V\}^{\downarrow}$; как и в случае с ⊗-радикалами, можно определить Hom-радикал H_V как предел подходящей трансфинитной последовательности (построенной при помощи предрадикала tr_V).

Учитывая всё сказанное, приходим к следующему результату.

Предложение 6.9. *Для любого радикала $\rho \in \mathcal{IR}(S)$ и любого правого S-модуля V условия $V \in \mathcal{R}(\rho)$ и $\mathrm{H}_V \leqslant \rho$ эквивалентны; иначе говоря, H_V — наименьший из всех идемпотентных радикалов ρ таких, что выполняется соотношение $V \in \mathcal{R}(\rho)$.*

Благодаря данному факту Hom-радикалы являются довольно удобным инструментом; с их помощью можно также строить разнообразные примеры и контрпримеры. Добавим, что для замечания, сделанного сразу после предложения 2.10, имеются все основания: так, в [62] доказано, что совокупность всех Hom-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$ не является множеством.

В дальнейшем мы будем говорить о радикале H_V, что он *порождается* модулем V, а о радикале W_F — что он ⊗-*порождён* (читается как «тензорно порождён») модулем F.

Следующий пример показывает, что неравенство $\operatorname{tr}_V \leqslant \mathrm{H}_V$ может быть строгим, т. е. идемпотентный предрадикал tr_V не обязан быть радикалом.

Пример 6.10. Пусть $V_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}(p)$, $A_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}(p^\infty)$. Тогда для произвольной собственной подгруппы B группы A имеет место изоморфизм $A/B \cong \mathbf{Z}(p^\infty)$, отсюда $\mathrm{Hom}(V, A/B) \neq 0$ и, далее, $A/B \notin \{V\}^{\downarrow}$. Следовательно, $\mathrm{H}_V(A) = A$. С другой стороны, $\mathrm{tr}_V(A) = \mathbf{Z}(p)$. Получили, что $\mathrm{tr}_V \neq \mathrm{H}_V$.

Предложение 6.11. (а) *Если* ${}_SF = \bigoplus\limits_{i\in I} F_i$, *то* $\bigwedge\limits_{i\in I} \mathrm{W}_{F_i} = \mathrm{W}_F$.

(б) *Если* $V_S = \bigoplus\limits_{i\in I} V_i$, *то* $\bigvee\limits_{i\in I} \mathrm{H}_{V_i} = \mathrm{H}_V$.

Доказательство. (а) Достаточно воспользоваться соотношением (2.2) и вытекающим из предложения 3.3 равенством ${}^{\otimes}\{F\} = \bigcap\limits_{i\in I} {}^{\otimes}\{F_i\}$.

(б) Требуемое утверждение вытекает из соотношения (2.3) и равенства $\{V\}^{\downarrow} = \bigcap\limits_{i\in I} \{V_i\}^{\downarrow}$ (см. предложение 3.4). ■

Обозначим класс всех $\otimes$-радикалов категории mod-S через $\mathcal{L}(S)$.

Следствие 6.12. *Если $\mathcal{L}(S)$ является множеством, то оно образует полную решётку относительно естественного порядка предрадикалов.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(S)$ — множество. Из очевидного равенства ${}^{\otimes}\{0\} = \text{mod-}S$ следует, что $\mathrm{W}_0(A) = A$ для всякого модуля A. Поэтому $\mathcal{L}(S)$ содержит наибольший элемент W_0, совпадающий с наибольшим элементом 1 большой решётки $\mathcal{IR}(S)$. Кроме того, любое непустое подмножество из $\mathcal{L}(S)$ имеет точную нижнюю грань ввиду предыдущего предложения. Отсюда уже непосредственно вытекает требуемое утверждение [25, 82]. ■

Замечание. Из равенства ${}^{\otimes}\{S\} = \{0\}$ следует, что для произвольного правого S-модуля A выполнено $\mathrm{W}_S(A) = 0$. Это означает, что $\mathcal{L}(S)$ содержит наименьший элемент W_S, равный наименьшему элементу из $\mathcal{IR}(S)$.

Рассмотрим естественное обобщение $\otimes$-радикалов. Пусть $\mathcal{F}$ — какой-то класс левых S-модулей. Обозначим

$$ {}^{\otimes}\mathcal{F} = \{A \in \text{mod-}S \mid A \otimes_S F = 0 \text{ при всех } F \in \mathcal{F}\}. $$

Как и в предложении 6.1, легко проверить, что ${}^{\otimes}\mathcal{F}$ есть радикальный класс. Соответствующий ему идемпотентный радикал мы обозначим символом $\mathrm{W}_{\mathcal{F}}$; будем говорить, что этот радикал $\otimes$-*порождён* классом $\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{V}$ — некоторый класс правых S-модулей. Положим

$$\mathcal{V}^{\downarrow} = \{A \in \text{mod-}S \mid \operatorname{Hom}(V, A) = 0 \text{ при всех } V \in \mathcal{V}\}.$$

Определённый так класс модулей $\mathcal{V}^{\downarrow}$ будет полупростым, а соответствующий ему (в смысле предложения 2.6) радикал $\mathrm{H}_{\mathcal{V}} \in \mathcal{IR}(S)$ — наименьший из всех идемпотентных радикалов ρ со свойством $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}(\rho)$ [49]. Итак, имеем аналог предложения 6.9:

Предложение 6.13. *Для любого радикала $\rho \in \mathcal{IR}(S)$ и любого класса модулей $\mathcal{V} \subset \text{mod-}S$ условия $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}(\rho)$ и $\mathrm{H}_{\mathcal{V}} \leqslant \rho$ эквивалентны.*

Мы будем говорить, что радикал $\mathrm{H}_{\mathcal{V}}$ *порождается* классом модулей $\mathcal{V}$. Ясно, что любой идемпотентный радикал ρ представи́м в виде $\mathrm{H}_{\mathcal{V}}$; для этого достаточно положить $\mathcal{V} = \mathcal{R}(\rho)$.

Особо подчеркнём, что Hom-радикалом (соответственно $\otimes$-радикалом) мы называем только идемпотентный радикал, порождённый (соответственно $\otimes$-порождённый) классом, состоящим из одного-единственного модуля.

ГЛАВА 2

$\bigotimes$-РАДИКАЛЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Глава 2 посвящена изучению $\otimes$-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$. В §7 дано описание всех таких радикалов и образуемого ими частично упорядоченного множества; показано, что это множество является дистрибутивной решёткой.

В §8 рассматриваются различные свойства замкнутости классов ${}^{\otimes}\{F\}$. Так, описаны все идемпотентные радикалы ρ категории абелевых групп, для которых радикальный класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно:

— прямых произведений;

— произвольных подгрупп;

— p-сервантных подгрупп;

— слабо сервантных подгрупп.

Главным результатом здесь является теорема 8.4, описывающая $\otimes$-радикалы как те идемпотентные радикалы ρ, для которых $\mathcal{R}(\rho)$ есть класс, замкнутый относительно сервантных подгрупп.

В §9 рассматриваются решёточные свойства $\otimes$-радикалов; в частности, доказано, что «решёточное» и «поточечное» пересечения $\otimes$-радикалов будут совпадать. Приводится пример, из которого вытекает, что для произвольных идемпотентных радикалов категории абелевых групп аналогичный факт уже не имеет места.

§7. $\otimes$-радикалы абелевых групп и образуемая ими решётка

Следующая лемма объединяет несколько простых фактов, касающихся тензорных произведений абелевых групп.

Лемма 7.1. *Пусть A — группа. Тогда*:

(а) $A \otimes \mathbf{Z}(p) = 0$ *в том и только в том случае, когда* $pA = A$;

(б) *если G — ненулевая делимая p-группа, то соотношение $A \otimes G = 0$ равносильно p-делимости группы $A/\,\mathbf{t}(A)$*;

(в) *если p-группа G не является делимой, то соотношение $A \otimes G = 0$ равносильно p-делимости группы A*;

(г) *если A — непериодическая группа, то для каждой непериодической группы G выполнено $A \otimes G \neq 0$.*

Доказательство. (а) Нужное утверждение вытекает из изоморфизма $A \otimes \mathbf{Z}(p) \cong A/pA$ [30].

(б) Ввиду делимости группы G имеем $\mathbf{t}(A) \otimes G = 0$. Далее, G является периодической группой, откуда следует (см. [30]) справедливость следующих изоморфизмов:

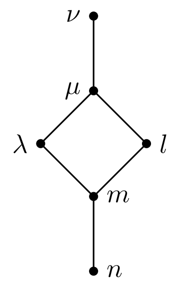
$$A \otimes G \cong \big[\mathbf{t}(A) \oplus (A/\,\mathbf{t}(A))\big] \otimes G \cong (A/\,\mathbf{t}(A)) \otimes G.$$

Это означает, что из p-делимости факторгруппы $A/\,\mathbf{t}(A)$ вытекает требуемое соотношение. С другой стороны, поскольку $A/\,\mathbf{t}(A)$ — плоский модуль над $\mathbf{Z}$ (теорема 3.13), то группа $(A/\,\mathbf{t}(A)) \otimes \mathbf{Z}(p)$ вкладывается в $(A/\,\mathbf{t}(A)) \otimes G$ как подгруппа. Таким образом, соотношение $A \otimes G = 0$ справедливо лишь тогда, когда $A/\,\mathbf{t}(A)$ является p-делимой группой.

(в) В случае p-делимости группы A равенство $A \otimes G = 0$ выполняется. С другой стороны, G/pG — ненулевая p-ограниченная группа, т. е. $\mathbf{Z}(p)$ есть гомоморфный образ группы G. Тогда $A \otimes G$ имеет группу $A \otimes \mathbf{Z}(p) \cong A/pA$ в качестве гомоморфного образа. Отсюда видно, что соотношение $A \otimes G = 0$ справедливо только для p-делимых групп A.

(г) Пусть A и G суть непериодические группы со свойством $A \otimes G = 0$. Факторгруппа $G/\,\mathbf{t}(G)$ является плоской, а значит, группа $A \otimes (G/\,\mathbf{t}(G)) = 0$ содержит подгруппу, изоморфную группе $\mathbf{Z} \otimes (G/\,\mathbf{t}(G)) \cong G/\,\mathbf{t}(G)$. Это даёт нам противоречие с условием $\mathbf{t}(G) \neq G$. ■

Рассмотрим множество $\mathcal{K}$, состоящее из шести элементов l, m, n, λ, μ, ν; порядок на этом множестве зададим условиями $n < m < l < \mu < \nu$ и $m < \lambda < \mu$ (элементы l и λ будем считать несравнимыми). Далее, введём на множестве $\mathcal{K}^{\mathbf{P}}$ всех функций $\mathbf{P} \to \mathcal{K}$ отношение порядка, считая, что $\xi \leqslant \eta$ в точности в том случае, когда $\xi(p) \leqslant \eta(p)$ при всех $p \in \mathbf{P}$. Легко видеть, что $\mathcal{K}$, а значит, и $\mathcal{K}^{\mathbf{P}}$ является полной дистрибутивной решёткой.



Напомним, что и в этой, и в следующей главах p-компонента группы A обозначается через A_p. Для каждой группы F зададим функцию $\Phi(F) \in \mathcal{K}^{\mathbf{P}}$ следующим образом:

$$\big[\Phi(F)\big](p) = \begin{cases} n, & \text{если } p(F/\,\mathbf{t}(F)) \neq F/\,\mathbf{t}(F), \\ m, & \text{если } pF \neq F \text{ и } p(F/\,\mathbf{t}(F)) = F/\,\mathbf{t}(F) \neq 0, \\ l, & \text{если } pF = F \neq \mathbf{t}(F), \\ \lambda, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } pF_p \neq F_p, \\ \mu, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } pF_p = F_p \neq 0, \\ \nu, & \text{если } \mathbf{t}(F) = F \text{ и } F_p = 0, \end{cases}$$

где $p \in \mathbf{P}$. Введём обозначения $\mathcal{K}_0 = \{l, m, n\}$ и $\mathcal{K}_1 = \{\lambda, \mu, \nu\}$. Легко видеть, что для каждой группы F выполнено либо $\big[\Phi(F)\big](\mathbf{P}) \subset \mathcal{K}_1$ (если $\mathbf{t}(F) = F$), либо $\big[\Phi(F)\big](\mathbf{P}) \subset \mathcal{K}_0$ (если $\mathbf{t}(F) \neq F$).

Выясним свойства функции $\Phi(F)$. Через $\mathbf{Q}_s$ (где $s \in \mathbf{N}$) мы обозначим группу рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с s.

Лемма 7.2. *Пусть F — группа и $p \in \mathbf{P}$. Тогда*:

(а) *условие $\mathbf{Z}(p^\infty) \in {}^{\otimes}\{F\}$ равносильно условию $\big[\Phi(F)\big](p) \neq n$;*

(б) *условие* $\mathbf{Z}(p) \in {}^{\otimes}\{F\}$ *равносильно условию* $\big[\Phi(F)\big](p) \in \{l, \mu, \nu\}$;

(в) *условие* $\mathbf{Q} \in {}^{\otimes}\{F\}$ *равносильно условию* $\big[\Phi(F)\big](p) \in \{\lambda, \mu, \nu\}$;

(г) *условие* $\mathbf{Q}_p \in {}^{\otimes}\{F\}$ *равносильно условию* $\big[\Phi(F)\big](p) = \nu$.

Доказательство. (а) Ясно, что группа $F/\,\mathbf{t}(F)$ будет p-делимой в том и только в том случае, когда выполнено $\big[\Phi(F)\big](p) \neq n$. Применяя лемму 7.1, получаем нужное утверждение.

(б) Если F — периодическая группа, то равенство $pF = F$ равносильно равенству $pF_p = F_p$, а следовательно, и условию $\big[\Phi(F)\big](p) \in \{\mu, \nu\}$. Если же F есть непериодическая группа, то равенство $pF = F$ эквивалентно условию $\big[\Phi(F)\big](p) = l$. Вновь пользуясь леммой 7.1, мы приходим к эквивалентности условий $\mathbf{Z}(p) \otimes F = 0$ и $\big[\Phi(F)\big](p) \in \{l, \mu, \nu\}$.

(в) Ясно, что если F — периодическая группа, то $\mathbf{Q} \otimes F = 0$; обратная импликация справедлива в силу леммы 7.1. Поэтому соотношение $\mathbf{Q} \in {}^{\otimes}\{F\}$ равносильно тому, что $\mathbf{t}(F) = F$, т. е. условию $\big[\Phi(F)\big](p) \in \{\lambda, \mu, \nu\}$.

(г) Пусть $\big[\Phi(F)\big](p) = \nu$, тогда F есть периодическая группа с нулевой p-компонентой. При всех $q \in \mathbf{P} \setminus \{p\}$ группа $\mathbf{Q}_p$ является q-делимой, отсюда $\mathbf{Q}_p \otimes F_q = 0$. Следовательно, $\mathbf{Q}_p \otimes F = 0$.

Обратно, пусть выполнено $\mathbf{Q}_p \otimes F = 0$. Из леммы 7.1 следует, что F — периодическая группа; значит, $\mathbf{Q}_p \otimes F_p = 0$. В силу той же леммы получаем, что $F_p = 0$ (поскольку $p\mathbf{Q}_p \neq \mathbf{Q}_p$). Таким образом, $\big[\Phi(F)\big](p) = \nu$. ■

Лемма 7.3. *Пусть* $\rho, \sigma \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ *и* $\rho \not\geqslant \sigma$. *Тогда можно найти группу без кручения, циклическую группу простого порядка либо квазициклическую группу* $B \neq 0$ *такую, что* $B \in \mathcal{P}(\rho)$ *и* $B \in \mathcal{R}(\sigma)$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{R}(\sigma) \not\subset \mathcal{R}(\rho)$, то можно найти группу A, для которой $A \notin \mathcal{R}(\rho)$ и $A \in \mathcal{R}(\sigma)$. Не умаляя общности, ввиду теоремы 2.13 мы можем считать, что A — группа без кручения или периодическая группа. В первом из этих случаев нам достаточно положить $B = A/\rho(A)$ (тогда B —

группа без кручения, так как по предложению 2.14 подгруппа $\rho(A)$ является сервантной в группе A).

Во втором случае ($\mathbf{t}(A) = A$) выполняется $A \notin \mathcal{R}(\rho \wedge \mathbf{t})$ и $A \in \mathcal{R}(\sigma \wedge \mathbf{t})$ и тогда в силу теоремы 2.17 найдётся группа B вида $\mathbf{Z}(p)$ либо $\mathbf{Z}(p^\infty)$ такая, что $B \notin \mathcal{R}(\rho \wedge \mathbf{t})$ и $B \in \mathcal{R}(\sigma \wedge \mathbf{t})$. Ясно, что для этой группы B справедливы соотношения $B \notin \mathcal{R}(\rho)$ и $B \in \mathcal{R}(\sigma)$. С учётом предложения 2.14 собственная подгруппа $\rho(B)$ группы B должна быть сервантной, а значит, $\rho(B) = 0$. ■

Теорема 7.4. *Для групп F и G равносильны следующие условия*:

1) $\mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{W}_G$;

2) ${}^{\otimes}\{F\} \subset {}^{\otimes}\{G\}$;

3) $\Phi(F) \leqslant \Phi(G)$.

Доказательство. Условия 1) и 2) равносильны для модулей над любым кольцом в силу предложения 2.10.

2) $\Rightarrow$ 3). Допустим, что ${}^{\otimes}\{F\} \subset {}^{\otimes}\{G\}$; обозначим $\xi = \Phi(F)$ и $\eta = \Phi(G)$ и зафиксируем произвольное $p \in \mathbf{P}$. Если $\xi(p) = n$, то $\xi(p) \leqslant \eta(p)$ выполнено автоматически. Далее, в силу леммы 7.2 имеем следующие импликации:

$$\xi(p) = m \implies \mathbf{Z}(p^\infty) \in {}^{\otimes}\{F\} \implies \mathbf{Z}(p^\infty) \in {}^{\otimes}\{G\} \implies \eta(p) \neq n,$$

$$\xi(p) = l \implies \mathbf{Z}(p) \in {}^{\otimes}\{F\} \implies \mathbf{Z}(p) \in {}^{\otimes}\{G\} \implies \eta(p) \in \{l, \mu, \nu\},$$

$$\xi(p) = \lambda \implies \mathbf{Q} \in {}^{\otimes}\{F\} \implies \mathbf{Q} \in {}^{\otimes}\{G\} \implies \eta(p) \in \{\lambda, \mu, \nu\},$$

$$\xi(p) = \mu \implies \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Z}(p) \in {}^{\otimes}\{F\} \implies \mathbf{Q} \oplus \mathbf{Z}(p) \in {}^{\otimes}\{G\} \implies \eta(p) \in \{\mu, \nu\},$$

$$\xi(p) = \nu \implies \mathbf{Q}_p \in {}^{\otimes}\{F\} \implies \mathbf{Q}_p \in {}^{\otimes}\{G\} \implies \eta(p) = \nu.$$

Во всех этих случаях $\xi(p) \leqslant \eta(p)$, что и требовалось.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть выполнено $\mathrm{W}_F \nleqslant \mathrm{W}_G$ и $\xi \leqslant \eta$, где $\xi = \Phi(F)$ и $\eta = \Phi(G)$. Тогда по лемме 7.3 существует группа $B \neq 0$ такая, что $B \in \mathcal{R}(\mathrm{W}_F) = {}^{\otimes}\{F\}$, $B \in \mathcal{P}(\mathrm{W}_G)$ и при этом либо B есть группа без кручения, либо для какого-то простого p выполняется $B = \mathbf{Z}(p)$ или $B = \mathbf{Z}(p^\infty)$. Для всех $p \in \mathbf{P}$ мы имеем

$\xi(p) \leqslant \eta(p)$, поэтому ввиду леммы 7.2 справедливы импликации

$$\mathbf{Z}(p) \in {}^{\otimes}\{F\} \implies \xi(p) \in \{l, \mu, \nu\} \implies \eta(p) \in \{l, \mu, \nu\} \implies \mathbf{Z}(p) \in {}^{\otimes}\{G\},$$
$$\mathbf{Z}(p^\infty) \in {}^{\otimes}\{F\} \implies \xi(p) \neq n \implies \eta(p) \neq n \implies \mathbf{Z}(p^\infty) \in {}^{\otimes}\{G\};$$

итак, если $B = \mathbf{Z}(p^\infty)$ или $B = \mathbf{Z}(p)$, то $B \in {}^{\otimes}\{G\} = \mathcal{R}(\mathrm{W}_G)$ — противоречие с условием $B \in \mathcal{P}(\mathrm{W}_G)$.

Пусть теперь B есть ненулевая группа без кручения. В силу леммы 7.1 из условия $B \otimes F = 0$ мы получаем, что F является периодической группой, причём $F_p = 0$ для любого простого p такого, что $pB \neq B$. Из периодичности группы F вытекает, что $\xi(\mathbf{P}) \subset \mathcal{K}_1$. Тогда включение $\eta(\mathbf{P}) \subset \mathcal{K}_0$ невозможно и, значит, $\eta(\mathbf{P}) \subset \mathcal{K}_1$, т. е. G тоже будет периодической группой. Кроме того, ввиду неравенства $\xi \leqslant \eta$ для $p \in \mathbf{P}$ имеют место следующие импликации:

$$pB \neq B \implies F_p = 0 \implies \xi(p) = \nu \implies \eta(p) = \nu \implies G_p = 0.$$

Отсюда ввиду периодичности группы G получаем $B \otimes G = 0$, что вновь даёт противоречие с условием $B \in \mathcal{P}(\mathrm{W}_G)$. Теорема доказана. ■

Из теоремы 7.4 вытекает

Теорема 7.5. *Для групп F и G равносильны следующие условия*:
1) $\mathrm{W}_F = \mathrm{W}_G$;
2) ${}^{\otimes}\{F\} = {}^{\otimes}\{G\}$;
3) $\Phi(F) = \Phi(G)$.

Так как образ отображения Φ содержится в $\mathcal{K}^{\mathbf{P}}$, из теоремы 7.5 можно заключить, что совокупность $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ всех $\otimes$-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$ будет множеством. Полагая $\Gamma(\mathrm{W}_F) = \Phi(F)$, где $F \in$ mod-$\mathbf{Z}$, получаем отображение $\Gamma\colon \mathcal{L}(\mathbf{Z}) \to \mathcal{K}^{\mathbf{P}}$; из проведённых нами ранее рассуждений вытекает, что образ отображения Γ содержится в множестве $\mathcal{J} = \mathcal{K}_0^{\mathbf{P}} \cup \mathcal{K}_1^{\mathbf{P}}$. Отметим, что $\mathcal{J}$ есть полная подрешётка решётки $\mathcal{K}^{\mathbf{P}}$. Действительно, объединение произвольного семейства элементов из $\mathcal{J}$ входит в множество $\mathcal{K}_1^{\mathbf{P}}$, если туда входит хотя бы один из элементов семейства; в противном случае это объединение окажется в множестве $\mathcal{K}_0^{\mathbf{P}}$. Аналогичное утверждение выполняется и для пересечения. Таким образом, $\mathcal{J}$ — полная дистрибутивная решётка.

Для всякой функции $\xi \in \mathcal{J}$ определим группы F'_ξ, F''_ξ и F_ξ.

Пусть $\xi \in \mathcal{K}_0^{\mathbf{P}}$. Для множества $L \subset \mathbf{P}$ через $\mathbf{Q}_L$ обозначаем группу всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с каждым $p \in L$ (тогда $\mathbf{Q}^{(L)} = \mathbf{Q}_{\mathbf{P}\setminus L}$ при любом $L \subset \mathbf{P}$; в частности, имеем равенства $\mathbf{Q}_{\mathbf{P}} = \mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}_\varnothing = \mathbf{Q}$). Положим $F'_\xi = \mathbf{Q}_L$, где $L = \xi^{-1}(n)$, а группу F''_ξ мы зададим как прямую сумму групп $\mathbf{Z}(p)$ по всем $p \in \xi^{-1}(m)$.

Если же $\xi \in \mathcal{K}_1^{\mathbf{P}}$, то мы считаем, что F''_ξ есть прямая сумма групп $\mathbf{Z}(p)$ по всем $p \in \xi^{-1}(\lambda)$, а F'_ξ — прямая сумма групп $\mathbf{Z}(p^\infty)$ по всем $p \in \xi^{-1}(\mu)$.

В обоих случаях полагаем $F_\xi = F'_\xi \oplus F''_\xi$. Легко видеть, что для всякой функции $\xi \in \mathcal{J}$ выполнено $\Phi(F_\xi) = \xi$. Отсюда, в частности, видно, что образ отображения Γ (совпадающий с образом отображения Φ) равен $\mathcal{J}$.

С учётом теоремы 7.4 приходим к следующему результату.

Теорема 7.6. *Отображение* $\Gamma\colon \mathcal{L}(\mathbf{Z}) \to \mathcal{J}$ *осуществляет изоморфизм частично упорядоченных множеств* (*следовательно*, $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ *является полной дистрибутивной решёткой*).

Замечание. Нулём и единицей решётки $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ будут радикалы $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}} = 0$ и $\mathrm{W}_0 = 1$ соответственно (см. рассуждения в конце §6).

Позже мы увидим, что большая решётка $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ не является не только дистрибутивной, но и модулярной (см. замечание после примера 9.11).

Для $i \in \{0, 1\}$ обозначим $\mathcal{L}_i = \Gamma^{-1}(\mathcal{K}_i^{\mathbf{P}})$. Тогда, как мы знаем, радикал, ⊗-порождённый непериодической (периодической) группой, будет элементом множества $\mathcal{L}_0$ (соответственно элементом множества $\mathcal{L}_1$). Поскольку $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{K}_1$ являются полными подрешётками в $\mathcal{K}$, то $\mathcal{K}_0^{\mathbf{P}}$ и $\mathcal{K}_1^{\mathbf{P}}$ суть полные подрешётки решёток $\mathcal{K}^{\mathbf{P}}$ и $\mathcal{J}$. Отсюда следует, что $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ — полные подрешётки полной дистрибутивной решётки $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$.

Дадим теперь явное описание $\otimes$-радикалов категории mod-$\mathbf{Z}$, выяснив, как устроен класс $\mathcal{R}(\rho)$ для соответствующего произвольной функции $\xi \in \mathcal{J}$ радикала $\rho = \Gamma^{-1}(\xi)$. Из наших предыдущих рассуждений следует, что $\mathcal{R}(\rho)$ совпадает с классом ${}^{\otimes}\{F_\xi\}$.

Пусть выполняется $\xi \in \mathcal{K}_0^{\mathbf{P}}$, тогда ввиду леммы 7.1 класс $\mathcal{R}(\rho) = {}^{\otimes}\{F_\xi\}$ состоит из тех и только тех периодических групп B, которые удовлетворяют равенству $B_p = 0$ для каждого $p \in \xi^{-1}(n)$ и равенству $pB_p = B_p$ для каждого $p \in \xi^{-1}(m)$. Так как $\mathcal{R}(\rho)$ содержит лишь периодические группы, при любой группе A будут справедливы соотношения

$$\rho(A) = \rho(\mathbf{t}(A)) = \rho\Big(\bigoplus_{p\in\mathbf{P}} A_p\Big) = \bigoplus_{p\in\mathbf{P}} \rho(A_p).$$

Следовательно, ρ имеет вид (2.5), где $X = \xi^{-1}(l)$ и $Y = \xi^{-1}(m)$.

Предложение 7.7. *Совокупность радикалов $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$, для которых выполнено $\rho \leqslant \mathbf{t}$, совпадает с множеством $\mathcal{L}_0$.*

Доказательство. Мы уже знаем, что всякий идемпотентный радикал $\rho \in \mathcal{L}_0$ имеет вид (2.5) и удовлетворяет неравенству $\rho \leqslant \mathbf{t}$. Обратно, если дан идемпотентный радикал ρ вида (2.5), то, полагая

$$\xi(p) = \begin{cases} n, & \text{если } p \in \mathbf{P} \setminus (X \cup Y), \\ m, & \text{если } p \in Y, \\ l, & \text{если } p \in X, \end{cases}$$

получаем $\rho = \Gamma^{-1}(\xi) \in \mathcal{L}_0$. ■

Отметим два частных случая. Если $\xi(p) = l$ при всех $p \in \mathbf{P}$, то $F_\xi = \mathbf{Q}$; далее, если $\xi(q) = n$ при всех $q \in \mathbf{P} \setminus \{p\}$ и выполнено $\xi(p) = l$, то $F_\xi = \mathbf{Q}^{(p)}$. Поэтому W_F совпадает с $\mathbf{t}$, если $F = \mathbf{Q}$, и совпадает с $\mathbf{t}_p$, если $F = \mathbf{Q}^{(p)}$.

Получаем следующий результат.

Предложение 7.8. *Большая решётка* $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ *содержит решётку* $\mathcal{L}_0$ *в качестве полной подрешётки. Нулём и единицей в* $\mathcal{L}_0$ *служат элементы* $\mathrm{W}_{\mathbf{Z}} = 0$ *и* $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{t}$ *соответственно.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться тем фактом, что ввиду предыдущего предложения множество $\mathcal{L}_0$ есть замкнутый интервал большой решётки $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ [25]. ■

Рассмотрим теперь случай $\rho = \Gamma^{-1}(\xi)$, где $\xi \in \mathcal{K}_1^{\mathbf{P}}$. По лемме 7.1 имеем $B \in {}^{\otimes}\{F_\xi\}$ в точности тогда, когда $B/\,\mathbf{t}(B)$ является p-делимой группой для любого $p \in \xi^{-1}(\mu)$, а сама группа B является p-делимой при всех $p \in \xi^{-1}(\lambda)$. Из равенства $\mathcal{R}(\rho) = {}^{\otimes}\{F_\xi\}$ видим, что $\rho(A)$ — это наибольшая подгруппа B группы A, обладающая указанными свойствами.

Заметим, в частности, что все делимые группы попадают в класс $\mathcal{R}(\rho)$. Если $\xi(p) = \lambda$ для любого простого p, то F_ξ есть прямая сумма циклических групп $\mathbf{Z}(p)$ по всем $p \in \mathbf{P}$; в этом случае ${}^{\otimes}\{F_\xi\}$ совпадает с классом делимых абелевых групп, т. е. радикал, $\otimes$-порождённый группой F_ξ, равен $\mathbf{d}$. Поэтому нулём и единицей в $\mathcal{L}_1$ служат радикалы $\mathbf{d}$ и $\mathrm{W}_0 = 1$ соответственно.

Рассмотрим антиизоморфизм $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, отображающий элементы l, m, n соответственно в λ, μ, ν (и наоборот). Очевидно, он индуцирует решёточный антиизоморфизм $\delta\colon \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ такой, что $\delta^{-1} = \delta$.

Следующий результат показывает, что всякий идемпотентный радикал из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ порождён какой-то группой, и иллюстрирует двойственность между $\otimes$-радикалами и Hom-радикалами.

Теорема 7.9. *Пусть* $\xi \in \mathcal{J}$ *— произвольная функция. Тогда*:

(а) $F_\xi \otimes F_{\delta(\xi)} = 0$;

(б) *радикал* $\mathrm{W}_{F_\xi} = \Gamma^{-1}(\xi)$ *порождается группой* $F_{\delta(\xi)}$;

(в) ${}^{\otimes\otimes}\{F_{\delta(\xi)}\} = {}^{\otimes}\{F_\xi\}$.

Доказательство. Обозначим $V = F_{\delta(\xi)}$.

(а) Ясно, что в силу равенства $\delta^{-1} = \delta$ достаточно рассмотреть случай, когда выполнено $\xi \in \mathcal{K}_0^{\mathbf{P}}$; тогда группа V является периодической и при всех $p \in \xi^{-1}(n)$ имеет нулевую p-компоненту. Так как для каждого $p \in \mathbf{P} \setminus \xi^{-1}(n)$ справедливо равенство $pF'_\xi = F'_\xi$, то $F'_\xi \otimes V = 0$. Далее, так как для каждого $p \in \xi^{-1}(m)$ группа V имеет делимую p-компоненту, то $F''_\xi \otimes V = 0$ и, значит, $F_\xi \otimes V = 0$.

(б) Из пункта (а) ясно, что V есть элемент радикального класса ${}^{\otimes}\{F_\xi\}$ радикала W_{F_ξ}. Применяя предложение 6.9, получаем $\mathrm{H}_V \leqslant \mathrm{W}_{F_\xi}$.

Предположим, что $\mathrm{H}_V < \mathrm{W}_{F_\xi}$. Тогда в силу леммы 7.3 найдётся группа $B \neq 0$, для которой $B \in {}^{\otimes}\{F_\xi\}$ и $B \in \mathcal{P}(\mathrm{H}_V) = \{V\}^{\downarrow}$, причём можно считать, что B есть группа без кручения, $B = \mathbf{Z}(p)$ или $B = \mathbf{Z}(p^\infty)$.

I. Пусть $\xi \in \mathcal{K}_0^{\mathbf{P}}$. Поскольку F_ξ — непериодическая группа, B не может быть группой без кручения. Если $B = \mathbf{Z}(p)$, то, как вытекает из полученного ранее описания радикального класса ${}^{\otimes}\{F_\xi\}$, будем иметь $p \in \xi^{-1}(l)$. Если же $B = \mathbf{Z}(p^\infty)$, то из того же описания получаем, что $p \in \xi^{-1}(l)$ или $p \in \xi^{-1}(m)$. Во всех случаях $\mathrm{Hom}(V, B) \neq 0$, что противоречит условию $B \in \{V\}^{\downarrow}$.

II. Пусть теперь $\xi \in \mathcal{K}_1^{\mathbf{P}}$. Обозначим $L = \xi^{-1}(\nu) \subset \mathbf{P}$.

Если B — группа без кручения, то из описания класса ${}^{\otimes}\{F_\xi\}$ вытекает, что эта группа p-делима для каждого $p \in \xi^{-1}(\lambda) \cup \xi^{-1}(\mu)$. Тогда B является модулем над кольцом $\mathbf{Q}_L$ (предложение 5.6), а значит, $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_L, B) \neq 0$.

Если $B = \mathbf{Z}(p)$, то из включения $B \in {}^{\otimes}\{F_\xi\}$ вытекает, что $\xi(p) = \nu$ или $\xi(p) = \mu$. В первом случае $\mathbf{Z}(p)$ есть гомоморфный образ группы $F'_{\delta(\xi)} = \mathbf{Q}_L$, а во втором — гомоморфный образ группы $F''_{\delta(\xi)}$.

Если $B = \mathbf{Z}(p^\infty)$, то $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_L, B) \neq 0$, так как для произвольного $p \in \mathbf{P}$ либо $\mathbf{Z}(p^\infty)$, либо $\mathbf{Z}(p)$ является гомоморфным образом группы $\mathbf{Q}_L$.

Во всех трёх случаях $\mathrm{Hom}(V, B) \neq 0$, что вновь даёт нам противоречие с условием $B \in \{V\}^{\downarrow}$.

Итак, $\mathrm{H}_V = \mathrm{W}_{F_\xi}$, что и требовалось.

(в) В силу пунктов (а) и (б) имеем $F_\xi \otimes V = 0$ и $\mathrm{W}_{F_\xi} = \mathrm{H}_V$. Из условия $F_\xi \in {}^{\otimes}\{V\}$ следует ${}^{\otimes\otimes}\{V\} \subset {}^{\otimes}\{F_\xi\}$. Ясно, что V принадлежит радикальному классу ${}^{\otimes\otimes}\{V\}$. Отметим, что радикальный класс $\mathcal{R}(\mathrm{H}_V)$ радикала $\mathrm{H}_V = \mathrm{W}_{F_\xi}$ равен ${}^{\otimes}\{F_\xi\}$. Далее, в силу предложения 6.9 класс $\mathcal{R}(\mathrm{H}_V)$ будет наименьшим из всех содержащих группу V радикальных классов, отсюда ${}^{\otimes}\{F_\xi\} \subset {}^{\otimes\otimes}\{V\}$ и, следовательно, ${}^{\otimes\otimes}\{V\} = {}^{\otimes}\{F_\xi\}$. ∎

Напомним, что символами $\wedge$ и $\vee$ мы обозначаем решёточные операции большой решётки $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$; для решёточных операций, определённых на $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, будут использоваться обозначения $\widetilde{\wedge}$ и $\widetilde{\vee}$. Из предложения 6.11 вытекает, что $\widetilde{\wedge}$ и $\wedge$ одинаково действуют на радикалы из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$. Заметим также, что $\widetilde{\vee}$ и $\vee$ совпадают на $\mathcal{L}_0$ в силу предложения 7.8. Покажем, что для множества $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ последнее утверждение уже не имеет места.

Пример 7.10. Для $\rho = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(2)}$ и $\sigma = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(3)}$ введём обозначения $\xi = \Gamma(\rho)$ и $\eta = \Gamma(\sigma)$. Тогда $\xi(2) = \eta(3) = \lambda$ и $\xi(3) = \eta(2) = \xi(p) = \eta(p) = \nu$ для всех p, бо́льших 3. Так как $\Gamma(\rho \,\widetilde{\vee}\, \sigma) = \xi \vee \eta$ и $[\xi \vee \eta](p) = \nu$ при всех $p \in \mathbf{P}$, то $\rho \,\widetilde{\vee}\, \sigma$ совпадает с наибольшим элементом решётки $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, т. е. $\rho \,\widetilde{\vee}\, \sigma = \mathrm{W}_0 = 1$.

С другой стороны, из теоремы 7.9 мы знаем, что ρ и σ будут совпадать соответственно с радикалами H_V и H_U, где $V = \mathbf{Q}^{(2)}$ и $U = \mathbf{Q}^{(3)}$. Это значит, что $\rho \vee \sigma = \mathrm{H}_{V \oplus U}$ (предложение 6.11). Тогда имеем $[\rho \vee \sigma](\mathbf{Z}) = 0$, поскольку $\mathbf{Z} \in \{V \oplus U\}^{\downarrow}$. Следовательно, $\rho \vee \sigma < \rho \,\widetilde{\vee}\, \sigma$.

Итак, ни $\mathcal{L}_1$, ни $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ не являются подрешётками в $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$.

Замечание. Ямбор изучал в [68, 69] *тензорно-ортогональные теории* над коммутативным кольцом S — пары $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ классов S-модулей такие, что ${}^{\otimes}\mathcal{F} = \mathcal{V}$ и ${}^{\otimes}\mathcal{V} = \mathcal{F}$. Из предложения 6.1 вытекает, что классы ${}^{\otimes}\mathcal{V}$ и ${}^{\otimes}\mathcal{F}$ будут радикальными. Теорема 7.9 позволяет получить приведённое Ямбором в [68] описание тензорно-ортогональных теорий категории абелевых групп. Можно переформулировать это описание: тензорно-ортогональные теории категории mod-$\mathbf{Z}$ — в точности все пары вида $\left({}^{\otimes}\{F_\xi\}, {}^{\otimes}\{F_{\delta(\xi)}\}\right)$, где $\xi \in \mathcal{J}$.

Действительно, для всякой функции $\xi \in \mathcal{J}$ по теореме 7.9 будем иметь ${}^{\otimes\otimes}\{F_{\delta(\xi)}\} = {}^{\otimes}\{F_\xi\}$ и ${}^{\otimes\otimes}\{F_\xi\} = {}^{\otimes}\{F_{\delta(\xi)}\}$ (поскольку выполняется соотношение $\delta^{-1} = \delta$). Обратно, пусть $(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ — тензорно-ортогональная теория категории абелевых групп. Из леммы 7.1 получаем, что хотя бы один из классов $\mathcal{V}$ и $\mathcal{F}$ не содержит непериодических групп; ввиду симметрии нам будет достаточно рассмотреть случай, когда это справедливо для $\mathcal{V}$. Тогда из предложения 7.7 следует, что $\mathcal{V} = \mathcal{R}(\rho)$ при некотором $\rho \in \mathcal{L}_0$. Поэтому имеем $\mathcal{V} = {}^{\otimes}\{F_\xi\}$, где $\xi = \Gamma(\rho)$, а значит, $\mathcal{F} = {}^{\otimes}\mathcal{V} = {}^{\otimes}\{F_{\delta(\xi)}\}$.

Как мы знаем, для каждого простого числа p выполнено $\big[\Gamma(\mathbf{d})\big](p) = \lambda$ и $\big[\Gamma(\mathbf{t})\big](p) = l$, а значит, $\big[\Gamma(\mathbf{d} \mathbin{\widetilde{\vee}} \mathbf{t})\big](p) = \mu$; поэтому класс $\mathcal{R}(\mathbf{d} \mathbin{\widetilde{\vee}} \mathbf{t})$ содержит в точности те группы B, для которых факторгруппа $B/\,\mathbf{t}(B)$ будет делимой. Если радикал $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ удовлетворяет неравенствам $\mathbf{t} \leqslant \rho$ и $\mathbf{d} \leqslant \rho$, то $\mathcal{R}(\rho)$ содержит как все периодические, так и все делимые группы, а значит, в силу замкнутости радикального класса $\mathcal{R}(\rho)$ относительно расширений для таких радикалов ρ справедливо включение $\mathcal{R}(\mathbf{d} \mathbin{\widetilde{\vee}} \mathbf{t}) \subset \mathcal{R}(\rho)$, т. е. $\mathbf{d} \mathbin{\widetilde{\vee}} \mathbf{t} \leqslant \rho$. Отсюда получаем $\mathbf{d} \mathbin{\widetilde{\vee}} \mathbf{t} = \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$.

Выясним, насколько «плотно» радикалы W_F лежат в большой решётке всех идемпотентных радикалов категории абелевых групп.

Предложение 7.11. *Пусть* $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$. *Тогда*:

(а) *если* $\mathbf{d} \wedge \mathbf{t} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d}$, *то* $\rho = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$ *или* $\rho = \mathbf{d}$;

(б) *если* $\mathbf{t} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$, *то* $\rho = \mathbf{t}$ *или* $\rho = \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$;

(в) *если* $\mathbf{d} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$, *то* $\rho = \Gamma^{-1}(\xi)$, *где* $\xi(\mathbf{P}) \subset \{\lambda, \mu\}$.

Доказательство. (а) Пусть $\mathbf{d} \wedge \mathbf{t} \leqslant \rho < \mathbf{d}$. Ввиду следствия 2.16 класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит лишь периодические группы, т. е. $\rho \leqslant \mathbf{t}$. Отсюда сразу видим, что $\rho \leqslant \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$ и, далее, $\rho = \mathbf{d} \wedge \mathbf{t}$.

(б) Пусть имеют место неравенства $\mathbf{t} < \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$. Тогда $\mathcal{R}(\rho)$ содержит непериодические группы, так что (ввиду следствия 2.16) выполняется $\mathbf{d} \leqslant \rho$. Следовательно, $\mathbf{d} \vee \mathbf{t} \leqslant \rho$, а значит, $\rho = \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$.

(в) Пусть $\mathbf{d} \leqslant \rho \leqslant \mathbf{d} \vee \mathbf{t}$. Зададим функцию $\xi\colon \mathbf{P} \to \mathcal{K}_1$, полагая

$$\xi(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}(\rho), \\ \mu, & \text{если } \mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho). \end{cases}$$

Покажем, что ρ совпадает с радикалом $\sigma = \Gamma^{-1}(\xi)$.

Пусть $B \in \mathcal{R}(\rho)$, тогда $B \in \mathcal{R}(\mathbf{d} \vee \mathbf{t})$, т. е. $B/\,\mathbf{t}(B)$ есть делимая группа. Кроме того, для каждого $p \in \xi^{-1}(\lambda)$ выполнено $pB = B$ (в противном случае $\mathbf{Z}(p)$ служит гомоморфным образом группы B, а следовательно, имеет место включение $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho)$, что невозможно), отсюда $B \in \mathcal{R}(\sigma)$. Таким образом, $\mathcal{R}(\rho) \subset \mathcal{R}(\sigma)$, т. е. $\rho \leqslant \sigma$.

Заметим, что $F'_{\delta(\xi)} = \mathbf{Q}$, а группа $F''_{\delta(\xi)}$ есть прямая сумма циклических групп $\mathbf{Z}(p)$ по всем $p \in \xi^{-1}(\mu)$. В силу теоремы 7.9 имеем равенство $\sigma = \mathrm{H}_V$, где $V = F'_{\delta(\xi)} \oplus F''_{\delta(\xi)}$. Из $\mathbf{d} \leqslant \rho$ сразу вытекает $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}(\rho)$, а значит, $V \in \mathcal{R}(\rho)$. По предложению 6.9 получаем $\rho \geqslant \mathrm{H}_V = \sigma$, отсюда $\rho = \sigma$. ■

§8. Свойства замкнутости радикальных классов $\otimes$-радикалов

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые свойства замкнутости классов абелевых групп; мы выясним, в каких случаях класс ${}^{\otimes}\{F\}$ обладает (либо не обладает) данными свойствами. Ранее в §6 отмечалось, что, вообще говоря, радикальный класс $\mathcal{R}(\mathrm{W}_F) = {}^{\otimes}\{F\}$ не замкнут относительно прямых произведений. Убедимся в этом на примере абелевых групп.

Предложение 8.1. *Для радикала* $\rho \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$ *равносильны условия*:

1) *класс* $\mathcal{R}(\rho)$ *замкнут относительно прямых произведений*;

2) $\big[\Gamma(\rho)\big](\mathbf{P}) \subset \{n, \lambda, \nu\}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что 2) не выполнено.

Пусть $\big[\Gamma(\rho)\big](p) \in \{l, m\}$ для некоторого простого числа p, тогда $\rho \in \mathcal{L}_0$ и $\mathbf{Z}(p^\infty) \in \mathcal{R}(\rho)$. Класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит лишь периодические группы, поэтому прямое произведение счётного семейства копий группы $\mathbf{Z}(p^\infty)$ не содержится в этом классе.

Пусть теперь при некотором $p \in \mathbf{P}$ выполнено $\big[\Gamma(\rho)\big](p) = \mu$, тогда для каждого $k \in \mathbf{N}$ группа $B_k = \mathbf{Z}(p^k)$ лежит в $\mathcal{R}(\rho)$. Обозначим через B прямое произведение групп B_k по всем $k \in \mathbf{N}$. Если b_k — произвольный образующий элемент группы B_k, то легко понять, что p-высота элемента $(b_1, b_2, ...) + \mathbf{t}(B)$ в факторгруппе $B/\,\mathbf{t}(B)$ равна 0. Тогда $B/\,\mathbf{t}(B)$ не будет p-делимой группой и, значит, $B \notin \mathcal{R}(\rho)$.

В обоих случаях мы получили, что класс $\mathcal{R}(\rho)$ не является замкнутым относительно прямых произведений.

2) $\Rightarrow$ 1). Если $\big[\Gamma(\rho)\big](p) = n$ для всякого $p \in \mathbf{P}$, то радикал ρ совпадает с наименьшим элементом 0 решёток $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ и $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$. В этом случае, очевидно, радикальный класс $\mathcal{R}(\rho) = \{0\}$ замкнут относительно прямых произведений. Если же $\big[\Gamma(\rho)\big](\mathbf{P}) \subset \{\lambda, \nu\}$, то, как показано в §7, класс $\mathcal{R}(\rho)$ состоит из тех и только тех групп B, для которых $pB = B$ при любом простом p таком, что $\big[\Gamma(\rho)\big](p) = \lambda$. Ясно, что условие 1) выполнено и в этом случае. ■

Как мы уже отмечали, идемпотентный радикал ρ является кручением, когда радикальный класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно подмодулей (подгрупп, если речь идёт о категории mod-$\mathbf{Z}$). Учитывая теорему 2.12, из приведённого в предыдущем параграфе описания $\otimes$-радикалов мы заключаем, что каждое кручение категории mod-$\mathbf{Z}$ будет принадлежать множеству $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$; следующее предложение выясняет, когда радикал из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ является кручением.

Предложение 8.2. *Для группы F равносильны условия*:

1) *радикал* n_F *является кручением*;

2) *радикал* W_F *является кручением*;

3) $\big[\Gamma(\mathrm{W}_F)\big](\mathbf{P}) = \big[\Phi(F)\big](\mathbf{P}) \subset \{l, n, \nu\}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Из условия 1) следует $\mathrm{W}_F = \mathrm{n}_F$, поскольку W_F — это наибольший из всех радикалов $\sigma \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ таких, что справедливо неравенство $\sigma \leqslant \mathrm{n}_F$.

2) $\Rightarrow$ 3). Воспользуемся описанием кручений категории mod-$\mathbf{Z}$, которое было приведено ранее в теореме 2.12. Если $\mathrm{W}_F(A) = A$ для любой группы A, т. е. $\mathrm{W}_F = 1$, то $\big[\Gamma(\mathrm{W}_F)\big](p) = \nu$ для всякого $p \in \mathbf{P}$. Если же радикал $\rho = \mathrm{W}_F$ имеет вид (2.4) при некотором $X \subset \mathbf{P}$, то $\rho = \Gamma^{-1}(\xi)$, где

$$\xi(p) = \begin{cases} l, & \text{если } p \in X, \\ n, & \text{если } p \in \mathbf{P} \setminus X. \end{cases}$$

В обоих случаях получается, что для функции $\xi = \Gamma(\mathrm{W}_F)$ будет иметь место включение $\xi(\mathbf{P}) \subset \{l, n, \nu\}$.

3) $\Rightarrow$ 1). Если $\big[\Phi(F)\big](p) = \nu$ при всех $p \in \mathbf{P}$, то $F = 0$. Это значит, что $\mathrm{n}_F(A) = A$ для всех $A \in$ mod-$\mathbf{Z}$, поэтому n_F — кручение.

Допустим теперь, что $\big[\Phi(F)\big](\mathbf{P}) \subset \{l, n\}$. Так как группа $G = F/\,\mathbf{t}(F)$ является гомоморфным образом группы F, ввиду леммы 6.6 имеем $\mathrm{n}_F \leqslant \mathrm{n}_G$. Применяя предложение 6.5 к плоской группе G, получаем, что n_G совпадает с кручением W_G. Из условия $\big[\Phi(F)\big](\mathbf{P}) \subset \{l, n\}$ вытекает, что $\Phi(G) = \Phi(F)$, отсюда $\mathrm{W}_G = \mathrm{W}_F$. Поэтому $\mathrm{n}_F \leqslant \mathrm{n}_G = \mathrm{W}_G = \mathrm{W}_F \leqslant \mathrm{n}_F$ и, значит, радикал n_F тоже совпадает с кручением W_G. ∎

Мы установили, что в случае модулей над $\mathbf{Z}$ условие «W_F — кручение» эквивалентно условию «n_F — кручение». Впоследствии мы покажем, что для модулей над произвольным кольцом данная эквивалентность не имеет места (см. пример 17.6).

Лемма 8.3. (а) *Класс ${}^{\otimes}\{F\}$ замкнут относительно сервантных подгрупп для всякой группы F.*

(б) *Для произвольной p-группы F класс ${}^{\otimes}\{F\}$ замкнут относительно p-сервантных подгрупп.*

Доказательство. Если B является сервантной подгруппой группы A, то по теореме 3.15 существует подгруппа группы $A \otimes F$, изоморфная $B \otimes F$. Поэтому для любой группы F из $A \in {}^{\otimes}\{F\}$ вытекает $B \in {}^{\otimes}\{F\}$. Аналогично рассматривается случай, когда F есть p-группа. ∎

Убедимся теперь, что утверждение (а) леммы 8.3 является обратимым. В следующей теореме будет показано, что свойство замкнутости класса $\mathcal{R}(\rho)$ относительно сервантных подгрупп — характеристическое для $\otimes$-радикалов. Полное описание радикалов $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$, радикальные классы которых имеют это свойство, ранее (но на языке Hom-радикалов) дал Гарднер [59].

Теорема 8.4. *Для радикала $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ равносильны условия*:

1) *класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно сервантных подгрупп*;

2) *$\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно рациональных сервантных подгрупп*;

3) *$\rho \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$.*

Доказательство. Ясно, что справедлива импликация 1) $\Rightarrow$ 2).

2) $\Rightarrow$ 3). Если выполнено $\rho \leqslant \mathbf{t}$ (в этом случае, очевидно, бессмысленно было бы говорить о рациональных подгруппах содержащихся в $\mathcal{R}(\rho)$ групп), то по предложению 7.7 имеем $\rho \in \mathcal{L}_0$.

Пусть теперь $\rho \nleqslant \mathbf{t}$, т. е. класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит непериодические группы. Определим функцию $\xi\colon \mathbf{P} \to \mathcal{K}_1$ следующим образом:

$$\xi(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}(\rho), \\ \mu, & \text{если } \mathbf{Q}_p \notin \mathcal{R}(\rho) \text{ и } \mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho), \\ \nu, & \text{если } \mathbf{Q}_p \in \mathcal{R}(\rho). \end{cases}$$

Покажем, что ρ совпадает с радикалом $\sigma = \Gamma^{-1}(\xi)$.

Допустим, что $\rho \nleqslant \sigma$. Тогда ввиду леммы 7.3 существует группа $B \neq 0$, для которой $B \in \mathcal{R}(\rho)$ и $B \in \mathcal{P}(\sigma)$, причём можно считать, что либо B — это группа без кручения, либо $B = \mathbf{Z}(p)$, либо $B = \mathbf{Z}(p^\infty)$.

Из $\sigma \in \mathcal{L}_1$ вытекает, что $\mathcal{R}(\sigma)$ содержит все делимые группы и, значит, имеем $B \neq \mathbf{Z}(p^\infty)$. Если $B = \mathbf{Z}(p)$, то из условия $B \notin \mathcal{R}(\sigma)$ следует $\xi(p) = \lambda$, а это противоречит тому, что $\mathbf{Z}(p) = B \in \mathcal{R}(\rho)$.

Пусть теперь B — это ненулевая группа без кручения. Из соотношения $B \notin \mathcal{R}(\sigma)$ тогда следует, что можно найти $p \in \mathbf{P}$ со свойствами $\xi(p) \in \{\lambda, \mu\}$ и $pB \neq B$; в этом случае B содержит элемент b, имеющий нулевую p-высоту. Несложно видеть, что тогда наименьшую содержащую элемент b сервантную подгруппу $\langle b\rangle_*$ группы B можно вложить в группу $\mathbf{Q}_p$. Группа $\langle b\rangle_*$ является рациональной, а значит, в силу условия 2) из $B \in \mathcal{R}(\rho)$ вытекает $\langle b\rangle_* \in \mathcal{R}(\rho)$ и, далее, $\rho(\mathbf{Q}_p) \neq 0$. По следствию 2.15 имеем $\rho(\mathbf{Q}_p) = \mathbf{Q}_p$, что противоречит условию $\xi(p) \neq \nu$. Таким образом, $\rho \leqslant \sigma$.

Из следствия 2.16 ясно, что класс $\mathcal{R}(\rho)$ содержит все делимые группы. Покажем, что для множества $L = \xi^{-1}(\nu)$ группа $\mathbf{Q}_L = F'_{\delta(\xi)}$ тоже содержится в классе $\mathcal{R}(\rho)$. Для $L = \varnothing$ условие $\mathbf{Q}_L \in \mathcal{R}(\rho)$ выполняется, так как $\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}$. Предположим теперь, что $L \neq \varnothing$. Введём обозначения

$$A = \prod_{p \in L} \mathbf{Q}_p, \qquad C = \bigoplus_{p \in L} \mathbf{Q}_p \subset A.$$

Несложно видеть, что группа A/C делима, поэтому $A/C \in \mathcal{R}(\rho)$. Поскольку, очевидно, справедливо включение $C \in \mathcal{R}(\rho)$, имеем $A \in \mathcal{R}(\rho)$. Множество A'

элементов группы A, все координаты которых равны между собой, является сервантной подгруппой в A. Эта подгруппа изоморфна $\mathbf{Q}_L$, поэтому ввиду 2) получаем $\mathbf{Q}_L \in \mathcal{R}(\rho)$. Далее, для всякого $p \in \xi^{-1}(\mu)$ выполнено $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho)$. Следовательно, группа $V = F'_{\delta(\xi)} \oplus F''_{\delta(\xi)}$ есть элемент класса $\mathcal{R}(\rho)$. Применяя теорему 7.9 и предложение 6.9, получаем $\sigma = \mathrm{H}_V \leqslant \rho$; поэтому $\rho = \sigma \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$, что и требовалось.

3) $\Rightarrow$ 1). См. утверждение (a) леммы 8.3. ■

Убедимся, что если идемпотентный радикал категории абелевых групп $\otimes$-порождён некоторым классом групп, то его можно также представить как радикал, $\otimes$-порождённый одной абелевой группой.

Теорема 8.5. *Для всякого класса $\mathcal{F} \subset \text{mod-}\mathbf{Z}$ можно найти группу F такую, что $\mathrm{W}_{\mathcal{F}} = \mathrm{W}_F$.*

Доказательство. Как уже отмечалось ранее в §6, класс ${}^{\otimes}\mathcal{F} = \mathcal{R}(\mathrm{W}_{\mathcal{F}})$ является радикальным; кроме того, этот класс замкнут относительно взятия сервантных подгрупп (соответствующее рассуждение проводится аналогично доказательству утверждения (a) леммы 8.3). Тогда в силу теоремы 8.4 имеем включение $\mathrm{W}_{\mathcal{F}} \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$, т. е. для некоторой группы F выполнено соотношение $\mathrm{W}_{\mathcal{F}} = \mathrm{W}_F$. ■

Естественно поставить вопрос, какие радикалы будут получаться, если мы заменим в условии теоремы 8.4 сервантность каким-либо её обобщением. Описание радикальных классов, замкнутых относительно p-сервантных подгрупп, на языке Hom-радикалов дали Ямбор и Гарднер соответственно в [67] и [61]; мы опишем эти классы при помощи отображения Γ.

Предложение 8.6. *Для любого $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ и любого $p \in \mathbf{P}$ следующие условия эквивалентны:*

1) *класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно p-сервантных подгрупп;*

2) $\rho \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$ *и* $\big[\Gamma(\rho)\big](q) \in \{l, n, \nu\}$ *при всех* $q \in \mathbf{P} \setminus \{p\}$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Из условия 1) мы видим, что радикальный класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно взятия сервантных подгрупп; тогда в силу теоремы 8.4 имеем $\rho \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$. Зафиксируем число $q \in \mathbf{P} \setminus \{p\}$.

Если $\big[\Gamma(\rho)\big](q) = m$, то $\rho \in \mathcal{L}_0$ и, очевидно, группа $\mathbf{Z}(q^\infty)$ принадлежит классу $\mathcal{R}(\rho)$, который не содержит её p-сервантную подгруппу $\mathbf{Z}(q)$. Если же $\big[\Gamma(\rho)\big](q)$ совпадает с λ или μ, то $\rho \in \mathcal{L}_1$ и легко проверить, что p-сервантная подгруппа $\mathbf{Q}^{(p)}$ группы $\mathbf{Q} \in \mathcal{R}(\rho)$ не принадлежит классу $\mathcal{R}(\rho)$.

В обоих случаях получили противоречие с условием 1). Отсюда можно заключить, что $\big[\Gamma(\rho)\big](q) \in \{l, n, \nu\}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Обозначим $\xi = \Gamma(\rho)$.

Предположим, что выполнено соотношение $\xi(\mathbf{P} \setminus \{p\}) \subset \{l, n\}$, и пусть B — p-сервантная подгруппа группы $A \in \mathcal{R}(\rho)$. Из включения $\xi \in \mathcal{K}_0^{\mathbf{P}}$ видно, что группа A (а значит, и группа B) является периодической. Допустим, что $B \notin \mathcal{R}(\rho)$. Для каждого $q \in \xi^{-1}(n)$ ввиду включения $A \in \mathcal{R}(\rho)$ имеем $A_q = 0$ и, следовательно, $B_q = 0$. Тогда из $B \notin \mathcal{R}(\rho)$ вытекает, что существует число $q \in \xi^{-1}(m)$, для которого $qB_q \neq B_q$. Отсюда $\xi(p) = m$ и $pB_p \neq B_p$. Группа A_p не может быть p-делимой, так как иначе её p-сервантная подгруппа B_p тоже p-делима. Поэтому $A \notin \mathcal{R}(\rho)$ — противоречие.

Предположим теперь, что $\xi(q) = \nu$ при всех $q \in \mathbf{P} \setminus \{p\}$. В этом случае F_ξ есть p-группа. Ввиду леммы 8.3 отсюда вытекает, что класс ${}^{\otimes}\{F_\xi\} = \mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно p-сервантных подгрупп. Предложение доказано. ■

Определение 8.7. *Слабо сервантной* называется всякая подгруппа B группы A такая, что для любого $p \in \mathbf{P}$ выполнено $pB = B \cap pA$.

Ясно, что сервантная подгруппа всегда слабо сервантна.

Предложение 8.8. *Пусть выполнено $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$. Следующие условия эквивалентны*:

1) *класс $\mathcal{R}(\rho)$ замкнут относительно слабо сервантных подгрупп*;

2) $\rho \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$ *и* $\mu \notin \big[\Gamma(\rho)\big](\mathbf{P})$.

Доказательство. Гарднером [61] установлено, что радикальный класс $\mathcal{R} \subset \text{mod-}\mathbf{Z}$ обладает свойством замкнутости относительно слабо сервантных подгрупп в точности тогда, когда выполнено одно из двух условий:

— класс $\mathcal{R}$ содержит только периодические группы;

— существует множество $X \subset \mathbf{P}$ такое, что

$$\mathcal{R} = \{B \in \text{mod-}\mathbf{Z} \mid pB = B \text{ при всех } p \in X\}.$$

Радикальные классы первого типа — это в точности классы вида $\mathcal{R}(\rho)$, где $\rho \in \mathcal{L}_0$ (предложение 7.7). Классы второго типа — это в точности классы вида $\mathcal{R}(\Gamma^{-1}(\xi))$, где

$$\xi(p) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } p \in X, \\ \nu, & \text{если } p \in \mathbf{P} \setminus X. \end{cases}$$

Тем самым предложение доказано. ■

§9. Решёточные свойства $\otimes$-радикалов

В первой части параграфа мы покажем, что «решёточное» пересечение радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ совпадает с их «поточечным» пересечением (под точками здесь условно понимаются абелевы группы). Точнее, мы установим, что если $\mathcal{S}$ — какое-то непустое семейство радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, то для любой группы A имеет место равенство

$$\sigma(A) = A', \qquad \text{где } \sigma = \bigwedge_{\rho \in \mathcal{S}} \rho \ \text{ и } A' = \bigcap_{\rho \in \mathcal{S}} \rho(A). \tag{9.1}$$

Доказательство будет разбито на несколько шагов.

Чтобы проверить равенство (9.1), достаточно убедиться, что $A' \in \mathcal{R}(\rho)$ для всех $\rho \in \mathcal{S}$. Тогда из (2.2) можно сделать вывод, что $A' \subset \sigma(A)$, и в силу очевидного соотношения $\sigma(A) \subset A'$ отсюда будет следовать (9.1).

Лемма 9.1. *Для любых $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ и группы A выполнено*

$$[\rho \wedge \mathbf{t}](A) = \rho(\mathbf{t}(A)) = \mathbf{t}(\rho(A)) = \rho(A) \cap \mathbf{t}(A).$$

Доказательство. Очевидно, имеем $[\rho \wedge \mathbf{t}](A) \subset \rho(\mathbf{t}(A)) \subset \rho(A) \cap \mathbf{t}(A)$ и, кроме того, $\mathbf{t}(\rho(A)) = \rho(A) \cap \mathbf{t}(A)$, так как $\mathbf{t}$ есть кручение. Из включения $\rho(A) \in \mathcal{R}(\rho)$ ввиду теоремы 2.13 следует $\mathbf{t}(\rho(A)) \in \mathcal{R}(\rho)$. Поэтому выполнено $\mathbf{t}(\rho(A)) \in \mathcal{R}(\rho) \cap \mathcal{R}(\mathbf{t}) = \mathcal{R}(\rho \wedge \mathbf{t})$ и, таким образом, $\mathbf{t}(\rho(A)) \subset [\rho \wedge \mathbf{t}](A)$, что завершает доказательство леммы. ■

Лемма 9.2. *Равенство* (9.1) *выполнено для всякой p-группы A.*

Доказательство. Пусть A есть некоторая p-группа, тогда для любого $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ имеем $\rho(A) = \rho(\mathbf{t}(A)) = [\rho \wedge \mathbf{t}](A)$. Из теоремы 2.17 и неравенства $\rho \wedge \mathbf{t} \leqslant \mathbf{t}$ вытекает, что для всякого $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ подгруппа $\rho(A)$ равна 0, $\mathbf{d}(A)$ или A. В этом случае пересечение A' подгрупп $\rho(A)$ по всем $\rho \in \mathcal{S}$ совпадает с какой-либо из этих подгрупп и, значит, служит прямым слагаемым каждой из групп $\rho(A)$. Следовательно, для всех $\rho \in \mathcal{S}$ имеем соотношение $A' \in \mathcal{R}(\rho)$, откуда вытекает утверждение леммы. ■

Следствие 9.3. *Равенство* (9.1) *выполнено для всякой периодической группы* A.

Доказательство. Применим лемму 9.2 к примарным компонентам A_p периодической группы A:

$$\sigma(A) = \bigoplus_{p\in\mathbf{P}} \sigma(A_p) = \bigoplus_{p\in\mathbf{P}} \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}} \rho(A_p) = \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}} \bigoplus_{p\in\mathbf{P}} \rho(A_p) = \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}} \rho(A). \qquad \blacksquare$$

Предложение 9.4. *Если в семейство* $\mathcal{S}$ *входит по крайней мере один радикал, принадлежащий множеству* $\mathcal{L}_0$, *то равенство* (9.1) *выполнено для всякой группы* A.

Доказательство. Из условия вытекает, что хотя бы для одного $\rho \in \mathcal{S}$ выполняется $\rho(A) \subset \mathbf{t}(A)$. По лемме 9.1 для произвольного $\rho \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ имеем $\rho(\mathbf{t}(A)) = \rho(A) \cap \mathbf{t}(A)$. Применяя следствие 9.3 к группе $\mathbf{t}(A)$, получаем

$$A' = \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}} \rho(A) = \Big(\bigcap_{\rho\in\mathcal{S}} \rho(A)\Big) \cap \mathbf{t}(A) = \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}} \big(\rho(A) \cap \mathbf{t}(A)\big) =$$

$$= \bigcap_{\rho\in\mathcal{S}} \rho(\mathbf{t}(A)) = \sigma(\mathbf{t}(A)) \subset \sigma(A),$$

откуда следует равенство (9.1). $\blacksquare$

Заметим, что в доказательстве предложения 9.4 нигде не использовано то обстоятельство, что все идемпотентные радикалы из семейства $\mathcal{S}$ должны быть элементами множества $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$.

Для радикала $\rho \in \mathcal{L}_1$ и числа $p \in \mathbf{P}$ обозначим $\rho_p = \rho \mathbin{\widetilde{\vee}} \Gamma^{-1}(\xi_p)$, где

$$\xi_p(q) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } q = p, \\ \nu, & \text{если } q \in \mathbf{P} \setminus \{p\}. \end{cases}$$

В этом случае имеем $\Gamma(\rho_p) = \Gamma(\rho) \vee \xi_p$, т. е.

$$\big[\Gamma(\rho_p)\big](q) = \begin{cases} \big[\Gamma(\rho)\big](p), & \text{если } q = p, \\ \nu, & \text{если } q \in \mathbf{P} \setminus \{p\}. \end{cases}$$

Тогда $\Gamma(\rho) = \bigwedge\limits_{p\in\mathbf{P}} \Gamma(\rho_p)$ и, значит, $\rho = \bigwedge\limits_{p\in\mathbf{P}} \rho_p$.

Лемма 9.5. *Если D — сервантная подгруппа группы A, то подгруппа $(D+A_q)/A_q$ сервантна в A/A_q для любого $q \in \mathbf{P}$.*

Доказательство. Допустим, что для числа $s \in \mathbf{N}$ и элементов $x \in D$, $a \in A$ выполнено равенство $x + A_q = s(a + A_q)$. Тогда $x = sa + b$, где $q^k b = 0$ для какого-либо $k \geqslant 0$; отсюда получаем $q^k x = sq^k a$. Поскольку подгруппа D сервантна в A, то $q^k(x - sy) = 0$ для некоторого $y \in D$. Из $x = sy + (x - sy)$ теперь вытекает $x + A_q = s(y + A_q)$. Итак, $(D+A_q)/A_q$ является сервантной подгруппой факторгруппы A/A_q. $\blacksquare$

Предложение 9.6. *Если $\rho \in \mathcal{L}_1$, то для всех групп A выполнено*

$$\rho(A) = \Big[\bigwedge_{p\in\mathbf{P}} \rho_p\Big](A) = \bigcap_{p\in\mathbf{P}} \rho_p(A).$$

Доказательство. Для произвольного $q \in \mathbf{P}$ рассмотрим естественный эпиморфизм $\pi\colon A \to A/A_q$. Введём обозначения

$$B = \bigcap_{p\in\mathbf{P}} \rho_p(A), \qquad C = \bigcap_{p\in\mathbf{P}} \big(\rho_p(A) + A_q\big).$$

Убедимся теперь, что $C = A_q + B$. Для каждого простого числа $p \neq q$ имеем $\big[\Gamma(\rho_p)\big](q) = \nu$, отсюда $A_q \in \mathcal{R}(\rho_p)$. Тогда $A_q \subset \bigcap_{p\neq q} \rho_p(A)$ и, значит,

$$C = \bigcap_{p\in\mathbf{P}} \big(\rho_p(A) + A_q\big) = \Big(\bigcap_{p\neq q} \rho_p(A)\Big) \cap \big(\rho_q(A) + A_q\big) =$$
$$= A_q + \bigcap_{p\in\mathbf{P}} \rho_p(A) = A_q + B$$

(здесь мы использовали модулярность решётки всех подгрупп группы A).

В силу леммы 9.5 и сервантности подгрупп $\rho_p(A)$ группы A, где $p \in \mathbf{P}$, все подгруппы $\pi(\rho_p(A))$ факторгруппы A/A_q сервантны. Далее, группа A/A_q имеет нулевую q-компоненту, а значит, пересечение произвольного семейства q-сервантных подгрупп из A/A_q есть q-сервантная подгруппа. Тогда факторгруппа C/A_q, представляющая собой пересечение всех групп $\pi(\rho_p(A))$, будет

q-сервантной подгруппой в A/A_q и, следовательно, в $\pi(\rho_q(A))$; из включения $\pi(\rho_q(A)) \in \mathcal{R}(\rho_q)$ и справедливости равенства $\bigl[\Gamma(\rho_q)\bigr](p) = \nu$ при $p \in \mathbf{P} \setminus \{q\}$ ввиду предложения 8.6 вытекает $\pi(B) = C/A_q \in \mathcal{R}(\rho_q)$.

Далее, заметим, что $\pi(B) \cong B/(B \cap \operatorname{Ker} \pi) = B/(B \cap \mathbf{t}_q(A))$. Применяя предложение 9.4 к семейству $\mathcal{S} = \{\rho_p \mid p \in \mathbf{P}\} \cup \{\mathbf{t}_q\}$, получаем

$$B \cap \mathbf{t}_q(A) = [\rho \wedge \mathbf{t}_q](A) \in \mathcal{R}(\rho \wedge \mathbf{t}_q) \subset \mathcal{R}(\rho) \subset \mathcal{R}(\rho_q).$$

Класс $\mathcal{R}(\rho_q)$ замкнут относительно расширений, а следовательно, $B \in \mathcal{R}(\rho_q)$. Приведённые рассуждения справедливы для любого $q \in \mathbf{P}$; отсюда получаем $\rho(A) = B$. ■

Лемма 9.7. *Пусть все радикалы семейства $\mathcal{S}$ являются элементами множества $\mathcal{L}_1$ и существует $p \in \mathbf{P}$ такое, что для любого $\rho \in \mathcal{S}$ и любого $q \in \mathbf{P} \setminus \{p\}$ выполнено $\bigl[\Gamma(\rho)\bigr](q) = \nu$. Тогда соотношение* (9.1) *имеет место для всякой группы A.*

Доказательство. Из условия следует, что семейство $\mathcal{S}$ содержит наименьший элемент (поскольку наименьший элемент есть в семействе функций $\Gamma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{J}$). Для семейства $\mathcal{S}$ таким элементом, очевидно, может быть только радикал σ. Поэтому $A' = \sigma(A)$, что и требовалось. ■

Пусть теперь $\mathcal{S}$ есть какое-нибудь непустое семейство радикалов из $\mathcal{L}_1$. В этом случае $\sigma \in \mathcal{L}_1$ и для всякого $p \in \mathbf{P}$ выполнено

$$\sigma_p = \sigma \mathbin{\widetilde{\vee}} \Gamma^{-1}(\xi_p) = \Bigl(\bigwedge_{\rho \in \mathcal{S}} \rho\Bigr) \mathbin{\widetilde{\vee}} \Gamma^{-1}(\xi_p) = \bigwedge_{\rho \in \mathcal{S}} \bigl(\rho \mathbin{\widetilde{\vee}} \Gamma^{-1}(\xi_p)\bigr) = \bigwedge_{\rho \in \mathcal{S}} \rho_p$$

(напомним, что операции $\wedge$ и $\widetilde{\wedge}$ действуют на радикалы из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ одинаково). Применяя лемму 9.7 к семейству $\{\rho_p \mid \rho \in \mathcal{S}\}$ и пользуясь предложением 9.6, получаем равенства

$$\Bigl[\bigwedge_{\rho \in \mathcal{S}} \rho\Bigr](A) = \sigma(A) = \bigcap_{p \in \mathbf{P}} \sigma_p(A) = \bigcap_{p \in \mathbf{P}} \Bigl[\bigwedge_{\rho \in \mathcal{S}} \rho_p\Bigr](A) =$$
$$= \bigcap_{p \in \mathbf{P}} \bigcap_{\rho \in \mathcal{S}} \rho_p(A) = \bigcap_{\rho \in \mathcal{S}} \bigcap_{p \in \mathbf{P}} \rho_p(A) = \bigcap_{\rho \in \mathcal{S}} \rho(A).$$

С учётом предложения 9.4 приходим к следующему результату.

Теорема 9.8. *Если $\mathcal{S}$ есть какое-либо непустое семейство радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, то для всякой группы A выполнено*

$$\Big[\bigwedge_{\rho\in\mathcal{S}}\rho\Big](A)=\bigcap_{\rho\in\mathcal{S}}\rho(A). \tag{9.2}$$

В [27] Тэбырцэ доказал равенство (9.2) для модулей над произвольным кольцом, предполагая, что все радикалы семейства $\mathcal{S}$ являются кручениями. Поскольку всякое кручение категории mod-$\mathbf{Z}$ принадлежит множеству $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, то теорему 9.8 можно рассматривать как обобщение результата Тэбырцэ для случая абелевых групп. Аналогичное замечание применимо и к теореме 9.10, которая будет приведена ниже.

Следствие 9.9. *Для произвольных групп F, G и A выполнено*

$$\begin{aligned}\big[\mathrm{W}_F\wedge\mathrm{W}_G\big](A)&=\mathrm{W}_F(\mathrm{W}_G(A))=\mathrm{W}_G(\mathrm{W}_F(A))=\\&=\mathrm{W}_{F\oplus G}(A)=\mathrm{W}_F(A)\cap\mathrm{W}_G(A).\end{aligned}$$

В частности, любые два радикала категории mod-$\mathbf{Z}$, *принадлежащие* $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$, *коммутируют между собой.*

Доказательство. Равенство $\big[\mathrm{W}_F\wedge\mathrm{W}_G\big](A)=\mathrm{W}_{F\oplus G}(A)$ сразу следует из предложения 6.11; равенство $\big[\mathrm{W}_F\wedge\mathrm{W}_G\big](A)=\mathrm{W}_F(A)\cap\mathrm{W}_G(A)$ выполнено в силу теоремы 9.8. Кроме того, справедливы включения

$$\begin{aligned}\big[\mathrm{W}_F\wedge\mathrm{W}_G\big](A)\subset\mathrm{W}_F(\mathrm{W}_G(A))\subset\mathrm{W}_F(A)\cap\mathrm{W}_G(A),\\ \big[\mathrm{W}_F\wedge\mathrm{W}_G\big](A)\subset\mathrm{W}_G(\mathrm{W}_F(A))\subset\mathrm{W}_F(A)\cap\mathrm{W}_G(A).\end{aligned}$$

Отсюда следуют требуемые равенства. ■

Оставшаяся часть параграфа посвящена такому вопросу: какие законы дистрибутивности останутся верны для ⊗-радикалов после замены операций $\wedge$ и $\widetilde{\vee}$ решётки $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ операциями $\wedge$ и $\vee$, определёнными на $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$?

Теорема 9.10. *Для любого $\rho \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$ и любого непустого семейства $\mathcal{S}$ радикалов из $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ выполнено*

$$\rho \wedge \Big(\bigvee_{\sigma \in \mathcal{S}} \sigma \Big) = \bigvee_{\sigma \in \mathcal{S}} (\rho \wedge \sigma).$$

Доказательство. Введём вспомогательные обозначения

$$\rho' = \bigvee_{\sigma \in \mathcal{S}} \sigma, \qquad \rho'' = \bigvee_{\sigma \in \mathcal{S}} (\rho \wedge \sigma).$$

Неравенство $\rho'' \leqslant \rho \wedge \rho'$ очевидно; пусть выполнено $\rho'' < \rho \wedge \rho'$. Тогда в силу леммы 7.3 существует группа $B \neq 0$ такая, что $B \in \mathcal{R}(\rho \wedge \rho') = \mathcal{R}(\rho) \cap \mathcal{R}(\rho')$ и $B \in \mathcal{P}(\rho'')$. Из последнего условия следует, что при всех $\sigma \in \mathcal{S}$ имеет место соотношение $B \in \mathcal{P}(\rho \wedge \sigma)$; применяя к семейству идемпотентных радикалов $\{\rho, \sigma\}$ теорему 9.8, получаем для произвольного $\sigma \in \mathcal{S}$ равенства

$$0 = [\rho \wedge \sigma](B) = \rho(B) \cap \sigma(B) = B \cap \sigma(B) = \sigma(B),$$

т. е. $B \in \mathcal{P}(\sigma)$. Отсюда $B \in \mathcal{P}(\rho')$, а это противоречит включению $B \in \mathcal{R}(\rho')$. Итак, $\rho \wedge \rho' = \rho''$, что доказывает теорему. ■

Пример 9.11. Мы покажем, что существуют радикалы $\rho, \rho', \sigma \in \mathcal{L}(\mathbf{Z})$, для которых имеет место неравенство

$$(\rho \wedge \rho') \vee \sigma \neq (\rho \vee \sigma) \wedge (\rho' \vee \sigma).$$

Для этого найдём ненулевую группу B такую, что имеют место соотношения $B \in \mathcal{R}(\rho \vee \sigma) \cap \mathcal{R}(\rho' \vee \sigma)$ и $B \in \mathcal{P}(\rho \wedge \rho') \cap \mathcal{P}(\sigma)$; группа, обладающая этими свойствами, будет принадлежать и радикальному классу радикала, стоящего в правой части неравенства, и полупростому классу радикала из левой части неравенства, а значит, левая часть не равна правой.

Пусть p и q — различные нечётные простые числа. Введём обозначения $\rho = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(p)}$, $\rho' = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(q)}$, $\sigma = \mathrm{W}_{\mathbf{Z}(2)}$. Далее, пусть $A = \mathbf{Q}^{(2p)}$, $C = \mathbf{Q}^{(2q)}$, $A_0 = \mathbf{Q}^{(p)}$ и $C_0 = \mathbf{Q}^{(q)}$. Естественные эпиморфизмы $A \to A/A_0$ и $C \to C/C_0$ обозначаем через α и γ. Очевидно, имеем $A/A_0 \cong \mathbf{Z}(2^\infty) \cong C/C_0$; пусть $\zeta\colon A/A_0 \to C/C_0$ есть некоторый изоморфизм. Положим

$$B = \bigl\{(a,c) \in A \oplus C \bigm| \zeta(\alpha(a)) = \gamma(c)\bigr\}.$$

Легко убедиться, что гомоморфизм $B \to C$, который переводит всякую пару (a,c) в элемент c, сюръективен и его ядро изоморфно A_0. Это означает, что существует точная последовательность

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0.$$

Из данного факта, а также из очевидных соотношений $A_0 \in \mathcal{R}(\rho) \subset \mathcal{R}(\rho \vee \sigma)$ и $C \in \mathcal{R}(\sigma) \subset \mathcal{R}(\rho \vee \sigma)$ следует $B \in \mathcal{R}(\rho \vee \sigma)$. Аналогично доказывается, что $B \in \mathcal{R}(\rho' \vee \sigma)$.

Далее, имеем $A_0 \notin \mathcal{R}(\rho')$ и, значит, $A_0 \notin \mathcal{R}(\rho \wedge \rho')$. Применяя к группе $A_0 \subset \mathbf{Q}$ следствие 2.15, приходим к включению $A_0 \in \mathcal{P}(\rho \wedge \rho')$. Точно так же из $C \notin \mathcal{R}(\rho)$ вытекает $C \notin \mathcal{R}(\rho \wedge \rho')$ и, далее, $C \in \mathcal{P}(\rho \wedge \rho')$. Из замкнутости класса $\mathcal{P}(\rho \wedge \rho')$ относительно расширений следует, что $B \in \mathcal{P}(\rho \wedge \rho')$.

Осталось убедиться, что для подходящего изоморфизма ζ выполняется включение $B \in \mathcal{P}(\sigma)$. Для группы $V = \mathbf{Q}^{(2)}$ имеем

$$\begin{aligned} A/A_0 &= (V + A_0)/A_0 \cong V/(V \cap A_0) = V/\mathbf{Z} = \\ &= V/(V \cap C_0) \cong (V + C_0)/C_0 = C/C_0; \end{aligned}$$

пусть $\varepsilon\colon A/A_0 \to C/C_0$ есть соответствующий изоморфизм, т. е. для каждого элемента $v \in V$ справедливо равенство $\varepsilon(v + A_0) = v + C_0$.

Факторгруппа $C/C_0 \cong \mathbf{Z}(2^\infty)$, будучи 2-группой, может быть снабжена структурой модуля над $\mathbf{Q}_2^*$. При этом для всякого 2-адического числа

$$z = r_0 + r_1 \cdot 2 + r_2 \cdot 2^2 + \ldots \in \mathbf{Q}_2^*, \qquad \text{где } r_j \in \{0,1\}, \tag{9.3}$$

и чисел $d \in \mathbf{Z}$, $k \geqslant 0$ выполнено

$$\left(\frac{d}{2^k} + C_0\right) z = \frac{d(r_0 + r_1 \cdot 2 + r_2 \cdot 2^2 + \ldots + r_{k-1} 2^{k-1})}{2^k} + C_0.$$

Пусть $z \in \mathbf{Q}_2^* \setminus \mathbf{Q}_2$ (считаем, что $\mathbf{Q}_2 \subset \mathbf{Q}_2^*$) есть некоторое 2-адическое число вида (9.3) и $r_0 = 1$. Умножение на z является автоморфизмом группы C/C_0; положим $\zeta = z\varepsilon$.

Группа $\sigma(B)$, как и любая группа из класса $\mathcal{R}(\sigma)$, является 2-делимой. Если $\sigma(B) \neq 0$, то B содержит элемент $(a, c) \neq 0$, имеющий в B бесконечную 2-высоту. При этом можно считать, что a и c суть целые числа (в противном случае просто домножим их на общий знаменатель). Для всех $k \geqslant 0$ элемент $\left(\frac{a}{2^k}, \frac{c}{2^k}\right)$ принадлежит группе B, поэтому

$$\frac{c}{2^k} + C_0 = \gamma\left(\frac{c}{2^k}\right) = [\zeta\alpha]\left(\frac{a}{2^k}\right) = \zeta\left(\frac{a}{2^k} + A_0\right) = \left(\frac{a}{2^k} + C_0\right)z =$$
$$= \frac{a(r_0 + r_1 \cdot 2 + r_2 \cdot 2^2 + ... + r_{k-1}2^{k-1})}{2^k} + C_0$$

и, значит, $c - az \in 2^k\mathbf{Q}_2^*$. Отсюда $c = az$, а это противоречит выбору числа z. Итак, $B \in \mathcal{P}(\sigma)$, что и требовалось.

Замечание. В силу теоремы 9.10 для тех же самых радикалов ρ, ρ', σ справедливы соотношения

$$\big(\rho \wedge (\rho' \vee \sigma)\big) \vee \sigma = (\rho \wedge \rho') \vee (\rho \wedge \sigma) \vee \sigma =$$
$$= (\rho \wedge \rho') \vee \sigma \neq (\rho \vee \sigma) \wedge (\rho' \vee \sigma);$$

при этом, очевидно, имеем $\sigma \leqslant \rho' \vee \sigma$. Отсюда следует, что большая решётка $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ не является модулярной. Кроме того, порождённая множеством $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$ подрешётка большой решётки $\mathcal{IR}(\mathbf{Z})$ тоже не будет модулярной, так как она содержит радикалы ρ, $\rho' \vee \sigma$ и σ. Нетрудно также видеть, что

$$[\rho \wedge \mathrm{H}_B](B) = 0 \neq \rho(B) = \rho(B) \cap B = \rho(B) \cap \mathrm{H}_B(B),$$

а значит, в условии теоремы 9.8 нельзя отказаться от требования, чтобы все рассматриваемые радикалы принадлежали множеству $\mathcal{L}(\mathbf{Z})$.

ГЛАВА 3

Т-РАДИКАЛЫ И Е-РАДИКАЛЫ

В этой главе изучаются идемпотентные радикалы в категории модулей над произвольным кольцом. Понятие Е-радикала, введённое в §10, обобщает идемпотентный радикал, рассматривавшийся в статье [76], в той же степени, в какой $\mathrm{E}(e)$-модули (из работ [15, 23]) служили обобщением «классических» Е-модулей. Похожим образом при помощи $\mathrm{T}(e)$-модулей задаётся Т-радикал.

Показывается, что Т-радикал и Е-радикал весьма близки к радикалам, $\otimes$-порождённым или соответственно порождённым некоторыми бимодулями. В связи с этим в §11 ставится такой вопрос: при каких условиях на кольцо S всякий идемпотентный радикал категории mod-S, который $\otimes$-порождён или порождён S-модулем, будет $\otimes$-порождён (или соответственно порождён) ещё и некоторым S-S-бимодулем?

Оказывается, что в случае с $\otimes$-порождаемостью подходящий бимодуль существует при любом кольце S. В случае с порождаемостью это выполнено лишь тогда, когда S есть *правое* br-*кольцо*. Установлены характеристические свойства этих колец. Доказано, что класс правых br-колец является ответом и на двойственный вопрос: при каких условиях на S каждый идемпотентный радикал категории mod-S, копорождённый каким-то S-модулем, будет также копорождён подходящим S-S-бимодулем?

В §12 выделены некоторые известные классы колец, содержащиеся как в классе правых, так и в классе левых br-колец. Приводятся примеры колец, не являющихся правыми br-кольцами.

§10. T(e)-модули, E(e)-модули и связанные с ними радикалы

Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец; тогда любой модуль A_R можно рассматривать как правый S-модуль, полагая $as = ae(s)$ для всех элементов $a \in A$, $s \in S$ (полученный модуль A_S называют *притягивающим*). Ясно, что всякий R-гомоморфизм таких S-модулей является также S-гомоморфизмом. Это означает, что сопоставление $A_R \rightsquigarrow A_S$ задаёт унивалентный функтор Θ_e из категории mod-R в категорию mod-S (см. [28]).

Пусть $A \in$ mod-R. Для всякого левого R-модуля F можно рассмотреть канонический эпиморфизм $A \otimes_S F \to A \otimes_R F$, переводящий элементы $a \otimes_S f$ в элементы $a \otimes_R f$ (при всех $a \in A$ и $f \in F$). Кроме того, для любого модуля $V \in$ mod-R справедливо включение $\mathrm{Hom}_R(V, A) \subset \mathrm{Hom}_S(V, A)$.

Предложение 10.1 [28]. *Если гомоморфизм $e\colon S \to R$ сюръективен, то для всякого $A \in$ mod-R справедливы следующие утверждения*:

(а) *канонический эпиморфизм $A \otimes_S F \to A \otimes_R F$ будет изоморфизмом при любом $F \in R$-mod;*

(б) $\mathrm{Hom}_R(V, A) = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ *при любом $V \in$ mod-R.*

Замечание. Поскольку оба тензорных произведения $A \otimes_S F$ и $A \otimes_R F$ по определению будут факторгруппами одной и той же свободной группы Λ, инъективность канонического эпиморфизма $A \otimes_S F \to A \otimes_R F$ эквивалентна совпадению этих тензорных произведений.

Легко видеть, что R и $e(S)$ являются S-S-бимодулями. На протяжении всего параграфа будем считать, что модуль F (модуль V) совпадает с левым (соответственно с правым) S-модулем $R/e(S)$.

Определение 10.2. Пусть $A \in$ mod-R, и пусть $e\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм. Модуль A называется:

— T(e)-*модулем*, если $A \otimes_R R = A \otimes_S R$;

— E(e)-*модулем*, если $\mathrm{Hom}_R(R, A) = \mathrm{Hom}_S(R, A)$.

Замечание. Свойство «R_R есть E(e)-модуль относительно кольцевого гомоморфизма $e\colon \mathbf{Z} \to R$» равносильно тому, что R является E-кольцом.

Через $\mathcal{T}$ (через $\mathcal{E}$) мы обозначим класс модулей A_S, на которых можно ввести R-модульную структуру таким образом, чтобы имело место равенство $\Theta_e(A_R) = A_S$ и A являлся T(e)-модулем (или соответственно E(e)-модулем). Следующий результат описывает характеристические свойства T(e)-модулей и E(e)-модулей.

Теорема 10.3 [15, 23]. (а) *Для произвольного модуля A_R следующие условия равносильны*:

1) *A является* T(e)*-модулем*;

2) $A \otimes_S F = 0$;

3) $\mathrm{Hom}_R(A, B) = \mathrm{Hom}_S(A, B)$ *для любого модуля B_R*;

4) *канонический эпиморфизм $A \otimes_S B \to A \otimes_R B$ биективен для любого модуля ${}_RB$.*

(б) *Для произвольного модуля A_R следующие условия равносильны*:

1) *A является* E(e)*-модулем*;

2) $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$;

3) $\mathrm{Hom}_R(B, A) = \mathrm{Hom}_S(B, A)$ *для любого модуля B_R.*

Из теоремы 10.3 непосредственно вытекает, что $\mathcal{E} = \{V\}^{\downarrow} \cap \Theta_e(\text{mod-}R)$ и $\mathcal{T} = {}^{\otimes}\{F\} \cap \Theta_e(\text{mod-}R)$. Справедлива также

Теорема 10.4 [15]. *Если $A_S \in \mathcal{T} \cup \mathcal{E}$, то существует единственный способ превратить A в R-модуль так, чтобы $\Theta_e(A_R) = A_S$.*

В силу теоремы 10.4 сужение функтора Θ_e на подкатегорию категории mod-R, состоящую из всех T(e)-модулей или из всех E(e)-модулей, является инъективным на объектах; ввиду теоремы 10.3 каждое из этих двух сужений является не только унивалентным, но и полным функтором. Следовательно, функтор Θ_e определяет изоморфизм между полной подкатегорией категории mod-R, объекты которой — это все T(e)-модули (все E(e)-модули), и полной подкатегорией $\mathcal{T}$ (соответственно подкатегорией $\mathcal{E}$) категории mod-S.

Определение 10.5. Пусть A есть правый R-модуль. Его T-*радикалом* назовём сумму W(A) всех R-подмодулей $B \subset A$, являющихся T(e)-модулями.

Учитывая включение $\mathcal{T} \subset {}^{\otimes}\{F\}$, из определений $\mathrm{W}_F(A)$ и $\mathrm{W}(A)$ легко вывести, что для каждого правого R-модуля A выполняется $\mathrm{W}(A) \subset \mathrm{W}_F(A)$. Наша ближайшая задача — убедиться, что на самом деле будет справедливо равенство $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_F(A)$. Напомним, что $\mathrm{n}_F(A)$ — подмодуль в A_S.

Обозначим $G = R \otimes_S F$. Из теоремы 3.5 известно, что G естественным образом превращается в левый модуль над R. Поэтому G задаёт в категории mod-R радикал n_G и идемпотентный радикал W_G.

Теорема 10.6. *Пусть A — R-модуль. Тогда*:

(а) $\mathrm{n}_F(A)$ *является R-подмодулем в A*;

(б) $\mathrm{n}_F(A) = \mathrm{n}_G(A)$.

Доказательство. (а) Для элементов модуля $F = R/e(S) \in S$-mod мы будем использовать обозначения $\overline{r}$, $\overline{r}_1$ и т. д. Зафиксируем $r_1 \in R$; определим отображение $g\colon A \times R \to A \otimes_S F$ формулой $g(a, r) = ar \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$, где $a \in A$ и $r \in R$. Билинейность отображения g очевидна. Для $s \in S$ имеем

$$g(as, r) = asr \otimes_S \overline{r}_1 - as \otimes_S \overline{rr}_1 = asr \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{srr}_1 = g(a, sr),$$

а значит, отображение g является S-сбалансированным. Тогда по теореме 3.2 существует гомоморфизм групп $\varphi\colon A \otimes_S R \to A \otimes_S F$ такой, что для любых $a \in A$ и $r \in R$ выполняется $\varphi(a \otimes_S r) = ar \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$. Далее, отметим, что точная последовательность левых S-модулей

$$0 \longrightarrow e(S) \xrightarrow{\alpha} R \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow 0$$

(здесь α — вложение) индуцирует точную последовательность групп

$$A \otimes_S e(S) \xrightarrow{\overline{\alpha}} A \otimes_S R \xrightarrow{\overline{\beta}} A \otimes_S F \longrightarrow 0;$$

в частности, $\operatorname{Im}\overline{\alpha} = \operatorname{Ker}\overline{\beta}$. Для произвольных $a \in A$ и $s \in S$ получаем

$$\varphi(a \otimes_S e(s)) = as \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{sr}_1 = a \otimes_S s\overline{r}_1 - a \otimes_S s\overline{r}_1 = 0.$$

Следовательно, выполнено $\operatorname{Ker}\overline{\beta} = \operatorname{Im}\overline{\alpha} \subset \operatorname{Ker}\varphi$. Это означает, что найдётся эндоморфизм ψ группы $A \otimes_S F$ со свойством $\psi(a \otimes_S \overline{r}) = ar \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1$ для всех $a \in A$ и $r \in R$. Если $a \in \mathrm{n}_F(A)$ и $r \in R$, то

$$ar \otimes_S \overline{r}_1 = ar \otimes_S \overline{r}_1 - a \otimes_S \overline{rr}_1 = \psi(a \otimes_S \overline{r}) = \psi(0) = 0.$$

Поскольку приведённые рассуждения справедливы при любом $r_1 \in R$, имеем $ar \in \mathrm{n}_F(A)$. Итак, $\mathrm{n}_F(A)$ действительно является подмодулем в A_R.

(б) Ввиду теоремы 3.5 и предложения 3.7 выполнены соотношения

$$A \otimes_R G = A \otimes_R (R \otimes_S F) \cong (A \otimes_R R) \otimes_S F \cong A \otimes_S F,$$

причём изоморфизм $A \otimes_R G \overset{\varepsilon}{\cong} A \otimes_S F$ осуществляется с помощью равенства $\varepsilon\big(a \otimes_R (r \otimes_S f)\big) = ar \otimes_S f$. Поэтому для произвольного $a \in A$ имеем

$$a \in \mathrm{n}_G(A) \iff a \otimes_R (r \otimes_S f) = 0 \text{ для любых } r \in R \text{ и } f \in F \iff$$
$$\iff ar \otimes_S f = 0 \text{ для любых } r \text{ и } f \iff ar \in \mathrm{n}_F(A) \text{ для любого } r.$$

Отсюда следует равенство $\mathrm{n}_G(A) = \big\{a \in A \bigm| aR \subset \mathrm{n}_F(A)\big\}$. В силу пункта (а) модуль $\mathrm{n}_F(A)$ является R-подмодулем в A, так что $\mathrm{n}_G(A) = \mathrm{n}_F(A)$. ■

Теорема 10.7. *Для всякого модуля* $A \in \text{mod-}R$ *выполнены равенства* $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_G(A) = \mathrm{W}_F(A)$. *В частности,* $\mathrm{W} \in \mathcal{IR}(R)$.

Доказательство. Убедимся, что для всякого ординала β справедливо равенство $\mathrm{n}_F^\beta(A) = \mathrm{n}_G^\beta(A)$, пользуясь трансфинитной индукцией.

Если $\beta = 0$, то имеем верное равенство $A = A$. Пусть для ординальных чисел, меньших β (где $\beta > 0$), нужное равенство выполнено. Если $\beta = \alpha + 1$, то $\mathrm{n}_F^\alpha(A) = \mathrm{n}_G^\alpha(A)$; напомним, что $\mathrm{n}_G^\alpha(A)$ является подмодулем в A_R. Отсюда ввиду предыдущей теоремы имеем $\mathrm{n}_F^\beta(A) = \mathrm{n}_F(\mathrm{n}_F^\alpha(A)) = \mathrm{n}_G(\mathrm{n}_G^\alpha(A)) = \mathrm{n}_G^\beta(A)$.

Предположим теперь, что β есть ненулевой предельный ординал. Поскольку для каждого $\alpha < \beta$ подмодули $\mathrm{n}_F^{\alpha}(A)$ и $\mathrm{n}_G^{\alpha}(A)$ совпадают, то будут совпадать также и подмодули $\mathrm{n}_F^{\beta}(A)$ и $\mathrm{n}_G^{\beta}(A)$ модуля A.

Из $\mathrm{W}_F = \widehat{\mathrm{n}}_F$ и $\mathrm{W}_G = \widehat{\mathrm{n}}_G$ теперь получается равенство $\mathrm{W}_F(A) = \mathrm{W}_G(A)$. Отсюда $\mathrm{W}_F(A) \in \text{mod-}R$; из включения $\mathrm{W}_F(A) \in {}^{\otimes}\{F\}$ вытекает, что $\mathrm{W}_F(A)$ есть T(e)-модуль. Поэтому $\mathrm{W}_F(A) \subset \mathrm{W}(A)$, а значит, $\mathrm{W}(A) = \mathrm{W}_F(A)$. ■

Определение 10.8. Пусть A есть правый R-модуль. Его E*-радикалом* назовём пересечение $\mathrm{H}(A)$ всех R-подмодулей B модуля A таких, что A/B — E(e)-модуль.

Сравнивая определения модулей $\mathrm{H}_V(A)$ и $\mathrm{H}(A)$ и учитывая включение $\mathcal{E} \subset \{V\}^{\downarrow}$, получаем, что $\mathrm{H}_V(A) \subset \mathrm{H}(A)$. Ниже будет показано, что на самом деле имеет место равенство. Для этого докажем, что V-след $\mathrm{tr}_V(A)$ является не только S-подмодулем, но и R-подмодулем в A_R.

Положим $U = V \otimes_S R$. Как мы знаем из теоремы 3.5, группу U можно естественным образом превратить в правый R-модуль; этот R-модуль задаёт в mod-R идемпотентный предрадикал tr_U и идемпотентный радикал H_U.

Теорема 10.9. *Пусть A — R-модуль. Тогда*:

(а) $\mathrm{tr}_V(A)$ *является R-подмодулем в A*;

(б) $\mathrm{tr}_V(A) = \mathrm{tr}_U(A)$.

Доказательство. (а) Для элементов модуля $V = R/e(S) \in \text{mod-}S$ мы будем использовать обозначения $\overline{r}$, $\overline{r}_1$ и т. д. Пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(V, A)$. Возьмём произвольные элементы $\varphi(\overline{r}_1) \in \operatorname{Im} \varphi$ и $r_2 \in R$. Полагая $\psi(r) = \varphi(\overline{r})$ для всех $r \in R$, мы получаем гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}_S(R, A)$. Определим отображение $\chi\colon R \to A$ равенством $\chi(r) = \psi(r_1)r - \psi(r_1 r)$, где $r \in R$. Аддитивность этого отображения очевидна. Далее, для произвольного элемента $s \in S$ выполнены соотношения

$$\chi(rs) = \psi(r_1)rs - \psi(r_1 rs) = \big(\psi(r_1)r - \psi(r_1 r)\big)s = \chi(r)s;$$

следовательно, $\chi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$. Кроме того, для произвольного $s \in S$ имеем $\chi(e(s)) = \psi(r_1)s - \psi(r_1 s) = 0$, а значит, $e(S) \subset \operatorname{Ker}\chi$. Поэтому можно задать гомоморфизм S-модулей $\overline{\chi}\colon V \to A$, полагая $\overline{\chi}(\overline{r}) = \chi(r)$ для каждого $r \in R$. Из $\chi(r_2) = \psi(r_1)r_2 - \psi(r_1 r_2)$ получаем $\psi(r_1)r_2 = \chi(r_2) + \psi(r_1 r_2)$, отсюда

$$\varphi(\overline{r}_1)r_2 = \psi(r_1)r_2 \in \operatorname{Im}\chi + \operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\overline{\chi} + \operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{tr}_V(A).$$

Итак, для всякого S-гомоморфизма $\varphi\colon V \to A$ выполнено $(\operatorname{Im}\varphi)R \subset \operatorname{tr}_V(A)$. Тогда $\operatorname{tr}_V(A)R \subset \operatorname{tr}_V(A)$, а это и значит, что $\operatorname{tr}_V(A)$ — подмодуль в A_R.

(б) По теореме 3.6 и предложению 3.7 получаем

$$\operatorname{Hom}_S(V, A) \cong \operatorname{Hom}_S(V, \operatorname{Hom}_R(R, A)) \cong \operatorname{Hom}_R(U, A),$$

причём изоморфизм $\varepsilon\colon \operatorname{Hom}_S(V, A) \to \operatorname{Hom}_R(U, A)$, как несложно убедиться, задаётся посредством равенства $\big[\varepsilon(\varphi)\big](v \otimes_S r) = \varphi(v)r$, где $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(V, A)$, $v \in V$ и $r \in R$. Тогда для каждого $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(V, A)$ имеем $\operatorname{Im}\varepsilon(\varphi) = (\operatorname{Im}\varphi)R$, а значит, $\operatorname{tr}_U(A) = \operatorname{tr}_V(A)R$. Ввиду пункта (а) мы получаем, что справедливо соотношение $\operatorname{tr}_V(A) = \operatorname{tr}_U(A)$. ■

Теорема 10.10. *Для всякого модуля* $A \in \text{mod-}R$ *выполнены равенства* $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_U(A) = \mathrm{H}_V(A)$. *В частности,* $\mathrm{H} \in \mathcal{IR}(R)$.

Доказательство. По трансфинитной индукции легко установить, что модули $\overline{\operatorname{tr}}_V(A)$ и $\overline{\operatorname{tr}}_U(A)$ совпадают; иначе говоря, выполнено $\mathrm{H}_V(A) = \mathrm{H}_U(A)$ (ср. с доказательством теоремы 10.7). Отсюда имеем $\mathrm{H}_V(A) \in \text{mod-}R$; далее, из $A/\mathrm{H}_V(A) \in \{V\}^{\downarrow}$ вытекает, что $A/\mathrm{H}_V(A)$ — E(e)-модуль. Таким образом, $\mathrm{H}(A) \subset \mathrm{H}_V(A)$, откуда следует равенство $\mathrm{H}(A) = \mathrm{H}_V(A)$. ■

Теоремы 10.7 и 10.10 дают следующий результат: как бы мы ни задали R-модульную структуру на S-модуле A (для фиксированного гомоморфизма $e\colon S \to R$ и при условии, что такая структура согласована с уже имеющейся S-модульной), модули $\mathrm{W}(A)$ и $\mathrm{H}(A)$ будут одними и теми же. Проще говоря, чтобы узнать, как действуют радикалы W и H категории mod-R, достаточно выяснить, как радикалы W_F и H_V категории mod-S действуют на S-модули, принадлежащие классу $\Theta_e(\text{mod-}R)$. Итак, справедлива

Теорема 10.11. *Подмодули* $\mathrm{W}(A)$ *и* $\mathrm{H}(A)$ *определяются* S*-модульной структурой модуля* A_R *однозначно.*

Пример 10.12. В доказательствах теоремы 10.7 и теоремы 10.10 были использованы специфические свойства S-S-бимодуля $R/e(S)$. На самом деле ситуация, которая описана в этих двух теоремах, вообще говоря, не является характерной. Другими словами, идемпотентный радикал ρ категории mod-S далеко не всегда задаёт предрадикал в категории mod-R, т. е. может найтись R-модуль A такой, что $\rho(A_S)$ не является подмодулем в A_R. Легко заметить, что для этого должно быть выполнено $\operatorname{Im} e \not\subset Z(R)$; в противном случае при любом $r \in R$ отображение $a \rightsquigarrow ar$ принадлежит группе $\operatorname{Hom}_S(A, A)$, поэтому в силу определения предрадикала справедливо включение $\rho(A)r \subset \rho(A)$.

Пусть Σ — некоторое кольцо. Положим

$$R = \begin{pmatrix} \Sigma & \Sigma \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из предложения 4.2 следует, что R является кольцом относительно обычных операций сложения и умножения матриц; при этом ясно, что S — подкольцо кольца R, а I — идеал кольца S. Положим $\rho = \mathrm{H}_I$; в качестве гомоморфизма колец e будем рассматривать вложение $S \to R$. Очевидно, $\operatorname{Hom}_S(I, R/I) = 0$, т. е. $R/I \in \mathcal{P}(\rho)$. С другой стороны, $I \in \mathcal{R}(\rho)$, а тогда ввиду предложения 2.9 имеем $\rho(R) = I$. Следовательно, $\rho(R)$ не является подмодулем в R_R, поэтому сопоставление $A_R \rightsquigarrow \rho(\Theta_e(A))$ не будет предрадикалом категории mod-R.

§11. Идемпотентные радикалы, порождаемые бимодулями

Предложение 11.1. *Пусть S — кольцо, ${}_SF_S$ — некоторый бимодуль. Тогда найдутся кольцо R и кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$, для которых бимодуль $R/e(S)$ изоморфен бимодулю F.*

Доказательство. Введём обозначение

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in S,\ f \in F \right\}.$$

Из предложения 4.5 несложно вывести, что R образует кольцо относительно матричного сложения и умножения. Полагая

$$e(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где $s \in S$, получаем гомоморфизм $e\colon S \to R$. Очевидно, что соответствие

$$\begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e(S) \leftrightsquigarrow f$$

взаимно однозначно и осуществляет изоморфизм между бимодулями $R/e(S)$ и ${}_SF_S$. Предложение доказано. ■

Несложно заметить, что описанная в доказательстве предложения 11.1 ситуация позволяет превратить любой модуль над S в R-модуль при помощи гомоморфизма $d\colon R \to S$, где

$$d\begin{pmatrix} s & f \\ 0 & s \end{pmatrix} = s.$$

Тем самым мы получаем унивалентный функтор Θ_d из mod-S в mod-R; этот функтор задаёт изоморфизм между mod-S и полной (ввиду сюръективности гомоморфизма d) подкатегорией категории mod-R. Несложно убедиться, что композиция $\Theta_e \circ \Theta_d$ есть тождественный функтор категории mod-S (отсюда, в частности, получаем, что сужение Θ_d на $\mathcal{T}$ является функтором, обратным к сужению функтора Θ_e на полную подкатегорию категории mod-R, которая состоит из всех $\mathrm{T}(e)$-модулей). Таким образом, всякий S-модуль может быть получен как притягивающий модуль из подходящего R-модуля. Поэтому для рассматриваемого гомоморфизма $e\colon S \to R$ можно говорить не только о том, что W однозначно определяется радикалом W_F, но и о том, что радикал W_F однозначно определяется радикалом W (фактически W_F представляет собой сужение радикала W на полную подкатегорию категории mod-R). Ясно, что аналогичный факт имеет место и для идемпотентных радикалов $\mathrm{H} \in \mathcal{IR}(R)$ и $\mathrm{H}_V \in \mathcal{IR}(S)$.

Далее, в рассматриваемой ситуации выполнено

$$\mathcal{T} = {}^{\otimes}\{F\} \cap \Theta_e(\text{mod-}R) = {}^{\otimes}\{F\} \cap \text{mod-}S = {}^{\otimes}\{F\}.$$

Логично задаться вопросом: при каких условиях на левый S-модуль F класс ${}^{\otimes}\{F\} \subset$ mod-S представи́м в виде класса $\mathcal{T}$ (для какого-либо гомоморфизма колец $e\colon S \to R$)? Из приведённых выше рассуждений вытекает, что это возможно, если F является S-S-бимодулем. Начало параграфа будет посвящено доказательству того факта, что всякий $\otimes$-порождённый каким-либо модулем $F \in S$-mod радикал из $\mathcal{IR}(S)$ обязательно $\otimes$-порождается также некоторым S-S-бимодулем. Отсюда мы получим, что подходящий гомоморфизм колец e существует для любого модуля ${}_SF$.

Мы докажем, что для любого левого S-модуля F выполнено равенство $\mathrm{n}_F = \mathrm{n}_{F\otimes S}$ (очевидно, что $F \otimes S$ — S-S-бимодуль). Доказательство разобьём на несколько шагов.

Предложение 11.2. *Для любых кольца S и модуля ${}_SF$ выполняется неравенство $\mathrm{n}_F \leqslant \mathrm{n}_{F\otimes S}$.*

Доказательство. Пусть A_S — некоторый модуль. В силу теоремы 3.5 существует изоморфизм абелевых групп

$$\varepsilon\colon (A \otimes_S F) \otimes S \to A \otimes_S (F \otimes S), \tag{11.1}$$

который переводит всякий элемент вида $(a \otimes_S f) \otimes s$ в элемент $a \otimes_S (f \otimes s)$. Пусть $a \in \mathrm{n}_F(A)$; в этом случае

$$a \otimes_S (f \otimes s) = \varepsilon\big((a \otimes_S f) \otimes s\big) = \varepsilon(0 \otimes s) = 0$$

для любых $f \in F$ и $s \in S$, откуда сразу получаем $a \in \mathrm{n}_{F \otimes S}(A)$. ∎

Предложение 11.3. *Если S — периодическое кольцо, то для каждого модуля ${}_SF$ выполнено $\mathrm{n}_{F \otimes S} \leqslant \mathrm{n}_F$.*

Доказательство. Ввиду предложения 5.2 циклическая подгруппа $\langle 1 \rangle$, порождаемая единичным элементом 1 кольца S, служит прямым слагаемым группы S^+; пусть ζ есть некоторая проекция группы S^+ на $\langle 1 \rangle$. Аддитивный гомоморфизм $\varphi\colon F \otimes S \to F$ зададим формулой $\varphi(f \otimes s) = \zeta(s)f$, где $f \in F$ и $s \in S$. Из $\zeta(1) = 1$ вытекает, что гомоморфизм φ сюръективен. Далее, $\mathrm{Im}\,\zeta$ содержится в центре $Z(S)$ кольца S, а значит, φ является S-гомоморфизмом левых модулей. Применяя лемму 6.6, получаем $\mathrm{n}_{F \otimes S} \leqslant \mathrm{n}_F$. ∎

Теорема 11.4. *Для произвольных кольца S и модуля ${}_SF$ выполняется равенство $\mathrm{n}_F = \mathrm{n}_{F \otimes S}$.*

Доказательство. Учитывая предложения 11.2 и 11.3, нам достаточно убедиться, что неравенство $\mathrm{n}_{F \otimes S} \leqslant \mathrm{n}_F$ имеет место, если группа S^+ является непериодической. Предположим противное: пусть для некоторого модуля A_S существует элемент $a \in A$ такой, что $a \in \mathrm{n}_{F \otimes S}(A)$ и $a \notin \mathrm{n}_F(A)$.

Обозначим $X = A \otimes_S F$, тогда в силу нашего предположения найдётся элемент $f \in F$, для которого элемент $x = a \otimes_S f$ группы X отличен от нуля. Изоморфизм (11.1) показывает, что $x \in \mathrm{n}_S(X)$, где n_S есть S-нейтрализатор, задаваемый группой S^+ в категории mod-$\mathbf{Z}$.

Обозначим $\Sigma = S/\,\mathbf{t}(S)$. Применяя лемму 6.6 к радикалу n_Σ категории mod-$\mathbf{Z}$, получаем $\mathrm{n}_S \leqslant \mathrm{n}_\Sigma$; следовательно, $x \in \mathrm{n}_\Sigma(X)$. Далее, по теореме 3.13 группа Σ есть плоский модуль над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$, отсюда $\mathrm{n}_\Sigma = \mathrm{W}_\Sigma$ (см. предложение 6.5).

Вспоминая результаты из §7, мы получаем, что содержащая элемент x группа $Y = \mathrm{n}_\Sigma(X) = \mathrm{W}_\Sigma(X)$ представляет собой прямую сумму подгрупп X_p по всем $p \in \mathbf{P}$ таким, что $p\Sigma = \Sigma$. Из сервантности подгруппы Y в группе X вытекает, что гомоморфизм $Y \otimes S \to X \otimes S$, индуцированный естественным вложением $Y \to X$, инъективен; поэтому в силу включения $x \in \mathrm{n}_S(X)$ имеем $x \in \mathrm{n}_S(Y)$. Поскольку $x \neq 0$, мы можем найти простое число p, для которого проекция $\pi\colon Y \to X_p$ удовлетворяет условию $\pi(x) \neq 0$. Из $x \in \mathrm{n}_S(Y)$ следует $\pi(x) \in \mathrm{n}_S(X_p)$.

Напомним, что $p\Sigma = \Sigma$. Рассмотрим два случая.

Пусть $pS = S$. Тогда из предложений 5.4 и 5.6 следует, что A, а значит, и X есть модуль над кольцом $\mathbf{Q}^{(p)}$, что противоречит неравенству $X_p \neq 0$.

Пусть выполняется неравенство $pS \neq S$. Группы Σ и $\mathbf{t}(S)/S_p$ являются p-делимыми; следовательно, p-делимой является также и аддитивная группа кольца S/S_p (таким образом, $S_p \neq 0$). Применяя лемму 5.5, получаем прямое разложение (5.1); пусть b — единичный элемент кольца S_p, а характеристика этого кольца равна p^k. Из предложения 5.2 следует, что циклическая группа $B = \langle b \rangle$, имеющая порядок p^k, есть гомоморфный образ группы S_p, а значит, и группы S^+. Применяя лемму 6.6, для радикалов n_B и n_S категории mod-$\mathbf{Z}$ получаем неравенство $\mathrm{n}_S \leqslant \mathrm{n}_B$. Отсюда $\pi(x) \in \mathrm{n}_B(X_p)$.

Заметим, что F является S-$Z(S)$-бимодулем; значит, ввиду теоремы 3.5 группа X является модулем над кольцом $Z(S)$. Далее, применяя к кольцу S лемму 5.5, приходим к прямому разложению (5.2). Из равенства $p^k Z(S_p) = 0$ и p-делимости идеала $Z(S')$ вытекает, что элемент $p^k \cdot 1_S$ имеет бесконечную p-высоту в $Z(S)$. Отсюда (по лемме 5.3) следует $p^k X_p = 0$. Это означает, что эпиморфизм $\varphi\colon X_p \to X_p \otimes B$, переводящий каждый элемент $u \in X_p$ в $u \otimes b$, является изоморфизмом (так как $\operatorname{Ker}\varphi = p^k X_p$ [30]). Тогда из $\pi(x) \in \mathrm{n}_B(X_p)$ получаем $\pi(x) = \varphi^{-1}(\pi(x) \otimes b) = \varphi^{-1}(0) = 0$ — противоречие. ■

Теорема 11.5. *Пусть S — кольцо. Тогда*:

(а) *для всякого модуля* ${}_SF$ *выполнено* ${}^{\otimes}\{F\} = {}^{\otimes}\{F \otimes S\}$ *и* $\mathrm{W}_F = \mathrm{W}_{F\otimes S}$;

(б) *каждый* $\otimes$*-порождённый каким-нибудь классом* S*-модулей радикал из* $\mathcal{IR}(S)$ *будет* $\otimes$*-порождён также некоторым классом* S*-*S*-бимодулей.*

Доказательство. (а) В силу теоремы 11.4 имеем равенства

$$\mathcal{R}(\mathrm{W}_F) = {}^{\otimes}\{F\} = \mathcal{R}(\mathrm{n}_F) = \mathcal{R}(\mathrm{n}_{F\otimes S}) = {}^{\otimes}\{F \otimes S\} = \mathcal{R}(\mathrm{W}_{F\otimes S}),$$

а значит, $\mathrm{W}_F = \mathrm{W}_{F\otimes S}$.

(б) Пусть $\mathcal{F}$ есть класс левых S-модулей. Через $\mathcal{F} \otimes S$ обозначим класс всех S-S-бимодулей $F \otimes S$, где $F \in \mathcal{F}$. Из пункта (а) следует, что модуль A_S удовлетворяет равенству $A \otimes_S F = 0$ при любом $F \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $A \otimes_S (F \otimes S) = 0$ для всякого $F \in \mathcal{F}$. Отсюда находим ${}^{\otimes}\mathcal{F} = {}^{\otimes}(\mathcal{F} \otimes S)$ и, далее, $\mathrm{W}_{\mathcal{F}} = \mathrm{W}_{\mathcal{F}\otimes S}$. ■

Итак, для всякого левого модуля F радикальный класс ${}^{\otimes}\{F\} \subset \text{mod-}S$ совпадает с классом $\mathcal{T}$, соответствующим подходящему гомоморфизму колец $e\colon S \to R$. Действительно, в силу теоремы 11.5 достаточно положить

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} s & x \\ 0 & s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in S,\, x \in F \otimes S \right\}, \qquad e(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

В связи с приведёнными после предложения 11.1 рассуждениями будет естественно поставить вопрос, аналогичный вышерассмотренному: при каких условиях Hom-радикал H_V категории $\text{mod-}S$ порождается не только правым S-модулем V, но и каким-либо S-S-бимодулем? Чуть ниже мы докажем, что «наиболее подходящим» будет бимодуль $S \otimes V$ (S-S-бимодульная структура на нём вводится естественным образом).

Лемма 11.6. *Если для модуля* V_S *и бимодуля* ${}_SB_S$ *выполнено условие* $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, B) = 0$, *то* $\mathrm{Hom}_S(V, B) = 0$.

Доказательство. Пусть выполнено $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, B) = 0$, тогда в силу теоремы 3.6 справедливо равенство $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}_S(V, B)) = 0$. Однако B есть

S-S-бимодуль, поэтому $\mathrm{Hom}_S(V, B)$ является левым модулем над кольцом S, а значит, гомоморфным образом прямой суммы семейства копий группы S^+. Это возможно лишь в случае $\mathrm{Hom}_S(V, B) = 0$. Лемма доказана. ■

Теорема 11.7. *Для модуля* $V \in \text{mod-}S$ *эквивалентны условия*:

1) *существует* S-S*-бимодуль* U *такой, что* $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$;

2) $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$;

3) $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$;

4) *радикал* H_V *порождается некоторым классом* S-S*-бимодулей*;

5) *для любого модуля* A_S *и* $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ *из* $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ *следует равенство* $X = 0$.

Доказательство. Импликации 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 4), очевидно, выполняются. Для удобства ниже используем обозначение $\rho = \mathrm{H}_{S\otimes V}$.

3) $\Rightarrow$ 2). Из $\rho(V) = V$ следует $\mathrm{H}_V \leqslant \rho$. Пусть $A \in \{V\}^{\downarrow}$, тогда

$$\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, A) \cong \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}_S(V, A)) = \mathrm{Hom}(S, 0) = 0,$$

т. е. $A \in \{S \otimes V\}^{\downarrow}$. Из включения $\{V\}^{\downarrow} \subset \{S \otimes V\}^{\downarrow}$ вытекает $\mathrm{H}_V \geqslant \rho$, отсюда получаем $\rho = \mathrm{H}_V$.

5) $\Rightarrow$ 2). В силу теоремы 3.6 и равносильности равенств $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ и $X = 0$ условие $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, A) = 0$ эквивалентно условию $\mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$. Таким образом, $\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{P}(\mathrm{H}_V)$, поэтому $\rho = \mathrm{H}_V$.

2) $\Rightarrow$ 5). Надо провести в обратном порядке рассуждения, приведённые в доказательстве импликации 5) $\Rightarrow$ 2).

4) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\mathrm{H}_V = \mathrm{H}_{\mathcal{B}}$, где $\mathcal{B}$ есть какой-либо класс бимодулей; тогда для произвольного ${}_SB_S \in \mathcal{B}$ имеем $B \in \mathcal{R}(\mathrm{H}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{R}(\mathrm{H}_V)$. Введём обозначение $C = \rho(B)$. Из определения предрадикала получаем, что подмодуль C вполне инвариантен в B_S и, значит, является подбимодулем в ${}_SB_S$. Имеем равенство $\rho(B/C) = 0$, отсюда $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, B/C) = 0$. Применяя к S-S-бимодулю B/C лемму 11.6, находим $\mathrm{Hom}_S(V, B/C) = 0$, а значит, $B/C \in \mathcal{P}(\mathrm{H}_V)$.

С другой стороны, из замкнутости радикальных классов относительно гомоморфных образов следует $B/C \in \mathcal{R}(\mathrm{H}_V)$. Получаем, что $\rho(B) = C = B$. Так как для всякого $B \in \mathcal{B}$ выполнено $B \in \mathcal{R}(\rho)$, имеем $\mathrm{H}_{\mathcal{B}} \leqslant \rho$, т. е. $\mathrm{H}_V \leqslant \rho$. Из последнего соотношения непосредственно вытекает $\rho(V) = V$. Тем самым теорема полностью доказана. ■

Теорема 11.8. *Для кольца S эквивалентны следующие условия*:

1) *для всякого V_S существует бимодуль ${}_SU_S$ такой, что* $\mathrm{H}_U = \mathrm{H}_V$;

2) *для всякого V_S выполнено* $\mathrm{H}_{S\otimes V} = \mathrm{H}_V$;

3) *для всякого V_S выполнено* $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$;

4) *для всякого V_S идемпотентный радикал H_V порождён подходящим классом S-S-бимодулей*;

5) *если $A, V \in \text{mod-}S$ и $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$, то равенство* $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ *влечёт равенство $X = 0$*;

6) *в категории* mod-S *каждый идемпотентный радикал порождается подходящим классом S-S-бимодулей*;

7) *для всякого $V_S \neq 0$ выполнено* $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0$.

Доказательство. Эквивалентность первых пяти условий имеет место в силу теоремы 11.7; импликация 6) $\Rightarrow$ 4) очевидна.

2) $\Rightarrow$ 6). Всякий идемпотентный радикал категории mod-S представи́м в виде $\mathrm{H}_{\mathcal{V}}$, где $\mathcal{V}$ — подходящий класс правых S-модулей. Через $S \otimes \mathcal{V}$ будем обозначать класс бимодулей $\{S \otimes V \mid V \in \mathcal{V}\}$. В этом случае $\mathrm{H}_{S\otimes\mathcal{V}}$ ($\mathrm{H}_{\mathcal{V}}$) есть наименьший из всех радикалов $\rho \in \mathcal{IR}(S)$ таких, что каждый модуль $V \in \mathcal{V}$ обладает свойством $\mathrm{H}_{S\otimes V} \leqslant \rho$ (соответственно $\mathrm{H}_V \leqslant \rho$). Тогда из 2) вытекает равенство $\mathrm{H}_{S\otimes\mathcal{V}} = \mathrm{H}_{\mathcal{V}}$.

5) $\Rightarrow$ 7). Положим $A_S = V_S \neq 0$, тогда $X = \mathrm{End}\, V_S \neq 0$. Поэтому в силу условия 5) получаем неравенство $\mathrm{Hom}(S, X) \neq 0$.

7) $\Rightarrow$ 3). Пусть $V' = V/\mathrm{H}_{S\otimes V}(V)$, тогда имеем равенство $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V') = 0$. Модуль $S \otimes V \in \text{mod-}S$ имеет $S \otimes V'$ своим гомоморфным образом, поэтому

из $\operatorname{Hom}_S(S \otimes V, V') = 0$ и теоремы 3.6 следует

$$0 = \operatorname{Hom}_S(S \otimes V', V') \cong \operatorname{Hom}(S, \operatorname{Hom}_S(V', V')) = \operatorname{Hom}(S, \operatorname{End} V'_S),$$

что ввиду 7) возможно лишь при $V' = 0$. Отсюда $\mathrm{H}_{S\otimes V}(V) = V$. ■

Определение 11.9. Всякое удовлетворяющее равносильным условиям теоремы 11.8 кольцо S будем называть *правым* br-*кольцом* (от слов bimodule и radical). Аналогично определяется левое br-кольцо.

Таким образом, если S — правое br-кольцо, то для каждого модуля V_S класс $\{V\}^{\downarrow} \subset \text{mod-}S$ совпадает с классом $\mathcal{E}$, соответствующим подходящему гомоморфизму колец $e\colon S \to R$. С учётом теоремы 11.8 для этого достаточно задать R и e условиями

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} s & x \\ 0 & s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in S,\, x \in S \otimes V \right\}, \qquad e(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Логично будет поставить вопросы, двойственные к уже рассмотренным в теоремах 11.7 и 11.8. Пусть $\mathcal{X} \subset \text{mod-}S$. Обозначим

$$\mathcal{X}^{\uparrow} = \{V \in \text{mod-}S \mid \operatorname{Hom}(V, A) = 0 \text{ при всех } A \in \mathcal{X}\}.$$

Тогда $\mathcal{X}^{\uparrow}$ — радикальный класс, а соответствующий этому классу (в смысле предложения 2.6) идемпотентный радикал $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$ является наибольшим из всех радикалов $\rho \in \mathcal{IR}(S)$, обладающих свойством $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(\rho)$ [49]. Следовательно, условия $\mathcal{X} \subset \mathcal{P}(\rho)$ и $\mathrm{K}_{\mathcal{X}} \geqslant \rho$ являются равносильными для любых $\rho \in \mathcal{IR}(S)$ и $\mathcal{X} \subset \text{mod-}S$. Мы будем говорить, что радикал $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$ *копорождён* классом $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{X} = \{A\}$, то пишем просто K_A; будем говорить, что K_A копорождается модулем A. Очевидно, что любой радикал $\rho \in \mathcal{IR}(S)$ представи́м в виде $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$; для этого достаточно положить $\mathcal{X} = \mathcal{P}(\rho)$.

Пусть A — правый S-модуль. Введём обозначения

$$B_C = (S \otimes C)/\,\mathrm{K}_A(S \otimes C), \qquad A' = \prod_{C \subset A} B_C$$

(здесь C пробегает множество всех подмодулей модуля A). Модуль $(S \otimes C)_S$ обладает структурой S-S-бимодуля; тогда (см. доказательство теоремы 11.7) подмодуль $\mathrm{K}_A(S \otimes C)$ является подбимодулем. Итак, всякому модулю A_S мы определённым образом сопоставили S-S-бимодуль A'.

Теорема 11.10. *Для модуля* $A \in \text{mod-}S$ *эквивалентны условия*:

1) *существует* S-S*-бимодуль* B *такой, что* $\mathrm{K}_B = \mathrm{K}_A$;

2) $\mathrm{K}_{A'} = \mathrm{K}_A$;

3) $\mathrm{Hom}_S(S \otimes C, A) \neq 0$ *для любого ненулевого подмодуля* $C \subset A$;

4) K_A *копорождается некоторым классом* S-S*-бимодулей*;

5) *для любого модуля* V_S *и* $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ *из* $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ *следует равенство* $X = 0$.

Доказательство. Импликации 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 4) очевидны.

4) $\Rightarrow$ 5). Допустим, что $\mathrm{K}_A = \mathrm{K}_{\mathcal{B}}$, где $\mathcal{B}$ — какой-либо класс бимодулей. Пусть для $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$ выполнено $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$. Тогда из теоремы 3.6 вытекает $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, A) = 0$. Из соотношений $\{A\}^{\uparrow} = \mathcal{R}(\mathrm{K}_A) = \mathcal{R}(\mathrm{K}_{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}^{\uparrow}$ получаем, что $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, B) = 0$ для любого $B \in \mathcal{B}$. Учитывая лемму 11.6, мы можем заключить, что для каждого $B \in \mathcal{B}$ выполняется $\mathrm{Hom}_S(V, B) = 0$. Это приводит нас к включению $V \in \mathcal{B}^{\uparrow} = \{A\}^{\uparrow}$, т. е. $X = \mathrm{Hom}_S(V, A) = 0$.

5) $\Rightarrow$ 3). Для ненулевого подмодуля $C \subset A$ имеем $X = \mathrm{Hom}_S(C, A) \neq 0$. Поэтому в силу условия 5) справедливы соотношения

$$\mathrm{Hom}_S(S \otimes C, A) \cong \mathrm{Hom}(S, \mathrm{Hom}_S(C, A)) = \mathrm{Hom}(S, X) \neq 0.$$

3) $\Rightarrow$ 2). Для любого подмодуля C модуля A выполняется $B_C \in \mathcal{P}(\mathrm{K}_A)$, поэтому $A' \in \mathcal{P}(\mathrm{K}_A)$. Отсюда получаем $\mathrm{K}_{A'} \geqslant \mathrm{K}_A$.

Пусть $V \notin \{A\}^{\uparrow}$, т. е. существует ненулевой S-гомоморфизм $\varphi\colon V \to A$. Обозначим $C = \mathrm{Im}\,\varphi$. В силу условия 3) имеем $\mathrm{Hom}_S(S \otimes C, A) \neq 0$, поэтому $S \otimes C \notin \mathcal{R}(\mathrm{K}_A)$. Таким образом, $B_C \neq 0$. Пусть $\overline{s \otimes c} = s \otimes c + \mathrm{K}_A(S \otimes C)$ — ненулевой элемент из B_C. Нетрудно показать, что отображение $v \rightsquigarrow \overline{s \otimes \varphi(v)}$

из V в B_C есть S-модульный гомоморфизм. Это значит, что $\mathrm{Hom}_S(V, A') \neq 0$ и, далее, $V \notin \{A'\}^{\uparrow}$. Итак, $\{A'\}^{\uparrow} \subset \{A\}^{\uparrow}$, т. е. $\mathcal{R}(\mathrm{K}_{A'}) \subset \mathcal{R}(\mathrm{K}_A)$. Отсюда ясно, что $\mathrm{K}_{A'} \leqslant \mathrm{K}_A$; следовательно, $\mathrm{K}_{A'} = \mathrm{K}_A$. ■

Замечание. Из доказательства импликации 3) ⇒ 2) ясно, что теорема была бы справедлива также и в том случае, если бы через A' мы обозначили не прямое произведение бимодулей B_C, а их прямую сумму.

Некоторая двойственность, связывающая теорему 11.7 и теорему 11.10, даёт интересное следствие. Оказывается, что теорема 11.8 и двойственная ей теорема 11.11 описывают один и тот же класс колец; это немедленно следует из того факта, что условия 5) этих теорем совпадают.

Теорема 11.11. *Для кольца S эквивалентны следующие условия*:

1) *для любого A_S существует бимодуль ${}_SB_S$ такой, что* $\mathrm{K}_B = \mathrm{K}_A$;

2) *для любого A_S выполнено* $\mathrm{K}_{A'} = \mathrm{K}_A$;

3) *если* $0 \neq C_S \subset A_S$, *то* $\mathrm{Hom}_S(S \otimes C, A) \neq 0$;

4) *для любого A_S идемпотентный радикал K_A копорождён некоторым классом S-S-бимодулей*;

5) *если* $A, V \in \text{mod-}S$ *и* $X = \mathrm{Hom}_S(V, A)$, *то равенство* $\mathrm{Hom}(S, X) = 0$ *влечёт равенство* $X = 0$;

6) *в категории* $\text{mod-}S$ *любой идемпотентный радикал копорождается некоторым классом S-S-бимодулей.*

Доказательство. Из теоремы 11.10 вытекает эквивалентность первых пяти условий; импликация 6) ⇒ 4) очевидна.

2) ⇒ 6). Каждый радикал из $\mathcal{IR}(S)$ имеет вид $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$, где $\mathcal{X}$ — некоторый класс правых S-модулей. Далее, через $\mathcal{X}'$ обозначим класс всех бимодулей A' таких, что $A \in \mathcal{X}$. Тогда $\mathrm{K}_{\mathcal{X}}$ ($\mathrm{K}_{\mathcal{X}'}$) — наибольший среди всех идемпотентных радикалов ρ таких, что $\mathrm{K}_A \geqslant \rho$ (соответственно $\mathrm{K}_{A'} \geqslant \rho$) для всякого $A \in \mathcal{X}$. Поскольку в силу условия 2) для всякого модуля A_S выполняется $\mathrm{K}_{A'} = \mathrm{K}_A$, приходим к равенству $\mathrm{K}_{\mathcal{X}'} = \mathrm{K}_{\mathcal{X}}$. ■

Добавим к эквивалентным условиям теорем 11.8 и 11.11 ещё одно.

Теорема 11.12. *Для кольца S эквивалентны следующие условия*:

1) S — *правое* br-*кольцо*;

2) *если идемпотентный радикал категории* mod-S *порождён классом S-S-бимодулей, то он копорождён некоторым классом S-S-бимодулей.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из теорем 11.8 и 11.11.

2) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что S не является правым br-кольцом; через V обозначим модуль, отличный от 0 и опровергающий условие 7) теоремы 11.8. Для него справедливо равенство $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, V) = 0$, поэтому для радикала $\rho = \mathrm{H}_{S \otimes V}$, порождённого S-S-бимодулем $S \otimes V$, выполнено $V \in \mathcal{P}(\rho)$. В силу условия 2) имеем $\rho = \mathrm{K}_{\mathcal{B}}$, где $\mathcal{B}$ есть некоторый класс S-S-бимодулей.

Из условия $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\rho)$ следует, что $\mathrm{Hom}_S(S \otimes V, B) = 0$ для всех $B \in \mathcal{B}$. Применяя теперь лемму 11.6, мы получаем, что при любом $B \in \mathcal{B}$ выполнено $\mathrm{Hom}_S(V, B) = 0$. Следовательно, имеем $V \in \mathcal{B}^{\uparrow} = \mathcal{R}(\mathrm{K}_{\mathcal{B}})$, а это противоречит условию $V \in \mathcal{P}(\rho) = \mathcal{P}(\mathrm{K}_{\mathcal{B}})$. Теорема доказана. ■

§12. br-кольца

В настоящем параграфе мы выделим ряд достаточно широких классов колец, являющихся правыми (и левыми) br-кольцами. Окончание параграфа будет посвящено построению примеров колец, которые не являются правыми или левыми br-кольцами. Ясно, что для всех результатов будут справедливы и левые аналоги.

Предложение 12.1. *Все коммутативные кольца являются правыми* br-*кольцами.*

Доказательство. Пусть кольцо S коммутативно. Тогда любой модуль над кольцом S допускает S-S-бимодульную структуру, поэтому выполняется условие 1) теоремы 11.8. Отсюда следует, что S — правое br-кольцо. ■

Выясняя, является ли то или иное кольцо S правым br-кольцом, далее будем либо использовать лемму 12.2, либо проверять, что для любого $V_S \neq 0$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Hom}(S, \operatorname{End} V_S) \neq 0. \tag{12.1}$$

Лемма 12.2. *Если существует групповой гомоморфизм* $\zeta\colon S \to Z(S)$, *для которого* $1 \in \operatorname{Im}\zeta$, *то* S *является правым* br-*кольцом.*

Доказательство. Пусть V_S — ненулевой модуль. Гомоморфизм групп $\varphi\colon S \to \operatorname{End} V_S$ зададим формулой $\big[\varphi(s)\big](v) = v\zeta(s)$. Из включения $1 \in \operatorname{Im}\zeta$ следует, что тождественный эндоморфизм id_V модуля V_S содержится в $\operatorname{Im}\varphi$. Поэтому $\varphi \neq 0$, так что условие (12.1) выполнено. ■

Теорема 12.3. *Пусть* $\pi\colon R \to S$ *есть сюръективный кольцевой гомоморфизм, и пусть* V_S *— ненулевой модуль, для которого неравенство* (12.1) *не выполнено. Если*

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{Ker}\pi, \operatorname{End} V_S) = 0, \tag{12.2}$$

то R *не является правым* br-*кольцом.*

Доказательство. Обозначим кольцо $\operatorname{End} V_S$ через Σ. Гомоморфизм π позволяет наделить V структурой правого R-модуля; в силу сюръективности этого гомоморфизма справедливо соотношение $\operatorname{End} V_R = \Sigma$. Индуцированная точной последовательностью групп

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} \pi \longrightarrow R \xrightarrow{\pi} S \longrightarrow 0$$

последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(S, \Sigma) \longrightarrow \operatorname{Hom}(R, \Sigma) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Ker} \pi, \Sigma) \tag{12.3}$$

также является точной, поэтому из равенств $\operatorname{Hom}(S, \Sigma) = \operatorname{Hom}(\operatorname{Ker} \pi, \Sigma) = 0$ вытекает $\operatorname{Hom}(R, \operatorname{End} V_R) = \operatorname{Hom}(R, \Sigma) = 0$. Это означает, что R не является правым br-кольцом. ■

Теорема 12.4. (а) *Прямое произведение всякого конечного семейства правых* br*-колец является правым* br*-кольцом.*

(б) *Пусть $n \in \mathbf{N}$. Кольцо S является правым* br*-кольцом в точности тогда, когда таковым является S^n.*

Доказательство. (а) Очевидно, достаточно будет рассмотреть случай произведения двух колец. Пусть справедливо прямое разложение $R = S \oplus S'$ кольца R в сумму каких-нибудь идеалов, являющихся правыми br-кольцами. Если R не является правым br-кольцом, то существует модуль $U_R \neq 0$ такой, что $\operatorname{Hom}(R, \operatorname{End} U_R) = 0$.

Справедливо R-модульное прямое разложение $U = Ue \oplus Ue'$, где e и e' суть единицы колец S и S'. Хотя бы один из модулей Ue и Ue' отличен от 0; можно считать, что этим свойством обладает модуль $V = Ue$. Очевидно, что модуль V_R является правым S-модулем, причём выполнено $\operatorname{End} V_S = \operatorname{End} V_R$. Ввиду предложения 4.1 группа $(\operatorname{End} U_R)^+$ обладает прямым слагаемым, изоморфным группе $(\operatorname{End} V_S)^+$. Тогда $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{End} V_S)$ есть группа, изоморфная прямому слагаемому группы $\operatorname{Hom}(R, \operatorname{End} U_R) = 0$. Итак, V не удовлетворяет условию (12.1). Получили противоречие с тем, что S есть br-кольцо.

(б) Одна из импликаций очевидна ввиду пункта (а). Предположим, что $R = S^n$ — правое br-кольцо; покажем, что тем же свойством обладает S.

Предположим, что это не так, т. е. для какого-то ненулевого модуля V_S условие (12.1) не выполнено. Ясно, что существует сюръективный кольцевой гомоморфизм $\pi\colon R \to S$ такой, что $\operatorname{Ker}\pi$ есть прямая сумма $n-1$ копий S^+, а значит, выполнено равенство (12.2). Применяя теорему 12.3, получаем, что R не является правым br-кольцом — противоречие. ■

Замечание. Пусть S не является правым br-кольцом (примеры таких колец S приводятся в конце этого параграфа). Для кольца $R = \mathbf{Z} \times S$ имеем $Z(R) = \mathbf{Z} \times Z(S)$. Определённый формулой $\zeta(z, s) = (z, z \cdot 1_S)$ гомоморфизм $\zeta \in \operatorname{Hom}(R, Z(R))$ обладает свойством $1_R = \zeta(1_R) \in \operatorname{Im}\zeta$. В силу леммы 12.2 отсюда следует, что R — правое br-кольцо. Итак, ни факторкольцо, ни даже прямое слагаемое правого br-кольца не обязано быть правым br-кольцом.

Теорема 12.5. *«Быть правым* br*-кольцом» — инвариантное в смысле Мориты свойство.*

Доказательство. Пусть S — правое br-кольцо, и пусть кольца S и R эквивалентны в смысле Мориты. Тогда мы можем считать, что $R = \operatorname{End} A_S$, где A_S — конечно порождённый проективный образующий категории mod-S (см. [28, 46]). Зафиксируем ненулевой модуль U_R. Пусть $\Theta\colon \text{mod-}R \to \text{mod-}S$ есть категорная эквивалентность, тогда для кольца $\Sigma = \operatorname{End} U_R$ выполняется $\Sigma \cong \operatorname{End} V_S$, где $V = \Theta(U) \neq 0$ [46]. Ввиду (12.1) имеем $\operatorname{Hom}(S, \Sigma) \neq 0$.

Пусть $\varphi\colon S \to \Sigma$ есть ненулевой групповой гомоморфизм. Так как A — образующий в mod-S, то модуль S_S является гомоморфным образом прямой суммы копий модуля A. Тогда найдётся групповой гомоморфизм α из A в S, для которого выполняется $\varphi\alpha \neq 0$. Зафиксируем элемент $a \in A$ со свойством $\varphi(\alpha(a)) \neq 0$. Для группового гомоморфизма $\varphi'\colon R \to \Sigma$, заданного формулой $\varphi'(r) = [\varphi\alpha r](a)$, имеем $\varphi'(\mathrm{id}_A) \neq 0$. Итак, $\operatorname{Hom}(R, \Sigma) \neq 0$, т. е. R есть правое br-кольцо, что и требовалось. ■

Лемма 12.6. *Пусть модуль* $V_S \neq 0$ *не удовлетворяет условию* (12.1). *Тогда* $\operatorname{End} V_S$ *есть кольцо без кручения.*

Доказательство. Положим $\Sigma = \operatorname{End} V_S$; пусть для какого-либо числа $p \in \mathbf{P}$ выполняется $\Sigma_p \neq 0$. Это значит, что в V найдётся элемент порядка p. В силу предложения 5.4 последнее возможно лишь при условии, что $pS \neq S$. Тогда S/pS есть ненулевая p-ограниченная группа; следовательно, S^+ имеет группу $\mathbf{Z}(p)$ своим гомоморфным образом. Отсюда получаем $\operatorname{Hom}(S, \Sigma) \neq 0$, что противоречит условию леммы. ∎

Заметим, что для каждого кольца S подгруппы $\mathbf{t}(S)$ и $\mathbf{d}(S)$ группы S^+ являются идеалами в S.

Теорема 12.7. *Если* R *есть правое* br*-кольцо и* $\mathbf{t}(R) \neq R$, *то* $R/\,\mathbf{t}(R)$ *также является правым* br*-кольцом.*

Доказательство. Пусть $S = R/\,\mathbf{t}(R)$ не является правым br-кольцом, т. е. для некоторого $V_S \neq 0$ нарушено условие (12.1). Из леммы 12.6 ясно, что $\operatorname{End} V_S$ есть кольцо без кручения. Для естественного эпиморфизма $\pi\colon R \to S$ имеем $\operatorname{Ker} \pi = \mathbf{t}(R)$, а значит, выполняется равенство (12.2). По теореме 12.3 получаем, что R не является правым br-кольцом — противоречие. ∎

Теорема 12.8. *Всякое кольцо* S, *имеющее ранг без кручения* 0 *либо* 1, *является правым* br*-кольцом.*

Доказательство. Разберём сначала случай, когда S — периодическое кольцо. Тогда для каждого ненулевого модуля V_S выполняется $n \operatorname{End} V_S = 0$, где $n = \operatorname{char} S > 0$. Ввиду леммы 12.6 для всех $V_S \neq 0$ имеем (12.1).

Пусть теперь группа S^+ имеет ранг без кручения 1. Предположим, что для модуля $V_S \neq 0$ неравенство (12.1) не имеет места. Пусть подмножество L множества $\mathbf{P}$ таково, что $S/\,\mathbf{t}(S) \cong \mathbf{Q}^{(L)}$. Если бы модуль V_S допускал также $\mathbf{Q}^{(L)}$-модульную структуру, то и аддитивная группа кольца $\operatorname{End} V_S$ имела бы структуру модуля над $\mathbf{Q}^{(L)}$, поэтому выполнялось бы $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}^{(L)}, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0$ и, далее, $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0$, что невозможно. Таким образом, можно найти число $p \in L$, для которого V не является модулем над $\mathbf{Q}^{(p)}$.

Применяя к кольцу S лемму 5.5, приходим к модульному прямому разложению $V = V' \oplus V_p$, причём V'_S является модулем также над кольцом $\mathbf{Q}^{(p)}$. Очевидно, $V_p \neq 0$ (иначе мы смогли бы наделить V структурой $\mathbf{Q}^{(p)}$-модуля). Из той же леммы следует, что p-компонента кольца $\mathrm{End}\, V_S$ отлична от нуля, так как она содержит проекцию $V \to V_p$. Заметим, что $pS \neq S$ (иначе мы бы имели $V_p = 0$), а значит, группа $\mathbf{Z}(p)$ служит для S^+ гомоморфным образом. Итак, мы вновь приходим к противоречию с равенством $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) = 0$. Получили, что S является правым br-кольцом. ■

Лемма 12.9. *Всякое кольцо S, удовлетворяющее равенству $\mathbf{d}(S) = S$, является правым* br*-кольцом.*

Доказательство. Для каждого $p \in \mathbf{P}$ имеем $pS = S$, поэтому S^+ есть группа без кручения (по предложению 5.4). Отсюда уже легко получить, что $Z(S)$ содержит подкольцо Σ, которое изоморфно полю $\mathbf{Q}$. Группа Σ^+ делима и, следовательно, служит прямым слагаемым для S^+. Проекция $\zeta\colon S^+ \to \Sigma^+$ удовлетворяет условиям леммы 12.2, поэтому S — правое br-кольцо. ■

Теорема 12.10. *Если R — правое* br*-кольцо и выполняется $\mathbf{d}(R) \neq R$, то факторкольцо $S = R/\,\mathbf{d}(R)$ также является правым* br*-кольцом.*

Доказательство. Допустим, что факторкольцо S не является правым br-кольцом, т. е. условие (12.1) не выполнено для какого-либо модуля $V_S \neq 0$. В этом случае группа S^+ принадлежит радикальному классу $\{\Sigma\}^{\uparrow}$ радикала $\mathrm{K}_\Sigma \in \mathcal{IR}(\mathbf{Z})$, копорождённого аддитивной группой кольца эндоморфизмов Σ модуля V_S. Группа S^+ является непериодической (по теореме 12.8), а значит, ввиду следствия 2.16 класс $\{\Sigma\}^{\uparrow}$ содержит всякую делимую группу; поэтому выполняется включение $\mathbf{d}(R) \in \{\Sigma\}^{\uparrow}$. Тогда для естественного эпиморфизма

$\pi\colon R \to S$ справедливы соотношения

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{Ker}\pi, \operatorname{End} V_S) = \operatorname{Hom}(\mathbf{d}(R), \Sigma) = 0.$$

Применяя теорему 12.3, мы получаем, что R не является правым br-кольцом (противоречие). ■

Теорема 12.11. *Пусть R — кольцо, для которого группа $S = R/\,\mathbf{t}(R)$ является делимой. Тогда R — правое* br*-кольцо.*

Доказательство. Пусть R есть непериодическое кольцо (в противном случае достаточно будет применить теорему 12.8). Предположим, что $V_R \neq 0$ и $\operatorname{Hom}(R, \operatorname{End} V_R) = 0$; обозначим $\Sigma = \operatorname{End} V_R$.

Пусть для числа $p \in \mathbf{P}$ выполняется $V_p \neq 0$. По лемме 5.5 подмодуль V_p выделяется в модуле V_R прямым слагаемым, являясь при этом ограниченной группой. Поэтому проекция $V \to V_p$ есть ненулевой элемент идеала $\mathbf{t}(\Sigma)$, что противоречит лемме 12.6.

Итак, V — группа без кручения. Тогда $V \cdot \mathbf{t}(R) = 0$, а значит, V можно снабдить структурой правого S-модуля так, чтобы $\operatorname{End} V_S = \Sigma$. Построенная для естественного эпиморфизма $\pi\colon R \to S$ точная последовательность (12.3), очевидно, показывает, что выполнено $\operatorname{Hom}(S, \Sigma) = 0$. Поэтому S не является правым br-кольцом, что противоречит лемме 12.9. Теорема доказана. ■

Из теоремы 12.12 вытекает, что все входящие в диаграмму (5.3) кольца являются правыми и левыми br-кольцами.

Теорема 12.12. *Класс правых* br*-колец строго содержит в себе класс всех колец, слабо π-регулярных справа или слева.*

Доказательство. Из леммы 5.11 и теоремы 12.11 следует, что каждое слабо π-регулярное справа (либо слева) кольцо является правым br-кольцом. Остаётся только убедиться, что включение является строгим; действительно, кольцо $\mathbf{Z}$ представляет собой пример правого br-кольца, которое не является слабо π-регулярным ни справа, ни слева. ■

Остальная часть параграфа целиком посвящена построению некоторых примеров (точнее, контрпримеров), связанных с br-кольцами.

Определение 12.13. Пусть S — кольцо. *Идеализатор* одностороннего идеала $I \subset S$ — это наибольшее подкольцо $\mathfrak{I}(I) \subset S$ такое, что I содержится в $\mathfrak{I}(I)$ в качестве двустороннего идеала.

Предложение 12.14 [77]. *Пусть I — какой-то собственный правый идеал кольца S. Тогда*:

(а) $\mathfrak{I}(I) = \{s \in S \mid sI \subset I\}$;

(б) *сопоставление $\varphi \rightsquigarrow \varphi(1+I)$ задаёт кольцевой изоморфизм между* $\operatorname{End} V_S$, *где $V_S = S/I$ — циклический модуль, и факторкольцом $\mathfrak{I}(I)/I$.*

Несложно заметить, что для любого одностороннего идеала I кольца S выполнено $Z(S) + I \subset \mathfrak{I}(I)$.

Пример 12.15. Пусть p и q — различные простые числа. Положим

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q}_q \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{Q}_q \\ 0 & \mathbf{Q}_q \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{pq} & \mathbf{Q}_q \\ 0 & \mathbf{Q}_q \end{pmatrix};$$

тогда S — кольцо, I — правый идеал этого кольца и $\mathfrak{I}(I) = \Sigma$. В этом случае для циклического модуля $V_S = S/I$ выполнено $\operatorname{End} V_S \cong \Sigma/I \cong \mathbf{Q}_{pq}$, поэтому $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{End} V_S) = 0$. Таким образом, V_S не удовлетворяет неравенству (12.1), а значит, S не является правым br-кольцом.

Замечания. (а) Легко видеть, что S есть подкольцо кольца Σ, где

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q} \\ 0 & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \cong S \otimes \mathbf{Q}.$$

Из леммы 12.9 известно, что Σ является правым br-кольцом. Таким образом, подкольцо правого br-кольца не обязано само быть таковым.

(б) Кольцо $S/\mathbf{d}(S)$ изоморфно $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_q$. Поэтому оно является правым br-кольцом (в силу своей коммутативности). Отсюда видно, что утверждение теоремы 12.10 нельзя обратить.

(в) Для аддитивной группы S^+ рассматриваемого кольца без кручения ранг равен 3. Легко показать, что кольца без кручения ранга 1 и 2 являются правыми br-кольцами. И действительно, для всякого такого кольца R можно записать $R^+ = \langle 1, r\rangle_*$, где r есть подходящий элемент кольца; так как любые два элемента (одинаковых или различных) множества $\{1, r\}$ перестановочны между собой, то R коммутативно, а значит, является правым br-кольцом.

Пример 12.16. (Кольцо, примитивное справа и слева, не всегда будет правым br-кольцом.)

Пусть обозначения S и V_S имеют тот же смысл, что и в примере 12.15. Зададим кольцо R как множество всех бесконечных матриц вида

$$\begin{pmatrix} M & & & 0 \\ & s & & \\ & & s & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix},$$

где M есть произвольная квадратная матрица чётного порядка с элементами из поля $\mathbf{Q}$, а s есть некоторая матрица порядка 2, принадлежащая кольцу S. Отображение $\pi\colon R \to S$, переводящее каждую бесконечную матрицу данного вида в соответствующую матрицу $s \in S$, является сюръективным кольцевым гомоморфизмом. Так как $\operatorname{Ker}\pi$ есть делимая группа, мы имеем соотношения $\operatorname{Hom}(\operatorname{Ker}\pi, \operatorname{End} V_S) \cong \operatorname{Hom}(\operatorname{Ker}\pi, \mathbf{Q}_{pq}) = 0$; отсюда видно, что R не является правым br-кольцом (в силу теоремы 12.3).

С другой стороны, из предложения 4.9 и его правого аналога вытекает, что кольцо R примитивно слева и справа.

Пример 12.17. (Из условия $\operatorname{Hom}(R, Z(R)) \neq 0$ не следует, что R есть правое br-кольцо.)

Пусть S и V_S — те же, что и в примере 12.15. Положим

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p & \mathbf{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset S, \qquad R = \left\{ \begin{pmatrix} s & x \\ 0 & s \end{pmatrix} \,\middle|\, s \in S,\, x \in S/J \right\};$$

тогда J — идеал в S, а R является кольцом. Отображение

$$\pi\colon R \to S, \qquad \text{где } \pi\begin{pmatrix} s & x \\ 0 & s \end{pmatrix} = s,$$

очевидно, является сюръективным гомоморфизмом колец. Несложно видеть, что $\operatorname{Ker}\pi$, S/J и $\mathbf{Q}_q$ изоморфны как абелевы группы. Таким образом, имеем $\operatorname{Hom}(\operatorname{Ker}\pi, \operatorname{End} V_S) \cong \operatorname{Hom}(\mathbf{Q}_q, \mathbf{Q}_{pq}) = 0$. Применяя теорему 12.3, видим, что R не является правым br-кольцом.

С другой стороны, $\operatorname{Ker}\pi \subset Z(R)$. Поэтому S/J можно вложить в $Z(R)$ в качестве подгруппы, а значит, $\operatorname{Hom}(R, Z(R)) \neq 0$.

Напомним следующий известный факт.

Лемма Гензеля. *Пусть $f(x) \in \mathbf{Q}_p^*[x]$ и число $z_0 \in \mathbf{Q}_p^*$ удовлетворяет соотношениям*

$$f(z_0) \equiv 0 \pmod p \qquad \text{и} \qquad f'(z_0) \not\equiv 0 \pmod p.$$

Тогда существует единственное число $z \in \mathbf{Q}_p^*$, для которого $z \equiv z_0 \pmod p$ и $f(z) = 0$.

Пример 12.18. (Из локальности кольца не вытекает, что оно является правым br-кольцом.)

Обозначим $B = \mathbf{Q}_p^*$; пусть $\alpha\colon B \to B/pB$ — естественный эпиморфизм. Выберем в кольце B некоторые сервантные подкольца A и C так, чтобы они имели конечный ранг и выполнялось $A \not\subset C$ и $C \not\subset A$. Положим

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha(a) = \alpha(c) \right\}, \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & pC \end{pmatrix}.$$

Из предложения 4.5 следует, что S является кольцом; ясно также, что I есть правый идеал этого кольца. Далее, введём обозначения

$$J = \begin{pmatrix} pA & B \\ 0 & pC \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S \,\middle|\, a \in A \cap C,\, b \in C \right\}.$$

В силу теоремы 5.13 кольца A и C являются локальными. Заметим, что J — собственный идеал кольца S, причём

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bc^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \text{если } \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in S \setminus J;$$

возможность обозначений a^{-1} и c^{-1} следует из того факта, что все элементы из $A \setminus pA$ (из $C \setminus pC$) являются обратимыми в A (соответственно в C) ввиду теоремы 5.13. Это значит, что идеал J совпадает с множеством необратимых элементов кольца S, поэтому S — локальное кольцо.

Непосредственно проверяется, что $\mathfrak{I}(I) = \Sigma$. Гомоморфизм колец

$$\beta\colon S \to A, \qquad \text{где } \beta\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a,$$

отображает Σ на $A \cap C$, при этом $\operatorname{Ker}\beta|_\Sigma = \Sigma \cap \operatorname{Ker}\beta = I$. Итак, для модуля $V_S = S/I$ выполнено $\operatorname{End} V_S \cong \Sigma/I \cong \operatorname{Im}\beta|_\Sigma = A \cap C$.

Несложно видеть, что $\operatorname{Ker}\beta$, $B \oplus pC$ и $B \oplus C$ попарно изоморфны как группы и $\operatorname{Im}\beta = A$. Тогда существует точная последовательность групп

$$0 \longrightarrow B \oplus C \longrightarrow S \xrightarrow{\beta} A \longrightarrow 0;$$

она индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, A \cap C) \longrightarrow \operatorname{Hom}(S, A \cap C) \longrightarrow \operatorname{Hom}(B \oplus C, A \cap C).$$

Подкольцо $A \cap C$ кольца B сервантно, строго содержится в каждом из колец A и C и имеет конечный ранг. Применяя теорему 5.13, получаем

$$\operatorname{Hom}(A, A \cap C) = \operatorname{Hom}(B, A \cap C) = \operatorname{Hom}(C, A \cap C) = 0.$$

Поэтому имеем $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{End} V_S) \cong \operatorname{Hom}(S, A \cap C) = 0$, т. е. неравенство (12.1) не выполняется. Получили, что S не является правым br-кольцом.

Замечание. Покажем, что подкольца A и C с требуемыми свойствами существуют. Из $1^2 \equiv 7 \equiv 10 \pmod 3$ и леммы Гензеля вытекает, что каждый из многочленов $x^2 - 7$ и $x^2 - 10$ имеет корень в $\mathbf{Q}_3^*$. Нетрудно проверить, что для сервантных подгрупп $A = \langle 1, \sqrt{7}\,\rangle_*$, $C = \langle 1, \sqrt{10}\,\rangle_*$ группы $\mathbf{Q}_3^*$ выполнено $A \not\subset C$ и $C \not\subset A$, причём A и C — подкольца в $\mathbf{Q}_3^*$.

Пример 12.19. (Правое br-кольцо может не быть левым br-кольцом.)

Пусть выполнено $p, q \in \mathbf{P} \setminus \{2\}$ и $p \neq q$. Кольцо S и левый идеал $I \subset S$ зададим равенствами

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{(p)} & 0 & 0 \\ \mathbf{Z}(2^\infty) & \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Z}(2^\infty) \\ 0 & 0 & \mathbf{Q}^{(q)} \end{pmatrix}, \qquad I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & r & b' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S \;\middle|\; b = b' \right\}.$$

Легко заметить, что $Z(S) = \{z \cdot 1_S \mid z \in \mathbf{Z}\}$, причём для аддитивной группы кольца $\mathfrak{I}(I)$ имеет место прямое разложение $\mathfrak{I}(I) = Z(S) \oplus I$. Отсюда видно, что для модуля $U = S/I \in S\text{-mod}$ выполняется $\operatorname{End}_S U \cong \mathfrak{I}(I)/I \cong Z(S) \cong \mathbf{Z}$ и, далее, $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{End}_S U) = 0$. Итак, S не является левым br-кольцом.

Пусть V_S — ненулевой модуль. Применяя теорему 4.3 к случаю

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{(p)} & 0 \\ \mathbf{Z}(2^\infty) & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{Z}(2^\infty) \end{pmatrix}, \qquad C = \mathbf{Q}^{(q)},$$

можем считать, что V — описанный в этой теореме модуль, т. е. выполняется $V = (X_A, Y_C)$. Поскольку B является делимой 2-группой, то $X \otimes_A B$ и образ гомоморфизма $f \in \operatorname{Hom}_C(X \otimes_A B, Y)$ тоже являются делимыми 2-группами. Следовательно, $Y = \operatorname{Im} f \oplus Y'$ для некоторой подгруппы $Y' \subset Y$ (это прямое разложение автоматически будет C-модульным).

Из наших рассуждений вытекает, что имеет место S-модульное прямое разложение $V = V' \oplus V''$, где $V' = (X, \operatorname{Im} f)$ и $V'' = (0, Y')$. Ввиду равенства $pA = A$ и предложений 5.4 и 5.6 модуль X допускает структуру $\mathbf{Q}^{(p)}$-модуля. Тогда V' и V'' суть модули над кольцами $\mathbf{Q}^{(p)}$ и $\mathbf{Q}^{(q)}$ соответственно; значит, $\operatorname{End} V'_S$ ($\operatorname{End} V''_S$) есть $\mathbf{Q}^{(p)}$-модуль (соответственно $\mathbf{Q}^{(q)}$-модуль). Далее, ясно, что $V' \neq 0$ или $V'' \neq 0$, т. е. справедливо по крайней мере одно из неравенств

$\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}^{(p)}, \mathrm{End}\, V'_S) \neq 0$ и $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}^{(q)}, \mathrm{End}\, V''_S) \neq 0$. Из предложения 4.1 следует существование у группы $(\mathrm{End}\, V_S)^+$ прямых слагаемых, изоморфных группам $(\mathrm{End}\, V'_S)^+$ и $(\mathrm{End}\, V''_S)^+$, а следовательно, $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, V_S) \neq 0$. Получаем, что S есть правое br-кольцо.

Пример 12.20. Пусть $A = \mathbf{Q}^{(2)}$ и $C = \mathbf{Q}^{(3)}$. Положим

$$B = \bigoplus_{p>3} \mathbf{Z}(p), \qquad B' = \prod_{p>3} \mathbf{Z}(p), \qquad S = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

(здесь сумма и произведение берутся по всем простым $p > 3$). Факторкольцо B'/B является делимым кольцом без кручения; таким образом, B' содержит подкольцо Σ, для которого $B \subset \Sigma$ и $\Sigma/B \cong \mathbf{Q}_2$. В силу 3-делимости групп B и $\mathbf{Q}_2$ группа Σ^+ является 3-делимой. Поэтому из равенства $\Sigma_3 = 0$ вытекает, что Σ обладает C-модульной структурой.

Положим $U = (A, \Sigma)$, считая, что операция умножения элементов из U на элементы кольца S справа совпадает с обычным матричным умножением; тогда по теореме 4.3 получаем, что U — правый S-модуль. Пусть $\chi \in \mathrm{End}\, U_S$. Из теоремы 4.4 следует, что χ действует по правилу $\chi(a, b) = \big(\xi(a), \eta(b)\big)$, где $\xi \in \mathrm{End}\, A_A$ и $\eta \in \mathrm{End}\, \Sigma_C$ ($a \in A$, $b \in \Sigma$). Эндоморфизм ξ представляет собой умножение на некоторое рациональное число $r \in A$, а значит, для всех $b \in B$ справедливы соотношения

$$\big(0, \eta(b)\big) = \chi(0, b) = \chi(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (r, 0) \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, rb),$$

т. е. $\eta(b) = rb$.

В силу предложения 3.4 имеем

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_2, B') \cong \prod_{p>3} \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_2, \mathbf{Z}(p)) = 0.$$

Из включения $\Sigma \subset B'$ следует равенство $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_2, \Sigma) = 0$. Ввиду теоремы 3.8 точная последовательность групп

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow \Sigma \longrightarrow \mathbf{Q}_2 \longrightarrow 0$$

индуцирует точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_2, \Sigma) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Sigma, \Sigma) \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, \Sigma).$$

Из доказанного ранее равенства $\mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_2, \Sigma) = 0$ вытекает, что гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\Sigma, \Sigma) \to \mathrm{Hom}(B, \Sigma)$ инъективен.

Представим число r в виде несократимой дроби $\frac{d}{2^k}$. Поскольку при всех $b \in B$ выполнено $\eta(b) = rb$, мы можем сделать вывод, что эндоморфизмы $2^k\eta$ и $d \cdot \mathrm{id}_\Sigma$ из $\mathrm{End}(\Sigma^+)$ одинаково действуют на элементы, лежащие в группе B. Ввиду инъективности гомоморфизма $\mathrm{Hom}(\Sigma, \Sigma) \to \mathrm{Hom}(B, \Sigma)$ получаем, что $2^k\eta = d \cdot \mathrm{id}_\Sigma$.

Если выполнено $r \in \mathbf{Z}$, то $k = 0$ и $d = r$. В этом случае эндоморфизм η и, значит, эндоморфизм χ представляет собой умножение на число r; разные числа r, очевидно, дают разные эндоморфизмы χ. Предположим теперь, что $r \notin \mathbf{Z}$, тогда $k \geqslant 1$, а число d нечётно. Получаем

$$1_\Sigma = d \cdot 1_\Sigma - (d-1) \cdot 1_\Sigma = 2\big(2^{k-1}\eta(1_\Sigma) - \tfrac{d-1}{2} \cdot 1_\Sigma\big).$$

Таким образом, $1_\Sigma \in 2\Sigma$, т. е. группа Σ^+ является 2-делимой. Следовательно, группа $\mathbf{Q}_2 \cong \Sigma/B$ также 2-делима, что невозможно.

Получили, что эндоморфизмы модуля U исчерпываются умножениями на целые числа. Это означает, что $\mathrm{End}\, U_S \cong \mathbf{Z}$ и, далее, $\mathrm{Hom}(S, \mathrm{End}\, U_S) = 0$. Таким образом, S не является правым br-кольцом.

В предшествующих примерах модуль V_S, для которого не выполняется условие (12.1), всегда выбирался циклическим (в том числе в примерах 12.16 и 12.17, где это было сделано неявно посредством применения теоремы 12.3). Мы покажем, что для рассматриваемого кольца S всякий ненулевой конечно порождённый модуль V_S обладает свойством (12.1).

Пусть $V_S = (X_A, Y_C)$ — описанный ранее в теореме 4.3 модуль. Если он конечно порождён, то для подходящих элементов $v_i = (x_i, y_i) \in V$ выполнено $V = v_1S + v_2S + \ldots + v_nS$. Отсюда следует, что для любого $y \in Y$ существуют элементы $b_i \in B$ и $c_i \in C$ такие, что

$$y = \sum_{i=1}^{n} f(x_i \otimes_A b_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i c_i.$$

Группа B является периодической, поэтому периодическими являются также группы $X \otimes_A B$ и $f(X \otimes_A B)$. Следовательно, в C-модуле $Y/\,\mathbf{t}(Y)$ выполнено соотношение

$$y + \mathbf{t}(Y) = (y_1 + \mathbf{t}(Y))c_1 + (y_2 + \mathbf{t}(Y))c_2 + \ldots + (y_n + \mathbf{t}(Y))c_n.$$

Отсюда видно, что $Y/\,\mathbf{t}(Y)$ — конечно порождённый C-модуль без кручения. Из теоремы 5.8 получаем, что C-модуль $Y/\,\mathbf{t}(Y)$ свободен. Поскольку всякий свободный модуль является проективным, то для подходящего $Y' \subset Y$ имеем C-модульное прямое разложение $Y = \mathbf{t}(Y) \oplus Y'$. Тогда

$$V = V' \oplus V'', \qquad \text{где } V' = \Big(X, \bigoplus_{p>3} Y_p\Big) \text{ и } V'' = (0, Y_2 \oplus Y'),$$

есть S-модульное прямое разложение (ясно, что $Y_3 = 0$). Несложно заметить, что V' и V'' являются модулями над A и C соответственно и, значит, $\operatorname{End} V'_S$ ($\operatorname{End} V''_S$) есть A-модуль (соответственно C-модуль). Пусть выполнено $V \neq 0$. Так как $V' \neq 0$ или $V'' \neq 0$, то $\operatorname{Hom}(A, \operatorname{End} V'_S) \neq 0$ или $\operatorname{Hom}(C, \operatorname{End} V''_S) \neq 0$. Из предложения 4.1 вытекает, что $(\operatorname{End} V_S)^+$ обладает прямыми слагаемыми, изоморфными $\operatorname{End} V'_S$ и $\operatorname{End} V''_S$. Следовательно, $\operatorname{Hom}(S, \operatorname{End} V_S) \neq 0$.

Замечания. (а) Изоморфное кольцу $\mathbf{Q}^{(2)} \times \mathbf{Q}^{(3)}$ факторкольцо $S/\,\mathbf{t}(S)$ является правым br-кольцом в силу своей коммутативности. Это значит, что утверждение теоремы 12.7 нельзя обратить.

(б) Ранг без кручения группы S^+ равен 2. Следовательно, приведённая в теореме 12.8 оценка является точной.

ГЛАВА 4

CSP-КОЛЬЦА И МОДУЛИ НАД НИМИ

Последняя глава целиком посвящена csp-кольцам и модулям над ними. Даётся определение csp-кольца, установлены основные свойства таких колец. Из §13 и §14 вытекает, что существует достаточно много csp-колец. Так, при определённых дополнительных теоретико-множественных допущениях любое подполе поля комплексных чисел будет базовым полем какого-то csp-кольца. Также показано, что можно найти много неизоморфных csp-колец, имеющих одно и то же базовое поле.

В §15 дано описание проективных модулей над csp-кольцами. Сначала устанавливается, что всякий такой модуль представи́м в виде прямой суммы подмодулей, изоморфных идеалам кольца. Приведена система кардинальных инвариантов, однозначно определяющая проективный модуль. Доказано, что для любого csp-кольца R группа Гротендика $K_0(R)$ является прямой суммой счётного семейства бесконечных циклических групп.

В §16 исследуются тензорные произведения модулей над произвольным csp-кольцом. В частности, дано полное описание плоских модулей над таким кольцом, а также описание чистых подмодулей.

В §17 приведено описание идемпотентных радикалов категории mod-R (где R — произвольное csp-кольцо); выяснено строение решётки, образуемой этими радикалами. Доказано, что в категории mod-R всякий идемпотентный радикал сопоставляет любому модулю его чистый подмодуль. Дано описание всех кручений и кокручений категории mod-R.

§13. Базовые поля csp-колец и кардинальные характеристики

Под *характеристикой* мы будем понимать всякую последовательность вида $\chi = (k_p)_{p\in\mathbf{P}}$, где $k_p \in \mathbf{N}\cup\{0,\infty\}$ (термин «характеристика поля/кольца» продолжаем использовать в его обычном смысле). Далее, через L_χ обозначим множество всех $p \in \mathbf{P}$, для которых $k_p \neq 0$. Если $k_p = \infty$, мы будем считать, что $R_p = \mathbf{Q}_p^*$; в противном случае полагаем $R_p = \mathbf{Z}/p^{k_p}\mathbf{Z}$. Пусть $L = L_\chi$ есть бесконечное множество. Обозначим

$$K_\chi = \prod_{p\in L} R_p, \qquad T_\chi = \bigoplus_{p\in L} R_p \subset K_\chi. \tag{13.1}$$

Элемент кольца K_χ будем представлять как последовательность вида

$$r = (r_p)_{p\in L}, \tag{13.2}$$

а сами компоненты $r_p \in R_p$, где $p \in L$, называем *p-координатами* или просто *координатами* элемента r. Нетрудно заметить, что T_χ есть идеал кольца K_χ. Ясно также, что аддитивная группа факторкольца K_χ/T_χ является делимой группой без кручения.

Определение 13.1. Будем называть csp-*кольцом* всякое подкольцо R кольца K_χ такое, что $T_\chi \subset R$ и что кольцо R/T_χ является полем. Поле R/T_χ, а также любое изоморфное ему поле называем *базовым полем* csp-кольца R; характеристику χ будем называть *кохарактеристикой* csp-кольца R.

В дальнейшем, рассматривая какую-либо характеристику χ, мы всегда предполагаем, что χ содержит бесконечное число символов, не равных нулю. Через e_p будем обозначать единичный элемент кольца R_p. Предложение 13.2 содержит несколько хорошо известных фактов о csp-кольцах (см., например, работы [34, 36]). Для удобства мы приведём их доказательства.

Предложение 13.2. *Пусть R — csp-кольцо, $R \subset K_\chi$. Тогда:*

(a) *T_χ — сервантная подгруппа в R^+;*

(б) R^+ — *сервантная подгруппа в* K_χ;

(в) *если* $r \in R$, *то либо почти все* p-*координаты элемента* r *равны* 0, *либо* p-*координата элемента* r *обратима в* R_p *почти для всех* $p \in L_\chi$;

(г) *кольцо* R *будет регулярным (в смысле фон Неймана) в точности в том случае, когда* χ *содержит только символы* 0 *и* 1.

Доказательство. (а) Требуемое утверждение вытекает из того факта, что T_χ — сервантная подгруппа в K_χ.

(б) Аддитивная группа поля R/T_χ делима и, следовательно, сервантна в K_χ/T_χ. Так как подгруппа T_χ сервантна в K_χ, то и R^+ является сервантной подгруппой в K_χ [30].

(в) Если выполнено $r \in T_\chi$, то r имеет лишь конечное число ненулевых p-координат. Если же $r \in R \setminus T_\chi$, то $r + T_\chi$ — ненулевой элемент поля R/T_χ; следовательно, имеем $(r+T_\chi)(d+T_\chi) = 1+T_\chi$ для некоторого $d+T_\chi \in R/T_\chi$. Тогда для элемента $d \in R$ выполнено $rd - 1 \in T_\chi$. Таким образом, при почти всех $p \in L_\chi$ справедливо равенство $r_p d_p = e_p$, где r_p и d_p — это p-координаты элементов r и d соответственно. Отсюда следует требуемое утверждение.

(г) Пусть $\chi = (k_p)_{p\in\mathbf{P}}$; положим $L = L_\chi$.

Допустим, что для какого-нибудь $p \in L$ выполнено неравенство $k_p > 1$. Введём обозначение

$$d = (\dots, 0, pe_p, 0, \dots) \in T_\chi \subset R.$$

Из условия $pe_p \notin p^2R_p$ вытекает, что для каждого элемента $r \in R$ вида (13.2) справедливы соотношения $rd^2 = (\dots, 0, p^2r_p, 0, \dots) \neq d$. Значит, если кольцо R регулярно, то при любом $p \in L$ должно быть $k_p = 1$.

Обратно, пусть для каждого $p \in L$ выполнено $k_p = 1$, т. е. R_p есть поле. Зафиксируем элемент $r \in R$ вида (13.2). Так как $r + T_\chi \in R/T_\chi$ и поле R/T_χ является регулярным кольцом, то можно найти такой элемент $d + T_\chi \in R/T_\chi$ (где $d = (d_p)_{p\in L} \in R$), что $(d + T_\chi)(r + T_\chi)^2 = r + T_\chi$. Тогда $\beta = dr^2 - r$ есть элемент идеала T_χ.

Через X обозначаем множество всех $p \in L$, для которых $\beta_p = d_p r_p^2 - r_p$ есть ненулевой элемент поля R_p (из $\beta \in T_\chi$ вытекает, что множество X будет конечным). Очевидно, что при всех $p \in X$ выполнено $r_p \in R_p \setminus \{0\}$.

Для каждого $p \in X$ рассмотрим элемент

$$b_p = (\dots, 0, d_p - r_p^{-1}, 0, \dots) \in T_\chi \subset R;$$

ясно, что $b_p r^2 = (\dots, 0, \beta_p, 0, \dots)$. Обозначим теперь через b элемент кольца R, равный сумме элементов b_p по всем $p \in X$. Тогда $br^2 = \beta$ и, далее,

$$r = dr^2 - \beta = dr^2 - br^2 = (d-b)r^2,$$

где $d - b \in R$. Следовательно, кольцо R регулярно. ■

Нетрудно показать, что кохарактеристика csp-кольца будет определена однозначно. Точнее, справедливо

Предложение 13.3. *Пусть R и R' суть* csp-*кольца, которые имеют изоморфные аддитивные группы и являются подкольцами соответственно колец K_χ и K_φ. Тогда $\chi = \varphi$.*

Доказательство. Так как T_χ содержится в R^+ в качестве сервантной подгруппы, а аддитивная группа поля R/T_χ делима, то для $p \in \mathbf{P}$ равенство $pR = R$ эквивалентно равенству $pT_\chi = T_\chi$. Поэтому $\chi = (k_p)_{p \in \mathbf{P}}$, где

$$k_p = \begin{cases} 0, & \text{если } pR = R, \\ \infty, & \text{если } pR \neq R \text{ и } \mathbf{t}_p(R) = 0, \\ n, & \text{если } |\,\mathbf{t}_p(R)| = p^n, \text{ где } n > 0. \end{cases}$$

Поскольку любой групповой изоморфизм сохраняет p-делимость и мощность p-компоненты, можно аналогично получить равенство $\varphi = (k_p)_{p \in \mathbf{P}}$. ■

Следующий результат показывает, что аддитивные группы каких-либо двух различных csp-колец не могут быть изоморфны друг другу даже в том случае, когда кохарактеристики этих колец совпадают.

Предложение 13.4. *Пусть* $R \subset K_\chi$ *и* $R' \subset K_\chi$ — csp-*кольца. В этом случае справедливы следующие утверждения*:

(а) *всякий гомоморфизм из* $\mathrm{Hom}(R, R')$ *есть умножение на какой-то элемент кольца* R';

(б) *существование изоморфизма между аддитивными группами колец* R *и* R' *равносильно равенству* $R = R'$.

Доказательство. (а) Пусть $\zeta \in \mathrm{Hom}(R, R')$. Мы обозначаем $b = \zeta(1)$; зададим аддитивный гомоморфизм $\zeta' \colon R \to K_\chi$ равенством $\zeta'(r) = \zeta(r) - br$. Ядро этого гомоморфизма, как легко видеть, содержит циклическую группу $G = \langle 1 \rangle$, порождённую единичным элементом кольца K_χ. Из этого вытекает, что ζ' индуцирует гомоморфизм $\bar{\zeta}' \in \mathrm{Hom}(R/G, K_\chi)$.

Заметим, что для всякого $p \in \mathbf{P}$ и всякого элемента $d \in K_\chi$ существует $n \in \mathbf{Z}$ такое, что $d - n \cdot 1 \in pK_\chi$. Поэтому $K_\chi/G = (pK_\chi + G)/G = p(K_\chi/G)$ для каждого $p \in \mathbf{P}$. Таким образом, факторгруппа K_χ/G является делимой; тогда её сервантная (в силу предложения 13.2) подгруппа R/G тоже делима. С другой стороны, легко видеть, что аддитивная группа кольца K_χ является редуцированной. Значит, $\bar{\zeta}' = 0$, т. е. $\zeta' = 0$ и $\zeta(r) = br$ при любом $r \in R$.

(б) Пусть $\zeta \colon R \to R'$ — групповой изоморфизм. Из пункта (а) вытекает существование элемента $b \in R'$ такого, что $\zeta(r) = br$ для всех $r \in R$; поэтому $R = \zeta^{-1}(1) \cdot bR \subset bR = \zeta(R) = R'$. Аналогично доказывается, что выполнено включение $R' \subset R$. Таким образом, $R = R'$. ■

Теорема 13.5. (а) *Все* csp-*кольца являются* E-*кольцами.*

(б) *Аддитивные группы двух* csp-*колец изоморфны в точности в том случае, когда эти кольца совпадают.*

Доказательство. (а) Пусть R есть csp-кольцо. Применяя предыдущее предложение к случаю $R' = R$, получаем, что все эндоморфизмы группы R^+ суть умножения на элементы кольца R. Поэтому R является E-кольцом.

(б) Надо последовательно применить предложения 13.3 и 13.4. ■

Главной целью этого (и следующего) параграфа будет выяснить, когда заданное поле служит базовым полем некоторого csp-кольца, т. е. какие поля вкладываются в K_χ/T_χ в качестве подколец. Нетрудно заметить, что каждое такое поле F обязательно удовлетворяет условиям $\operatorname{char} F = \operatorname{char}(K_\chi/T_\chi) = 0$ и $|F| \leqslant |K_\chi| = \mathfrak{c}$ (см. также теорему 14.13). В [42] было по сути показано, что произвольное конечное расширение поля $\mathbf{Q}$ будет базовым полем некоторого регулярного csp-кольца (для csp-колец с такими базовыми полями в работах [8, 36] использован термин *кольца псевдоалгебраических чисел*). Наименьшее из подколец факторкольца K_χ/T_χ, являющихся полями, будет ради удобства отождествляться с $\mathbf{Q}$ (каждое csp-кольцо, имеющее $\mathbf{Q}$ своим базовым полем, называем *кольцом псевдорациональных чисел*, см. также [7, 14, 57]).

Для характеристик $\chi = (k_p)_{p\in\mathbf{P}}$ и $\varphi = (k'_p)_{p\in\mathbf{P}}$ будем писать $\chi \geqslant \varphi$, если при всех $p \in \mathbf{P}$ выполнено $k_p \geqslant k'_p$.

Лемма 13.6. *Если $\chi \geqslant \varphi$ и существует* csp-*кольцо, имеющее базовое поле F и кохарактеристику χ, то поле F будет базовым полем некоторого* csp-*кольца кохарактеристики φ.*

Доказательство. Сюръективный гомоморфизм $K_\chi \to K_\varphi$ индуцирует сюръективный гомоморфизм колец $\theta\colon K_\chi/T_\chi \to K_\varphi/T_\varphi$. Пусть $R \subset K_\chi$ — это некоторое csp-кольцо, имеющее F своим базовым полем; для удобства будем считать, что $F = R/T_\chi$. Кольцевой гомоморфизм $\theta|_F$ является инъективным, поскольку единственный собственный идеал поля F равен 0. Таким образом, выполняется $\theta(F) \cong F$. Отсюда вытекает, что кольцо $R' \subset K_\varphi$, определяемое условием $R'/T_\varphi = \theta(F)$, есть csp-кольцо с базовым полем F. ■

Теорема 13.7. *Пусть $L_\varphi = L_\chi$, причём характеристика φ содержит только символы* 0 *и* 1, *а характеристика χ — только* 0 *и* ∞. *Эквивалентны следующие условия*:

1) F — *базовое поле некоторого* csp-*кольца кохарактеристики* χ;
2) F — *базовое поле некоторого* csp-*кольца кохарактеристики* φ.

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из леммы 13.6.

2) $\Rightarrow$ 1). Как и ранее, мы обозначаем через θ сюръективный кольцевой гомоморфизм $K_\chi/T_\chi \to K_\varphi/T_\varphi$, который индуцирован гомоморфизмом колец $\bar{\theta}\colon K_\chi \to K_\varphi$. Заметим, что элемент кольца K_χ/T_χ обратим в точности тогда, когда его образ при отображении θ обратим в кольце K_φ/T_φ. Далее, через θ^x обозначается гомоморфизм колец $(K_\chi/T_\chi)[x] \to (K_\varphi/T_\varphi)[x]$, сопоставляющий многочлену $\widehat{\mu}(x) \in (K_\chi/T_\chi)[x]$ многочлен, коэффициенты которого являются образами соответствующих коэффициентов $\widehat{\mu}(x)$ при отображении θ.

Пусть $R \subset K_\varphi$ есть csp-кольцо, которое имеет F своим базовым полем; для удобства мы договоримся, что $F = R/T_\varphi$. Через $\mathcal{F}$ обозначим множество всех подколец $\widehat{F}$ кольца K_χ/T_χ, являющихся полями и таких, что $\theta(\widehat{F}) \subset F$. Имеем $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}$, так как $\theta(\mathbf{Q})$ есть содержащееся в кольце K_φ/T_φ простое поле и, значит, $\theta(\mathbf{Q}) \subset F$. В частности, $\mathcal{F}$ — непустое множество. Для некоторого максимального относительно включения элемента $\widehat{G}$ множества $\mathcal{F}$ (по лемме Цорна такой элемент существует) мы обозначим $G = \theta(\widehat{G})$. Сужение $\theta|_{\widehat{G}}$ есть изоморфизм между $\widehat{G}$ и G, поскольку в $\widehat{G}$ нет собственных идеалов $\neq 0$.

Допустим, что $a \in F \setminus G$. Рассмотрим два случая.

I. Пусть элемент a трансцендентен над G. Зафиксируем произвольный элемент $\widehat{a} \in K_\chi/T_\chi$ со свойством $\theta(\widehat{a}) = a$; из $a \notin G$ следует, что $\widehat{a} \notin \widehat{G}$.

Для многочлена $\widehat{v}(x) \in \widehat{G}[x]$ мы полагаем $v(x) = \theta^x(\widehat{v}(x)) \in G[x]$, тогда $\theta(\widehat{v}(\widehat{a})) = v(a) \in G(a) \subset F$. Заметим, что $\theta^x|_{\widehat{G}[x]}$ есть изоморфизм между $\widehat{G}[x]$ и $G[x]$, так как $\theta|_{\widehat{G}}$ является изоморфизмом между $\widehat{G}$ и G. Поэтому в случае $\widehat{v}(x) \neq 0$ имеем $v(x) \neq 0$, а значит, $v(a) \neq 0$ (поскольку a — трансцендентный над G элемент). Следовательно, при любом $\widehat{v}(x) \in \widehat{G}[x] \setminus \{0\}$ элемент $\theta(\widehat{v}(\widehat{a}))$ принадлежит $F \setminus \{0\}$ и, таким образом, обратим в K_φ/T_φ; поэтому $\widehat{v}(\widehat{a})$ есть обратимый элемент кольца K_χ/T_χ. Из сказанного ясно, что множество

$$\widehat{G}(\widehat{a}) = \Big\{ \widehat{u}(\widehat{a}) \cdot \big(\widehat{v}(\widehat{a})\big)^{-1} \;\Big|\; \widehat{u}(x), \widehat{v}(x) \in \widehat{G}[x], \;\; \widehat{v}(x) \neq 0 \Big\} \subset K_\chi/T_\chi$$

является полем, которое строго содержит в себе $\widehat{G}$ (поскольку $\widehat{a} \in \widehat{G}(\widehat{a}) \setminus \widehat{G}$).

Так как $\theta^x|_{\widehat{G}[x]}$ есть изоморфизм между $\widehat{G}[x]$ и $G[x]$, то имеем

$$\theta(\widehat{G}(\widehat{a})) = \Big\{u(a)\cdot\big(v(a)\big)^{-1} \;\Big|\; u(x), v(x) \in G[x], \quad v(x) \neq 0\Big\} = G(a) \subset F,$$

откуда $\widehat{G}(\widehat{a}) \in \mathcal{F}$. Получаем противоречие с максимальностью $\widehat{G}$ в $\mathcal{F}$.

II. Допустим теперь, что элемент a алгебраичен над полем G; выберем какой-либо элемент $r \in K_\chi$, для которого $\theta(r + T_\chi) = a$. Множество $L_\varphi = L_\chi$ обозначим через L.

Пусть $f(x) = x^s + \alpha_1 x^{s-1} + ... + \alpha_s \in G[x]$ есть минимальный многочлен элемента a над полем G. Выберем элементы $\beta_j \in K_\chi$ так, чтобы $\beta_j + T_\chi \in \widehat{G}$ и $\theta(\beta_j + T_\chi) = \alpha_j$ при всех j. Для $p \in L$ через π_p будем обозначать проекции $K_\chi \to \mathbf{Q}_p^*$. Рассмотрим многочлены

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= x^s + (\beta_1 + T_\chi)x^{s-1} + ... + (\beta_s + T_\chi) \in \widehat{G}[x],\\
\bar{f}(x) &= x^s + \beta_1 x^{s-1} + ... + \beta_s \in K_\chi[x],\\
f_p(x) &= x^s + \pi_p(\beta_1)x^{s-1} + ... + \pi_p(\beta_s) \in \mathbf{Q}_p^*[x].
\end{aligned}$$

Очевидно, что справедливо равенство $\bar{f}(r) + T_\chi = \widehat{f}(r + T_\chi)$. Тогда

$$\bar{\theta}(\bar{f}(r)) + T_\varphi = \theta(\bar{f}(r) + T_\chi) = \theta(\widehat{f}(r + T_\chi)) = f(\theta(r + T_\chi)) = f(a) = 0,$$

отсюда $\bar{\theta}(\bar{f}(r)) \in T_\varphi$. Это, в свою очередь, означает, что

$$\pi_p(\bar{f}(r)) \equiv 0 \pmod p \qquad \text{почти для всех } p \in L. \tag{13.3}$$

Из равенства $\operatorname{char}\widehat{G} = 0$ и неприводимости $\widehat{f}(x)$ в кольце $\widehat{G}[x]$ следует, что многочлены $\widehat{f}(x)$ и $\widehat{f}\,'(x)$ взаимно просты. Значит, найдутся многочлены $\widehat{u}(x), \widehat{v}(x) \in \widehat{G}[x]$ такие, что сумма $\widehat{u}(x)\widehat{f}(x) + \widehat{v}(x)\widehat{f}\,'(x)$ совпадёт с единицей поля $\widehat{G}$, т. е. с элементом $1 + T_\chi$. Зафиксируем некоторые элементы $t, b \in K_\chi$, обладающие свойствами $\widehat{u}(r + T_\chi) = t + T_\chi$ и $\widehat{v}(r + T_\chi) = b + T_\chi$. Тогда

$$\begin{aligned}
1 + T_\chi &= \widehat{u}(r + T_\chi)\widehat{f}(r + T_\chi) + \widehat{v}(r + T_\chi)\widehat{f}\,'(r + T_\chi) =\\
&= (t + T_\chi)(\bar{f}(r) + T_\chi) + (b + T_\chi)(\bar{f}'(r) + T_\chi) = \big(t\bar{f}(r) + b\bar{f}'(r)\big) + T_\chi.
\end{aligned}$$

Поэтому при почти всех $p \in L$ имеем

$$\pi_p(t)\pi_p(\bar{f}(r)) + \pi_p(b)\pi_p(\bar{f}'(r)) = \pi_p(t\bar{f}(r) + b\bar{f}'(r)) = \pi_p(1) = e_p,$$

где e_p есть единичный элемент кольца $\mathbf{Q}_p^*$. С учётом (13.3) мы получаем, что почти для всех $p \in L$ в соответствующем кольце $\mathbf{Q}_p^*$ выполнено

$$\pi_p(\bar{f}(r)) \equiv 0 \pmod p \quad \text{и} \quad \pi_p(\bar{f}'(r)) \not\equiv 0 \pmod p,$$

или, что то же самое,

$$f_p(\pi_p(r)) \equiv 0 \pmod p \quad \text{и} \quad f_p'(\pi_p(r)) \not\equiv 0 \pmod p.$$

Применяя лемму Гензеля к тем из чисел $\pi_p(r) \in \mathbf{Q}_p^*$, которые обладают указанными свойствами, мы можем найти элемент $d \in K_\chi$, для которого при почти всех $p \in L$ элемент $\pi_p(d)$ кольца $\mathbf{Q}_p^*$ таков, что справедливы сравнение $\pi_p(d) \equiv \pi_p(r) \pmod p$ и равенство $f_p(\pi_p(d)) = 0$. Отсюда получаем

$$\theta(d + T_\chi) = \bar{\theta}(d) + T_\varphi = \bar{\theta}(r) + T_\varphi = \theta(r + T_\chi) = a.$$

Далее, почти для всех $p \in L$ имеем $\pi_p(\bar{f}(d)) = f_p(\pi_p(d)) = 0$. Это значит, что $\bar{f}(d) \in T_\chi$ и, следовательно, $\widehat{f}(d + T_\chi) = \bar{f}(d) + T_\chi = 0$. Поскольку многочлен $\theta^x(\widehat{f}(x)) = f(x)$ неприводим в $G[x]$ и $\theta^x|_{\widehat{G}[x]}$ осуществляет изоморфизм колец $\widehat{G}[x]$ и $G[x]$, то многочлен $\widehat{f}(x)$ неприводим в $\widehat{G}[x]$.

Определим $\widehat{F}$ как наименьшее подкольцо кольца K_χ/T_χ, содержащее $\widehat{G}$ и $d + T_\chi$. Подкольцо $\widehat{F}$ изоморфно факторкольцу $\widehat{G}[x]/\widehat{f}(x)\widehat{G}[x]$, а последнее является полем. При этом из $\theta(\widehat{G}) = G \subset F$ и $\theta(d + T_\chi) = a \in F$ следует, что $\theta(\widehat{F}) \subset F$ и, значит, $\widehat{F} \in \mathcal{F}$. Поскольку $a = \theta(d + T_\chi) \in \theta(\widehat{F})$ и $a \notin G = \theta(\widehat{G})$, то $\widehat{G} \neq \widehat{F}$. Вновь получаем противоречие с максимальностью $\widehat{G}$ в $\mathcal{F}$.

Итак, мы показали, что $G = F$, т. е. $\theta|_{\widehat{G}}$ является изоморфизмом между полями $\widehat{G}$ и F. Поэтому кольцо $R' \subset K_\chi$, определяемое условием $R'/T_\chi = \widehat{G}$, есть csp-кольцо, которое имеет $F \cong \widehat{G}$ своим базовым полем. ∎

Ввиду леммы 13.6 и теоремы 13.7 справедлива

Теорема 13.8. *Пусть* $L_\varphi = L_\chi$ *и* F — *некоторое поле. Эквивалентны следующие условия*:

1) F — *базовое поле некоторого* csp-*кольца кохарактеристики* χ;

2) F — *базовое поле некоторого* csp-*кольца кохарактеристики* φ.

Ввиду теоремы 13.8 при исследовании базовых полей csp-колец вместо общей ситуации (13.1) мы далее ограничимся случаем регулярных csp-колец, обозначая

$$K_L = \prod_{p\in L} \mathbf{Z}_p, \qquad T_L = \bigoplus_{p\in L} \mathbf{Z}_p \subset K_L, \tag{13.4}$$

где L — бесконечное множество простых чисел.

Ниже через L будет обозначаться произвольное бесконечное множество натуральных чисел. Множество K_L определим условием (13.4); сомножитель $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ теперь будет, вообще говоря, уже не полем, а кольцом. Напомним (см. §1), что K_L является топологическим пространством, на котором задана полная вероятностная мера, обозначенная нами через mes.

Через π_p обозначим проекцию из K_L на $\mathbf{Z}_p$; введём на пространстве K_L отношение “$\approx$”, полагая $r \approx d$ в том и только в том случае, когда существует бесконечно много таких $p \in L$, для которых $\pi_p(r) = \pi_p(d)$. Через $\mathfrak{ie}_L$ (от слов «infinitely equal») обозначаем наименьшую мощность подмножества $B \subset K_L$, обладающего следующим свойством:

$$\text{для всякого } r \in K_L \text{ существует } d \in B \text{ такое, что } r \approx d. \tag{13.5}$$

Очевидно, $\mathfrak{c} \geqslant \mathfrak{ie}_L$. Установим теперь некоторые свойства кардинальной характеристики $\mathfrak{ie}_L$.

Предложение 13.9. *Для всякого бесконечного подмножества* $L \subset \mathbf{N}$ *выполнено* $\mathfrak{ie}_L \geqslant \aleph_1$.

Доказательство. Допустим, что $B = \{d_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ есть какое-либо счётное подмножество множества K_L. Выберем $r \in K_L$ так, чтобы для всякого $p \in L$

элемент $\pi_p(r)$ не совпадал с $\pi_p(d_i)$ ни для какого натурального $i < p$. В этом случае для каждого $i \in \mathbf{N}$ при всех $p > i$ выполнено $\pi_p(r) \neq \pi_p(d_i)$ и, значит, будет иметь место соотношение $r \not\approx d_i$. Итак, счётное множество B не может обладать свойством (13.5), отсюда $\mathfrak{ie}_L \geqslant \aleph_1$. ■

Символом z_L мы будем обозначать возрастающую биекцию из $\mathbf{N}$ на L. В дальнейшем использование любого из символов $\mathfrak{ie}_L$, z_L, K_L автоматически будет означать, что множество L бесконечно.

Лемма 13.10. *Если для множеств L и X можно найти такое число $s \in \mathbf{N}$, что $z_L(si) \geqslant z_X(i)$ при всех $i \in \mathbf{N}$, то $\mathfrak{ie}_L \geqslant \mathfrak{ie}_X$.*

Доказательство. Введём обозначения $Y = \{z_L(1), z_L(2), \dots, z_L(s-1)\}$ и $Y_j = \{z_L(si+j) \mid i \in \mathbf{N}\}$, где $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$. В этом случае

$$L = Y \cup Y_0 \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_{s-1},$$

поэтому можно считать, что

$$K_L = \Big(\prod_{p \in Y} \mathbf{Z}_p\Big) \times K_{Y_0} \times K_{Y_1} \times \dots \times K_{Y_{s-1}}.$$

Через $\bar{\theta}_j$, где $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, обозначим проекцию из K_L на K_{Y_j}.

При любых $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ и $i \in \mathbf{N}$ имеем $z_X(i) \leqslant z_L(si) \leqslant z_L(si+j)$, т. е. существует сюръекция из $\mathbf{Z}/z_L(si+j)\,\mathbf{Z}$ на $\mathbf{Z}/z_X(i)\,\mathbf{Z}$. Тогда для всякого $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ можно построить сюръективную функцию $\delta_j \colon K_{Y_j} \to K_X$, сохраняющую отношение “$\approx$”.

Пусть B — какое-нибудь подмножество пространства K_L мощности $\mathfrak{ie}_L$ со свойством (13.5). Положим

$$B' = \delta_0(\bar{\theta}_0(B)) \cup \delta_1(\bar{\theta}_1(B)) \cup \dots \cup \delta_{s-1}(\bar{\theta}_{s-1}(B)),$$

тогда $B' \subset K_X$ и $|B'| \leqslant s \cdot |B| = s \cdot \mathfrak{ie}_L = \mathfrak{ie}_L$.

Зафиксируем элемент $r' \in K_X$. Ввиду сюръективности отображений $\bar{\theta}_j$ и δ_j существует элемент $r \in K_L$, для которого при любом $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$

справедливо равенство $\delta_j(\bar\theta_j(r)) = r'$. В силу выбора множества B мы можем найти элемент $d \in B$ со свойством $r \approx d$. Поскольку Y и $\{0, 1, \dots, s-1\}$ суть конечные множества, то при некотором $j \in \{0, 1, \dots, s-1\}$ для бесконечного множества значений $p \in Y_j$ выполнено $\pi_p(r) = \pi_p(d)$. Поэтому для элементов $\bar\theta_j(r), \bar\theta_j(d) \in K_{Y_j}$ мы имеем $\bar\theta_j(r) \approx \bar\theta_j(d)$, а так как отображение δ_j сохраняет отношение “$\approx$”, то элементы $r' = \delta_j(\bar\theta_j(r)) \in K_X$ и $\delta_j(\bar\theta_j(d)) \in B'$ таковы, что $r' \approx \delta_j(\bar\theta_j(d))$.

Итак, для всякого $r' \in K_X$ найдётся элемент $d' \in B'$ такой, что $r' \approx d'$. Следовательно, $\mathfrak{ie}_X \leqslant |B'|$, откуда $\mathfrak{ie}_X \leqslant \mathfrak{ie}_L$. ■

Следствие 13.11. *Если $z_X \prec z_L$, то $\mathfrak{ie}_X \leqslant \mathfrak{ie}_L$.*

Доказательство. Если $z_X \prec z_L$, то можно найти натуральное число s такое, что при всех $i \geqslant s$ выполняется $z_X(i) < z_L(i)$. Тогда для любого $i \in \mathbf{N}$ имеем $si \geqslant s$ и, далее, $z_X(i) \leqslant z_X(si) < z_L(si)$, после чего остаётся применить лемму 13.10. ■

Для $r \in K_L$ через $D(r)$ мы будем обозначать множество таких $d \in K_L$, что $\pi_p(r) \neq \pi_p(d)$ почти для всех $p \in L$; очевидно, что подмножество $B \subset K_L$ обладает свойством (13.5) в точности тогда, когда при каждом $r \in K_L$ имеет место соотношение $B \not\subset D(r)$. Следующий факт достаточно хорошо известен для топологических пространств, аналогичных пространству K_L.

Лемма 13.12. *Для любого $r \in K_L$ множество $D(r)$ есть множество первой категории.*

Доказательство. Множество $D_i = \{d \in K_L \mid \pi_p(r) \neq \pi_p(d) \text{ при } p > i\}$, как несложно видеть, является замкнутым и не содержит внутренних точек, т. е. нигде не плотно в K_L; остаётся заметить, что множество $D(r)$ совпадает с объединением $\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} D_i$ и, значит, будет множеством первой категории. ■

Предложение 13.13. *При любом $L \subset \mathbf{N}$ выполнено $\mathfrak{ie}_L \leqslant \mathsf{non}(\mathcal{M})$.*

Доказательство. Пусть $B \subset K_L$ есть какое-нибудь множество второй категории с мощностью, равной $\mathsf{non}(\mathcal{M})$. Так как $D(r)$ является множеством первой категории, имеем $B \not\subset D(r)$ для всякого $r \in K_L$. Поэтому B обладает свойством (13.5) и, следовательно, $\mathfrak{ie}_L \leqslant |B| = \mathsf{non}(\mathcal{M})$. ■

Для доказательства предложения 13.14 нам будет нужен классический результат из теории меры [32, 38]:

Лемма Бореля — Кантелли. *Если* mes — *некоторая вероятностная мера на пространстве* Ω *и* G_i *(где* $i \in \mathbf{N}$*)* — mes-*измеримые подмножества этого пространства, то для множества*

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} G_i$$

справедливы следующие утверждения:

(а) *если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{mes}(G_i)$ *сходится, то* $\mathrm{mes}(G) = 0$;

(б) *если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{mes}(G_i)$ *расходится и, кроме того,*

$$\mathrm{mes}\Big(\bigcap_{i\in I} G_i\Big) = \prod_{i\in I} \mathrm{mes}(G_i)$$

для любого непустого конечного подмножества $I \subset \mathbf{N}$ *(т. е. множества* G_i *независимы в совокупности), то* $\mathrm{mes}(G) = 1$.

Предложение 13.14. *Если ряд*

$$\sum_{p\in L} \frac{1}{p} \tag{13.6}$$

сходится, то $\mathrm{mes}(D(r)) = 1$ *для любого* $r \in K_L$; *если ряд* (13.6) *расходится, то* $\mathrm{mes}(D(r)) = 0$ *для любого* $r \in K_L$.

Доказательство. Зафиксируем некоторый элемент $r \in K_L$. Применяя лемму Бореля — Кантелли к пространству $\Omega = K_L$ и измеримым множествам

$G_p = \{d \in K_L \mid \pi_p(r) = \pi_p(d)\}$, где $p \in L$ (легко убедиться, что множества G_p независимы в совокупности), получаем нужные утверждения, так как имеют место равенства $\mathrm{mes}(G_p) = \frac{1}{p}$ и $G = K_L \setminus D(r)$. ■

Предложение 13.15. *Если ряд* (13.6) *сходится, то* $\mathfrak{ie}_L \geqslant \mathsf{cov}(\mathcal{N})$.

Доказательство. Обозначим через B подмножество пространства K_L мощности $\mathfrak{ie}_L$, обладающее свойством (13.5). Для всякого $r \in K_L$ существует элемент $d \in B$ такой, что $r \approx d$, т. е. $r \in K_L \setminus D(d)$. Поэтому

$$K_L = \bigcup_{d \in B} (K_L \setminus D(d)).$$

Так как в силу предложения 13.14 каждое множество $K_L \setminus D(d)$ будет иметь меру нуль, мы получаем, что $\mathsf{cov}(\mathcal{N}) \leqslant |B| = \mathfrak{ie}_L$. ■

Следующее свойство было подсказано автору Блассом.

Предложение 13.16. *Если ряд* (13.6) *расходится, то* $\mathfrak{ie}_L \leqslant \mathsf{non}(\mathcal{N})$.

Доказательство. Через B обозначим подмножество пространства K_L мощности $\mathsf{non}(\mathcal{N})$, не являющееся множеством нулевой меры. Так как ввиду предложения 13.14 множества $D(r)$ имеют меру нуль, то при каждом $r \in K_L$ выполнено $B \not\subset D(r)$. Следовательно, B обладает свойством (13.5) и, значит, $\mathfrak{ie}_L \leqslant |B| = \mathsf{non}(\mathcal{N})$. ■

Замечание. Из доказанного предложения, в частности, получаем, что условие $\mathfrak{ie}_L \leqslant \mathsf{non}(\mathcal{N})$ выполнено, если $L = \mathbf{P}$.

Теорема 13.17. (а) *Если* $\mathfrak{d} < \mathsf{non}(\mathcal{M})$, *то* $\sup\limits_L \mathfrak{ie}_L = \mathsf{non}(\mathcal{M})$.

(б) *Если* $\mathfrak{d} < \mathrm{cf}(\mathsf{non}(\mathcal{M}))$, *то* $\mathfrak{ie}_L = \mathsf{non}(\mathcal{M})$ *для некоторого* $L \subset \mathbf{N}$.

Доказательство. Зафиксируем какое-то подмножество $\{\Pi_\xi\}_{\xi \in \Gamma} \subset \mathcal{IP}$ с тем свойством, что каждое разбиение из $\mathcal{IP}$ мажорируется некоторым разбиением Π_ξ, причём $|\Gamma| = \mathfrak{d}$ (см. теорему 1.2). Мы можем считать, не умаляя общности, что для всякого разбиения $\Pi_\xi = \{I_{j,\xi}\}_{j\in\mathbf{N}}$ и всякого натурального числа j выполнено $|I_{j,\xi}| < |I_{j+1,\xi}|$.

Рассмотрим множество $X_\xi = \left\{2^{|I_{j,\xi}|} \mid j \in \mathbf{N}\right\}$. Существует естественная биекция δ_ξ из пространства K_{X_ξ} на пространство

$$2^{I_{1,\xi}} \times 2^{I_{2,\xi}} \times 2^{I_{3,\xi}} \times \ldots ,$$

которое мы отождествим с $2^{\mathbf{N}}$. Через B_ξ обозначим некоторое подмножество пространства K_{X_ξ}, имеющее мощность $\mathfrak{ie}_{X_\xi}$ и такое, что при каждом $r \in K_{X_\xi}$ существует элемент $d \in B_\xi$ со свойством $r \approx d$. Положим

$$H = \bigcup_{\xi\in\Gamma} \delta_\xi(B_\xi) \subset 2^{\mathbf{N}}.$$

Зафиксируем функцию $h \in 2^{\mathbf{N}}$. Для каждого $\xi \in \Gamma$ и $r = \delta_\xi^{-1}(h) \in K_{X_\xi}$ существует элемент $d \in B_\xi$ такой, что $r \approx d$. Отсюда следует, что множество значений $j \in \mathbf{N}$, при которых сужения функций h и $h' = \delta_\xi(d) \in H$ на интервал $I_{j,\xi}$ совпадают, бесконечно. Таким образом, для каждой функции $h \in 2^{\mathbf{N}}$ и каждого разбиения $\Pi_\xi = \{I_{j,\xi}\}_{j\in\mathbf{N}}$ найдётся функция $h' \in H$ со свойством, что для бесконечного множества значений $j \in \mathbf{N}$ сужения h и h' на интервал $I_{j,\xi} \in \Pi_\xi$ будут совпадать. Поскольку всякое разбиение из $\mathcal{IP}$ мажорируется каким-нибудь из разбиений Π_ξ, то получаем, что для любой функции $h \in 2^{\mathbf{N}}$ и любого разбиения $\Pi = \{J_j\}_{j\in\mathbf{N}} \in \mathcal{IP}$ существует функция $h' \in H$, действие которой на интервале J_j будет совпадать с действием h на том же интервале для бесконечного множества значений $j \in \mathbf{N}$. В силу теоремы 1.3 это значит, что H есть множество второй категории. Поэтому

$$\mathsf{non}(\mathcal{M}) \leqslant |H| \leqslant \sum_{\xi\in\Gamma} |B_\xi| = \sum_{\xi\in\Gamma} \mathfrak{ie}_{X_\xi} \leqslant \mathfrak{d} \cdot \sup_L \mathfrak{ie}_L.$$

Учитывая доказанное ранее в предложении 13.13 соотношение $\mathfrak{ie}_L \leqslant \mathsf{non}(\mathcal{M})$, получаем утверждения (а) и (б). ■

Следствие 13.18. *Если* $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}$, *то* $\sup_L \max(\mathfrak{ie}_L, \mathfrak{b}) = \mathsf{non}(\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть выполнено $\mathfrak{d} = \mathfrak{b}$. Левая часть доказываемого соотношения не превосходит $\mathsf{non}(\mathcal{M})$ ввиду схемы (1.2) и предложения 13.13. Если $\mathfrak{b} = \mathsf{non}(\mathcal{M})$, то мы немедленно получаем нужное равенство, поскольку $\max(\mathfrak{ie}_L, \mathfrak{b}) = \mathsf{non}(\mathcal{M})$ при любом L. Если же $\mathfrak{b} < \mathsf{non}(\mathcal{M})$, то

$$\sup_L \max(\mathfrak{ie}_L, \mathfrak{b}) \geqslant \sup_L \mathfrak{ie}_L = \mathsf{non}(\mathcal{M})$$

(в силу теоремы 13.17), что и требовалось. ■

Следствие 13.19. *Неравенство* $\mathfrak{ie}_L > \mathsf{cov}(\mathcal{N})$ *совместимо с* ZFC.

Доказательство. Из замечания, сделанного после схемы (1.2), видно, что равенства $\mathsf{non}(\mathcal{M}) = \aleph_2$ и $\mathfrak{d} = \mathfrak{b} = \mathsf{cov}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ будут совместимы с ZFC. Если они выполнены, то по следствию 13.18 имеем $\mathfrak{ie}_L = \aleph_2$ для подходящего множества L. ■

Следующая теорема показывает, что $\mathfrak{ie}_L$, как и каждая характеристика из диаграммы Цихоня, имеет упомянутое перед определением 1.4 свойство.

Теорема 13.20. *Из аксиомы Мартина вытекает, что для всех* $L \subset \mathbf{N}$ *выполнено* $\mathfrak{ie}_L = \mathfrak{c}$.

Доказательство. Пусть при любом $p \in L$ задано множество $A_p \subset \mathbf{Z}_p$. Говорим, что последовательность $(A_p)_{p\in L}$ является s*-ограниченной*, если для всякого $p \in L$ выполнено $|A_p| \leqslant \min(s, p-1)$; обозначим через W множество всех подмножеств пространства K_L, которые представимы в виде

$$C = \prod_{p\in L} (\mathbf{Z}_p \setminus A_p), \tag{13.7}$$

где последовательность $(A_p)_{p\in L}$ является s-ограниченной хотя бы для одного значения $s \in \mathbf{N}$. Заметим, что множества, принадлежащие W, замкнуты [41] и что выполнено $\varnothing \notin W$.

Пусть $\{C_\xi\}_{\xi\in\Delta}$ — несчётное подмножество множества W, тогда

$$C_\xi = \prod_{p\in L} (\mathbf{Z}_p \setminus A_{p,\xi}),$$

где $(A_{p,\xi})_{p\in L}$ есть s_ξ-ограниченная последовательность. Из $|\Delta| > \aleph_0$ вытекает существование бесконечного числа различных множеств C_ξ, имеющих общее $s_\xi = s$. Поэтому найдутся различные $\xi, \eta \in \Delta$, для которых $s_\xi = s_\eta = s$ и при каждом $p \leqslant 2s$ выполнено равенство $A_{p,\xi} = A_{p,\eta}$. Обозначим $A_p = A_{p,\xi} \cup A_{p,\eta}$ для всякого $p \in L$.

Если $p \leqslant 2s$, то, очевидно,

$$|A_p| = |A_{p,\xi}| \leqslant \min(s, p-1) \leqslant \min(2s, p-1).$$

В случае $p > 2s$ имеем

$$|A_p| \leqslant |A_{p,\xi}| + |A_{p,\eta}| \leqslant 2\min(s, p-1) = 2s = \min(2s, p-1).$$

Следовательно, $(A_p)_{p\in L}$ есть $(2s)$-ограниченная последовательность. Поэтому выполняются соотношения

$$C_\xi \cap C_\eta = \prod_{p\in L}\big(\mathbf{Z}_p \setminus (A_{p,\xi} \cup A_{p,\eta})\big) = \prod_{p\in L}(\mathbf{Z}_p \setminus A_p) \in W$$

и, таким образом, $(W, \subset)$ удовлетворяет у. с. ц.

Допустим, что $B = \{d_\xi\}_{\xi\in\Gamma}$ — подмножество пространства K_L и $|\Gamma| < \mathfrak{c}$. Обозначим $W_\xi = \{C' \in W \mid C' \subset D(d_\xi)\}$ и $\mathcal{W} = \{W_\xi \mid \xi \in \Gamma\}$. Убедимся, что каждое из множеств W_ξ плотно в W.

Пусть $C \in W$, тогда для некоторой s-ограниченной последовательности $(A_p)_{p\in L}$ выполнено равенство (13.7). Для $p \in L$ обозначим

$$A'_p = \begin{cases} A_p, & \text{если } p \leqslant s+1, \\ A_p \cup \{\pi_p(d_\xi)\}, & \text{если } p > s+1. \end{cases}$$

Если $p \leqslant s+1$, то справедливы соотношения

$$|A'_p| = |A_p| \leqslant \min(s, p-1) \leqslant \min(s+1, p-1).$$

Если же $p > s+1$, то имеем

$$|A'_p| \leqslant |A_p| + 1 \leqslant \min(s, p-1) + 1 = s+1 = \min(s+1, p-1).$$

Итак, $(A'_p)_{p\in L}$ есть $(s+1)$-ограниченная последовательность. Таким образом, для множества

$$C' = \prod_{p\in L}(\mathbf{Z}_p \setminus A'_p) \subset C \cap D(d_\xi)$$

выполнено $C' \in W_\xi$, т. е. W_ξ плотно в W.

В силу аксиомы Мартина мы можем найти $\mathcal{W}$-генерическое множество $W' \subset W$; обозначим пересечение всех входящих в W' множеств символом D. При любом $\xi \in \Gamma$ найдётся множество $C_\xi \in W_\xi \cap W'$, обладающее, очевидно, свойством $D \subset C_\xi \subset D(d_\xi)$. С учётом условия 2) из определения 1.5, а также соотношения $\varnothing \notin W'$ можно утверждать, что пересечение всякого конечного семейства принадлежащих W' множеств непусто. Значит, ввиду замкнутости всех входящих в W' множеств и компактности пространства K_L имеет место неравенство $D \neq \varnothing$ (см. [41]).

Зафиксируем некоторый элемент $r \in D$. Для каждого $\xi \in \Gamma$ выполнено $r \in D(d_\xi)$, т. е. условие $r \approx d_\xi$ не имеет места. Значит, множество B не может обладать свойством (13.5), поэтому $\mathfrak{ie}_L = \mathfrak{c}$. ■

Замечание. Для каждого бесконечного множества $X \subset \mathbf{N}$ существует множество $L \subset \mathbf{P}$ такое, что выполнено $z_X \prec z_L$; тогда ввиду следствия 13.11 и предложения 13.13 будем иметь $\mathfrak{ie}_X \leqslant \mathfrak{ie}_L \leqslant \mathsf{non}(\mathcal{M})$. Отсюда вытекает, что утверждения теоремы 13.17 и следствий 13.18 и 13.19 остаются в силе, когда в качестве множества L рассматриваются только бесконечные подмножества множества $\mathbf{P}$.

Завершая разговор о мере и категории, заметим, что ввиду доказанных ранее результатов для всякого csp-кольца $R \subset K_L$ множество R в некотором смысле является «малым». Точнее, имеет место

Теорема 13.21. *Пусть* $L \subset \mathbf{P}$ *и* $R \subset K_L$ *есть* csp-*кольцо. Тогда*:

(а) R *является множеством первой категории*;

(б) *если ряд* (13.6) *расходится*, *то* $\mathrm{mes}(R) = 0$.

Доказательство. Из пункта (в) предложения 13.2 следует включение $R \setminus T_L \subset D(0)$ (где 0 — нулевой элемент кольца K_L), поэтому $R \subset T_L \cup D(0)$. Из равенства $|T_L| = \aleph_0$ ясно, что T_L имеет меру нуль и является множеством первой категории; остаётся только применить к множеству $D(0)$ лемму 13.12 и предложение 13.14. ■

Далее снова считаем, что L — какое-нибудь бесконечное подмножество множества $\mathbf{P}$.

Предложение 13.22. *Каждое из следующих неравенств совместимо с системой аксиом* ZFC:

(а) $\mathfrak{ie}_L > \mathfrak{ie}_X$;

(б) $\mathfrak{ie}_L < \mathfrak{b}$;

(в) $\mathfrak{ie}_L > \mathfrak{b}$.

Доказательство. (а) Пусть выполняется $X = \mathbf{P}$, и пусть бесконечное множество $L \subset \mathbf{P}$ выбрано так, чтобы ряд (13.6) сходился. Ввиду замечания, сделанного нами после схемы (1.2), соотношения $\mathsf{non}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ и $\mathsf{cov}(\mathcal{N}) = \aleph_2$ совместимы с ZFC; если они справедливы, то в силу предложений 13.9, 13.15 и 13.16 имеем $\mathfrak{ie}_L \geqslant \mathsf{cov}(\mathcal{N}) > \aleph_1 = \mathfrak{ie}_X$.

(б) Пусть $L = \mathbf{P}$. Если $\mathsf{non}(\mathcal{N}) = \aleph_1$ и $\mathfrak{b} = \aleph_2$ (эти условия совместимы с системой аксиом ZFC), то $\mathfrak{ie}_L = \aleph_1 < \mathfrak{b}$ по предложениям 13.9 и 13.16.

(в) Выберем $L \subset \mathbf{P}$ таким, чтобы ряд (13.6) сходился. Равенства $\mathfrak{b} = \aleph_1$ и $\mathsf{cov}(\mathcal{N}) = \aleph_2$ совместимы с ZFC; если эти равенства справедливы, то ввиду предложения 13.15 получаем $\mathfrak{ie}_L \geqslant \mathsf{cov}(\mathcal{N}) > \mathfrak{b}$. ■

Через π обозначаем естественный эпиморфизм $K_L \to K_L/T_L$; через π_p, как и раньше, обозначается проекция $K_L \to \mathbf{Z}_p$. Под π_p^x понимаем кольцевой гомоморфизм $K_L[x] \to \mathbf{Z}_p[x]$, сопоставляющий каждому $\bar{\mu}(x) \in K_L[x]$ многочлен, коэффициенты которого суть образы соответствующих коэффициентов многочлена $\bar{\mu}(x)$ при отображении π_p. Аналогично задаётся гомоморфизм π^x

с областью определения $K_L[x]$, индуцированный отображением π. Очевидно, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 13.23. *Пусть* $\bar{\mu}(x) \in K_L[x]$ *и* $r = (r_p)_{p \in L} \in K_L$. *Тогда*:

(а) *если* $\mu = \pi^x(\bar{\mu})$, *то* $\mu(r + T_L) = \bar{\mu}(r) + T_L$;

(б) *если* $\mu_p = \pi_p^x(\bar{\mu})$, *то выполнено* $\bar{\mu}(r) = \big(\mu_p(r_p)\big)_{p \in L}$, *т. е. для всякого* $p \in L$ *справедливо равенство* $\pi_p(\bar{\mu}(r)) = \mu_p(\pi_p(r))$.

Теорема 13.24. *Пусть факторкольцо* K_L/T_L *содержит подкольцо* F, *являющееся полем и такое, что выполнено* $|F| < \max(\mathfrak{ie}_L, \mathfrak{b})$. *В этом случае естественное кольцевое вложение* $F \to K_L/T_L$ *продолжается до вложения* $F(x) \to K_L/T_L$, *где* $F(x)$ — *простое трансцендентное расширение поля* F.

Доказательство. Пусть $\{v_\xi(x)\}_{\xi \in \Gamma}$ (где $|\Gamma| = |F|$) есть множество всех унитарных многочленов кольца $F[x]$. Для всякого ξ зафиксируем унитарный многочлен $\overline{v}_\xi(x) \in K_L[x]$ такой, что $\pi^x(\overline{v}_\xi) = v_\xi$. Рассмотрим два случая.

I. Пусть $|F| < \mathfrak{b}$. Ясно, что почти для всех $i \in \mathbf{N}$ выполняется $v_\xi(i) \neq 0$ и поэтому $\overline{v}_\xi(i) + T_L = v_\xi(i)$ есть ненулевой элемент поля F. Из обратимости этого элемента следует, что $\pi_p(\overline{v}_\xi(i)) \neq 0$ при почти всех $p \in L$.

Построим теперь функцию $z_\xi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Если $v_\xi(i) = 0$, полагаем $z_\xi(i) = 1$. Если же $v_\xi(i) \neq 0$, то мы выберем $z_\xi(i) \in \mathbf{N}$ таким образом, чтобы при любом $p \in L$ из условия $p > z_\xi(i)$ следовало $\pi_p(\overline{v}_\xi(i)) \neq 0$.

Рассмотрим множество функций $\{z_\xi \mid \xi \in \Gamma\} \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Поскольку $|\Gamma| < \mathfrak{b}$, то для некоторой функции $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ при всех $\xi \in \Gamma$ выполнено условие $z_\xi \prec z$. Будем считать, что z — строго возрастающая функция (очевидно, что можно выбрать её обладающей этим свойством). Отображение $\kappa\colon L \to \mathbf{N}$ определим следующим образом:

$$\kappa(p) = \begin{cases} i, & \text{если } z(i) \leqslant p < z(i+1), \text{ где } i \in \mathbf{N}, \\ 1, & \text{если } p < z(1). \end{cases} \tag{13.8}$$

Зафиксируем $\xi \in \Gamma$. Убедимся, что справедливы свойства (i) и (ii).

(i) *Почти для всех* $p \in L$ *выполнено* $v_\xi(\kappa(p)) \neq 0$.

Утверждение вытекает из того, что каждое своё значение κ принимает лишь конечное число раз, а многочлен $v_\xi(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ может иметь только конечное число корней в F. ★

(ii) *Почти для всех* $p \in L$ *элемент* $\overline{v}_\xi(\kappa(p))$ *имеет* p*-координату* $\neq 0$.

В самом деле, существует $i_\xi \in \mathbf{N}$ такое, что $z_\xi(i) < z(i)$ при всех $i \geqslant i_\xi$. Пусть $p \geqslant z(i_\xi)$ и $v_\xi(\kappa(p)) \neq 0$ (этим соотношениям удовлетворяют почти все числа $p \in L$). Тогда при некотором $i \geqslant i_\xi$ будет выполнено $z(i) \leqslant p < z(i+1)$ и, следовательно, $z_\xi(\kappa(p)) = z_\xi(i) < z(i) \leqslant p$; поэтому (учитывая свойства z_ξ) получаем, что элемент $\overline{v}_\xi(\kappa(p))$ имеет ненулевую p-координату. ★

Положим $r = \big(\kappa(p) + p\mathbf{Z}\big)_{p \in L} \in K_L$ и $a = r + T_L \in K_L/T_L$. Далее, вновь зафиксируем произвольное $\xi \in \Gamma$. Мы знаем, что почти для всех чисел $p \in L$ элемент $\overline{v}_\xi(\kappa(p)) \in K_L$ имеет ненулевую p-координату (равную p-координате $\pi_p(\overline{v}_\xi(r))$ элемента $\overline{v}_\xi(r) \in K_L$). Итак, у $\overline{v}_\xi(r)$ почти все координаты не равны нулю, поэтому $\overline{v}_\xi(r) + T_L = v_\xi(a)$ будет обратимым элементом кольца K_L/T_L и, в частности, $v_\xi(a) \neq 0$. Множество $F(a) \subset K_L/T_L$ зададим равенством

$$F(a) = \Big\{ u(a) \cdot \big(v(a)\big)^{-1} \;\Big|\; u(x), v(x) \in F[x]; \;\; v(x) \text{ — унитарный} \Big\}. \qquad (13.9)$$

Из наших рассуждений следует, что $F(a)$ — поле, F-изоморфное полю $F(x)$, причём элемент a трансцендентен над F.

II. Пусть теперь выполняется соотношение $|F| < \mathfrak{ic}_L$. Заметим, что при любом $p \in L$ многочлен $\pi_p^x(\overline{v}_\xi) \in \mathbf{Z}_p[x]$ будет унитарным, а его степень равна числу $s_\xi = \deg v_\xi$. В частности, из этого следует, что многочлен $\pi_p^x(\overline{v}_\xi)$ имеет не более s_ξ корней в поле $\mathbf{Z}_p$. Поэтому существует состоящее из s_ξ элементов подмножество $B_\xi \subset K_L$ с тем свойством, что ни для какого $p \in L$ множество $\mathbf{Z}_p \setminus \{\pi_p(d) \mid d \in B_\xi\}$ не содержит корней многочлена $\pi_p^x(\overline{v}_\xi)$.

Зададим множество $B \subset K_L$ равенством

$$B = \bigcup_{\xi \in \Gamma} B_\xi.$$

Из соотношений $|B| \leqslant \aleph_0 \cdot |\Gamma| = |\Gamma| < \mathfrak{ie}_L$ ясно, что множество B не обладает свойством (13.5). Поэтому найдётся элемент $r = (r_p)_{p \in L} \in K_L$ такой, что для всякого $d \in B$ при почти всех $p \in L$ выполнено $r_p \neq \pi_p(d)$.

Фиксируя $\xi \in \Gamma$, получаем, что почти для всех $p \in L$ элемент r_p входит в разность $\mathbf{Z}_p \setminus \{\pi_p(d) \mid d \in B_\xi\}$ и, следовательно, не может являться корнем многочлена $\pi_p^x(\overline{v}_\xi) \in \mathbf{Z}_p[x]$. Поскольку значение многочлена $\pi_p^x(\overline{v}_\xi)$ в точке r_p равно $\pi_p(\overline{v}_\xi(r))$, то почти для всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(\overline{v}_\xi(r)) \neq 0$.

Мы обозначим $a = r + T_L \in K_L/T_L$. Для любого индекса $\xi \in \Gamma$ элемент $\overline{v}_\xi(r) + T_L = v_\xi(a)$ обратим в K_L/T_L. Поэтому определяемое формулой (13.9) множество $F(a) \subset K_L/T_L$ является простым трансцендентным расширением поля F, что и требовалось. ■

Теорема 13.25. *Для каждой характеристики* χ *и каждого кардинала* $\mathfrak{M} \leqslant \max(\mathfrak{ie}_{L_\chi}, \mathfrak{b})$ *найдётся* csp-*кольцо кохарактеристики* χ, *имеющее своим базовым полем чисто трансцендентное расширение* $\mathbf{Q}(\mathfrak{M})$ *поля* $\mathbf{Q}$ *степени трансцендентности* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Положим $L = L_\chi$. Рассмотрим теперь множество $\mathcal{F}$ всех подколец кольца K_L/T_L, являющихся полями; имеем $\mathcal{F} \neq \varnothing$, поскольку выполнено $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}$. Пусть F есть какой-нибудь максимальный по включению элемент множества $\mathcal{F}$ (в силу леммы Цорна такой элемент всегда найдётся). Ввиду теоремы 13.24 поле F будет удовлетворять условию $|F| \geqslant \max(\mathfrak{ie}_L, \mathfrak{b})$. Несложно показать, что в этом случае $\mathbf{Q}(\mathfrak{M})$ можно вложить в F. Применяя теорему 13.8, мы видим, что $\mathbf{Q}(\mathfrak{M})$ есть базовое поле не только подходящего csp-кольца $R \subset K_L$, но и подходящего csp-кольца кохарактеристики χ. ■

§14. Алгебраически замкнутые базовые поля

В этом параграфе будут найдены условия, при которых алгебраически замкнутое поле служит базовым полем некоторого csp-кольца.

Следующий результат, представляющий собой частный случай теоремы о примитивном элементе (см. [3]), мы сформулируем в виде самостоятельной теоремы (она пригодится в дальнейшем).

Теорема 14.1. *Если выполняется* $\operatorname{char} F = 0$, *то каждое расширение, получаемое путём присоединения к полю* F *конечного числа алгебраических над* F *элементов, может быть получено путём присоединения к* F *одного алгебраического над* F *элемента.*

Пусть F — какое-либо поле. Через Irr_F будет обозначаться множество всех неприводимых унитарных многочленов кольца $F[y]$ (мы условимся, что многочлен нулевой степени не считается неприводимым); если F бесконечно, то множества Irr_F и $F[y]$, а также алгебраическое замыкание F^{alg} и простое трансцендентное расширение $F(x)$ поля F имеют ту же мощность, что и F.

Через $\mathcal{A}_p$ обозначаем поле p-адических чисел.

Предложение 14.2. *Для множества* $L \subset \mathbf{P}$ *равносильны условия*:

1) *всякий многочлен из* $Irr_{\mathbf{Q}}$ *почти для всех* $p \in L$ *будет иметь в* $\mathcal{A}_p$ *хотя бы один корень*;

2) *каждый многочлен* $f(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$ *почти для всех* $p \in L$ *будет иметь в* $\mathcal{A}_p$ *ровно* $\deg f$ *различных корней*;

3) *каждый многочлен* $f(y) \in \mathbf{Q}[y]$ *степени* $\geqslant 1$ *почти для всех* $p \in L$ *разлагается в* $\mathcal{A}_p[y]$ *в произведение* $\deg f$ *многочленов степени* 1;

4) *любой неприводимый в* $\mathbf{Z}[y]$ *многочлен степени* $\geqslant 1$ *почти для всех* $p \in L$ *будет иметь в* $\mathbf{Q}_p^*$ *хотя бы один корень*;

5) *любой неприводимый в* $\mathbf{Z}[y]$ *многочлен* $f(y)$ *степени* $\geqslant 1$ *почти для всех* $p \in L$ *будет иметь в* $\mathbf{Q}_p^*$ *ровно* $\deg f$ *различных корней*;

6) *каждый многочлен* $f(y) \in \mathbf{Z}[y]$ *степени* $\geqslant 1$ *почти для всех* $p \in L$ *разлагается в* $\mathbf{Q}_p^*[y]$ *в произведение* $\deg f$ *многочленов степени* 1;

7) *условие* 4) *с заменой кольца* $\mathbf{Q}_p^*$ *полем* $\mathbf{Z}_p$;

8) *условие* 5) *с заменой кольца* $\mathbf{Q}_p^*$ *полем* $\mathbf{Z}_p$;

9) *условие* 6) *с заменой кольца* $\mathbf{Q}_p^*$ *полем* $\mathbf{Z}_p$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что $f(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$ и $\deg f = s$; обозначим через F какое-то поле разложения многочлена $f(y)$. Пусть, далее, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in F$ суть корни многочлена $f(y)$, тогда из равенства $\operatorname{char} \mathbf{Q} = 0$ следует, что все эти корни различны [3].

Поскольку F получается из $\mathbf{Q}$ присоединением элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, то ввиду теоремы 14.1 из $\operatorname{char} \mathbf{Q} = 0$ вытекает, что $F = \mathbf{Q}(a)$, где a — корень подходящего многочлена $g(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$. Для всех j можно записать $\alpha_j = \mu_j(a)$, где $\mu_j(y) \in \mathbf{Q}[y]$ и $\deg \mu_j < \deg g$. Тогда $f(\mu_j(a)) = 0$, поэтому $f(\mu_j(y))$ будет делиться в кольце $\mathbf{Q}[y]$ на $g(y)$ при любом j.

Из условия 1) мы знаем, что найдётся множество $X \subset L$, для которого $|L \setminus X| < \aleph_0$ и при всех $p \in X$ многочлен $g(y)$ имеет корень $a_p \in \mathcal{A}_p$. Так как $\deg \mu_j < \deg g$ и $g(y)$ есть минимальный многочлен элемента a_p над полем $\mathbf{Q}$, то все элементы $\mu_1(a_p), \mu_2(a_p), \ldots, \mu_s(a_p) \in \mathcal{A}_p$ попарно различны. Далее, для любого j имеем равенство $f(\mu_j(a_p)) = 0$, поскольку $f(\mu_j(y))$ делится на $g(y)$. Многочлен $f(y)$ не может иметь в поле $\mathcal{A}_p$ более чем s корней, а значит, при каждом $p \in X$ этот многочлен имеет в $\mathcal{A}_p$ ровно $s = \deg f$ различных корней $\mu_1(a_p), \mu_2(a_p), \ldots, \mu_s(a_p)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Каждый многочлен $f(y) \in \mathbf{Q}[y]$ степени $\geqslant 1$ можно разложить в произведение неприводимых в кольце $\mathbf{Q}[y]$ многочленов. В силу условия 2) существует подмножество $X \subset L$ такое, что $|L \setminus X| < \aleph_0$ и при любом $p \in X$ все неприводимые сомножители многочлена $f(y)$ разлагаются в кольце $\mathcal{A}_p[y]$ на линейные множители; отсюда следует, что для всех $p \in X$ многочлен $f(y)$ также разлагается в $\mathcal{A}_p[y]$ на линейные множители.

3) $\Rightarrow$ 1). Зафиксируем какой-либо многочлен $f(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$. Он обладает свойством $\deg f \geqslant 1$ и, как следует из 3), разлагается в $\mathcal{A}_p[y]$ в произведение $\deg f$ многочленов степени 1 для всякого $p \in X$, где X есть подходящее подмножество из L такое, что $|L \setminus X| < \aleph_0$. Очевидно, отсюда вытекает, что при любом $p \in X$ многочлен $f(y)$ имеет хотя бы один корень в $\mathcal{A}_p$.

2) $\Rightarrow$ 5). Предположим, что многочлен

$$f(y) = \alpha_0 y^s + \alpha_1 y^{s-1} + \ldots + \alpha_s, \qquad \text{где } \alpha_0 \neq 0 \text{ и } s \geqslant 1,$$

неприводим в кольце $\mathbf{Z}[y]$. Тогда $f(y) = \alpha_0 g(y)$, где $g(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$ (см. [3]).

Пусть $p \in L$ — такое число, что многочлен $g(y)$ имеет в $\mathcal{A}_p$ ровно $\deg g$ различных корней и p не делит коэффициент α_0; ввиду 2) этим требованиям будут удовлетворять почти все $p \in L$. Очевидно, $\deg g = s$ различных корней многочлена $g(y)$, входящие в $\mathcal{A}_p$, являются также корнями многочлена $f(y)$. Если $a \in \mathcal{A}_p \setminus \mathbf{Q}_p^*$, то для некоторого $k \in \mathbf{N}$ выполняется $a \in p^{-k}\mathbf{Q}_p^* \setminus p^{1-k}\mathbf{Q}_p^*$. В этом случае мы имеем $f(a) - \alpha_0 a^s \in p^{k(1-s)}\mathbf{Q}_p^*$ и $\alpha_0 a^s \notin p^{k(1-s)}\mathbf{Q}_p^*$, а значит, $f(a) \neq 0$. Таким образом, все s различных корней многочлена $f(y)$, лежащие в поле $\mathcal{A}_p$, принадлежат $\mathbf{Q}_p^*$, что и требовалось.

5) $\Rightarrow$ 6). Каждый многочлен $f(y) \in \mathbf{Z}[y]$ степени $\geqslant 1$ можно разложить в произведение неприводимых в кольце $\mathbf{Z}[y]$ многочленов, имеющих степень, отличную от 0, и некоторого ненулевого целого числа. Из условия 5) следует существование множества $X \subset L$ такого, что $|L \setminus X| < \aleph_0$ и что для каждого $p \in X$ все полученные нами при разложении многочлена $f(y)$ неприводимые сомножители степени $\geqslant 1$ разлагаются в $\mathbf{Q}_p^*[y]$ на линейные множители; ясно тогда, что при любом $p \in X$ многочлен $f(y)$ тоже разлагается в кольце $\mathbf{Q}_p^*[y]$ на линейные множители.

6) $\Rightarrow$ 4). Зафиксируем какой-либо неприводимый в $\mathbf{Z}[y]$ многочлен $f(y)$ степени $\geqslant 1$. В силу условия 6) он разлагается в кольце $\mathbf{Q}_p^*[y]$ в произведение $\deg f$ многочленов степени 1 для произвольного $p \in X$, где X есть некоторое подмножество множества L со свойством $|L \setminus X| < \aleph_0$.

Пусть число $p \in L$ не является делителем старшего коэффициента $f(y)$ и выполняется $p \in X$ (указанным условиям удовлетворяют почти все $p \in L$). Если $\alpha y + a \in \mathbf{Q}_p^*[y]$ есть какой-то из множителей степени 1, которые входят в разложение многочлена $f(y)$ в кольце $\mathbf{Q}_p^*[y]$, то α не делится на p, поэтому $f(y)$ имеет корень $-\alpha^{-1}a \in \mathbf{Q}_p^*$.

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть $f(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$, тогда имеем $f(y) = \frac{m}{n}\, g(y)$, где $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$ и $g(y)$ — неприводимый многочлен кольца $\mathbf{Z}[y]$ (см. [3]). В силу 4) при почти всех $p \in L$ многочлен $g(y)$, а значит, и $f(y)$ имеет корень в $\mathbf{Q}_p^* \subset \mathcal{A}_p$.

5) $\Rightarrow$ 8). Пусть $f(y)$ — многочлен, неприводимый в кольце $\mathbf{Z}[y]$, и пусть $\deg f \geqslant 1$; очевидно, что $f(y)$ не может иметь в поле $\mathbf{Z}_p$ больше $\deg f$ корней (иначе все коэффициенты многочлена $f(y)$ будут кратны p). Многочлен $f(y)$ неприводим также в $\mathbf{Q}[y]$ (см. [3]), поэтому из равенства $\operatorname{char} \mathbf{Q} = 0$ вытекает взаимная простота многочленов $f(y)$ и $f'(y)$ в кольце $\mathbf{Q}[y]$. Значит, найдутся многочлены $u(y), v(y) \in \mathbf{Q}[y]$ такие, что $u(y)f(y) + v(y)f'(y) = 1$.

Допустим, что $p \in L$ не является делителем ни одного из знаменателей коэффициентов многочлена $v(y)$ и $f(y)$ имеет ровно $\deg f$ различных корней в кольце $\mathbf{Q}_p^*$; ввиду условия 5) указанным требованиям удовлетворяют почти все $p \in L$. Если $z_0 \in \mathbf{Q}_p^*$ — один из корней многочлена $f(y)$, то

$$1 = u(z_0)f(z_0) + v(z_0)f'(z_0) = v(z_0)f'(z_0).$$

Таким образом, $v(z_0)$ и $f'(z_0)$ — взаимно обратные целые p-адические числа. Поэтому $f'(z_0) \not\equiv 0 \pmod p$, откуда в силу леммы Гензеля вытекает, что для всякого другого корня $z \in \mathbf{Q}_p^*$ многочлена $f(y)$ выполняется $z \not\equiv z_0 \pmod p$. Тогда образы принадлежащих $\mathbf{Q}_p^*$ корней многочлена $f(y)$ при эпиморфизме $\mathbf{Q}_p^* \to \mathbf{Z}_p$ дадут $\deg f$ различных корней того же многочлена, лежащих в $\mathbf{Z}_p$.

Импликации 8) $\Rightarrow$ 9) $\Rightarrow$ 7) доказываются так же, как 5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 4).

7) $\Rightarrow$ 4). Пусть многочлен $f(y)$ такой, что $\deg f \geqslant 1$, неприводим в $\mathbf{Z}[y]$ и многочлены $u(y), v(y) \in \mathbf{Q}[y]$ выбраны точно так же, как в доказательстве импликации 5) $\Rightarrow$ 8).

Пусть, далее, $p \in L$ таково, что $f(y)$ имеет корень в $\mathbf{Z}_p$ и p не является делителем никакого из знаменателей коэффициентов многочленов $u(y)$, $v(y)$; в силу 7) этим условиям удовлетворяют почти все $p \in L$. Обозначим через z_0 любой элемент кольца $\mathbf{Q}_p^*$, переходящий при эпиморфизме $\mathbf{Q}_p^* \to \mathbf{Z}_p$ в корень многочлена $f(y)$, тогда $f(z_0) \equiv 0 \pmod p$. В силу того, что $u(z_0), v(z_0) \in \mathbf{Q}_p^*$, и равенства $u(z_0)f(z_0) + v(z_0)f'(z_0) = 1$ имеем $f'(z_0) \not\equiv 0 \pmod p$. Применяя лемму Гензеля, получаем, что $f(y)$ имеет корень в кольце $\mathbf{Q}_p^*$. ■

Для всякого $f(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$ введём обозначение

$$[f] = \bigl\{p \in \mathbf{P} \bigm| \text{многочлен } f \text{ имеет корень в поле } \mathcal{A}_p\bigr\}.$$

Справедлива следующая

Теорема 14.3 [52]. *При всех $f(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$ множество $[f]$ счётно.*

Предложение 14.4. *Для каждых $f_1(y), f_2(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$ найдётся такой многочлен $g(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$, что $[g] \subset [f_1] \cap [f_2]$.*

Доказательство. Пусть a_1 и a_2 суть некоторые корни соответственно многочленов $f_1(y)$ и $f_2(y)$ в (каком-то) алгебраическом замыкании $\mathbf{Q}^{alg}$ поля рациональных чисел. Из теоремы 14.1 следует соотношение $\mathbf{Q}(a_1, a_2) = \mathbf{Q}(a)$, где $a \in \mathbf{Q}^{alg}$ — корень подходящего многочлена $g(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$; можно записать $a_j = \mu_j(a)$, где $\mu_1(y), \mu_2(y) \in \mathbf{Q}[y]$. Так как выполнено $f_j(\mu_j(a)) = f_j(a_j) = 0$, то многочлены $f_j(\mu_j(y))$ делятся на $g(y)$.

Пусть $p \in [g]$, т. е. $\mathcal{A}_p$ содержит корень многочлена $g(y)$; мы обозначим этот корень через α. Так как $g(y)$ делит $f_j(\mu_j(y))$, выполняется соотношение $f_j(\mu_j(\alpha)) = 0$. Итак, для каждого $j \in \{1, 2\}$ элемент $\mu_j(\alpha) \in \mathcal{A}_p$ будет корнем многочлена $f_j(y)$, а значит, $p \in [f_j]$. Предложение доказано. ■

Определение 14.5. Всякое удовлетворяющее равносильным условиям предложения 14.2 бесконечное множество $L \subset \mathbf{P}$ мы назовём *универсальным* множеством.

Теорема 14.6. *Универсальные множества существуют.*

Доказательство. Так как $|Irr_{\mathbf{Q}}| = |\mathbf{Q}| = \aleph_0$, мы можем занумеровать многочлены из $Irr_{\mathbf{Q}}$, записав $Irr_{\mathbf{Q}} = \{f_i(y)\}_{i\in\mathbf{N}}$. Для всякого натурального i обозначим $W_i = [f_1] \cap [f_2] \cap \ldots \cap [f_i]$; ввиду теоремы 14.3 и предложения 14.4 все множества W_i бесконечны. Далее, для любого $p \in \mathbf{P}$ имеем $y^2 - p \in Irr_{\mathbf{Q}}$ и $p \notin [y^2 - p]$, поэтому справедливы соотношения

$$\bigcap_{i\in\mathbf{N}} W_i = \bigcap_{i\in\mathbf{N}} [f_i] = \varnothing.$$

Отсюда, как легко заметить, следует, что каждое множество, встречающееся в убывающей цепи

$$W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_i \supset \ldots,$$

может повториться в ней только конечное число раз; удаляя из этой цепи все повторы, получим бесконечную строго убывающую цепь

$$X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_i \supset \ldots$$

(ясно, что $X_i \subset W_i$ при всех $i \in \mathbf{N}$).

Мы введём обозначение $L = \{p_i \mid i \in \mathbf{N}\}$, где каждое p_i есть некоторый элемент множества $X_i \setminus X_{i+1}$. Пусть $f \in Irr_{\mathbf{Q}}$, тогда существует $i \in \mathbf{N}$ такое, что $f = f_i$. Имеем $X_i \subset W_i \subset [f]$ и, следовательно, $L \setminus [f] \subset \{p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}\}$, поэтому почти все $p \in L$ обладают свойством $p \in [f]$. Итак, L удовлетворяет условию 1) предложения 14.2, а это и значит, что L является универсальным множеством. ■

Замечание. Если зафиксировать некоторое универсальное множество, то, взяв произвольное континуальное почти дизъюнктное семейство счётных подмножеств этого множества (такое семейство обязательно найдётся в силу предложения 1.7), мы, как нетрудно показать, получим континуальное почти дизъюнктное семейство универсальных множеств. В частности, отсюда ясно, что универсальных множеств существует довольно много.

Для удобства сформулируем следующее утверждение в виде отдельной леммы (все необходимые для доказательства этой леммы факты содержатся, например, в [3]).

Лемма 14.7. *Пусть G — алгебраическое расширение поля F, и пусть* $\operatorname{char} F = 0$. *Если любой многочлен из Irr_F имеет хотя бы один корень в G, то G является алгебраическим замыканием поля F.*

Доказательство. Легко показать, что алгебраическое замыкание G^{alg} поля G является также и алгебраическим замыканием поля F. Зафиксируем многочлен $f(y) \in Irr_F$.

Через F' мы обозначим поле, получающееся из F присоединением всех корней многочлена $f(y)$, лежащих в поле G^{alg}; тогда $f(y)$ разлагается в $F'[y]$ в произведение многочленов степени 1. Ввиду теоремы 14.1 имеем равенство $F' = F(a)$, где $a \in G^{alg}$ — корень какого-то многочлена $g(y) \in Irr_F$. Поле F' является нормальным расширением поля F, поэтому $F' = F(\alpha)$ для всякого корня $\alpha \in G^{alg}$ многочлена $g(y)$. Взяв в качестве α тот корень $g(y)$, который принадлежит полю G, получаем $F' = F(\alpha) \subset G$.

Мы доказали тот факт, что всякий многочлен $f(y) \in Irr_F$ может быть разложен в кольце $G[y]$ на линейные множители. Следовательно, G является алгебраическим замыканием поля F. ■

Пусть символы π_p, π, π^x имеют тот же смысл, что и раньше (см. абзац перед леммой 13.23); через π_p^y и π^y обозначим гомоморфизмы колец, которые имеют своей областью определения $K_L[y]$ и индуцируются гомоморфизмами π_p и π соответственно. Легко показать, что ядро гомоморфизма π^y совпадает с множеством $T_L[y]$ всех многочленов, коэффициенты которых принадлежат идеалу T_L.

Лемма 14.8. *Если для многочлена $\bar{\mu}(y) \in K_L[y]$ выполнено $\pi^y(\bar{\mu}) = 0$, то почти для всех $p \in L$ справедливо равенство $\pi_p^y(\bar{\mu}) = 0$.*

Доказательство. Как было отмечено выше, из $\pi^y(\bar{\mu}) = 0$ следует, что все коэффициенты многочлена $\bar{\mu}(y)$ лежат в T_L. Множество тех чисел $p \in L$, для которых по крайней мере один из этих коэффициентов имеет ненулевую p-координату, конечно; для всех остальных $p \in L$ будет выполнено равенство $\pi_p^y(\bar{\mu}) = 0$, что и требовалось. ■

Заметим, что для каждого кольца R многочлены из кольца $\mathbf{Z}[y]$ можно рассматривать как элементы кольца $R[y]$.

Теорема 14.9. *Пусть L — универсальное множество. В этом случае алгебраическое замыкание поля $\mathbf{Q}$ вкладывается в факторкольцо K_L/T_L как подкольцо.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ есть множество всех полей F, являющихся одновременно подкольцами кольца K_L/T_L и алгебраическими расширениями поля $\mathbf{Q}$. Имеем $\mathcal{F} \neq \varnothing$, так как выполнено $\mathbf{Q} \in \mathcal{F}$. Пусть G — максимальный по включению элемент множества $\mathcal{F}$ (такой элемент обязательно существует ввиду леммы Цорна). Докажем, что любой многочлен из $Irr_{\mathbf{Q}}$ имеет хотя бы один корень в G (в силу леммы 14.7 отсюда будет следовать, что G является алгебраическим замыканием поля $\mathbf{Q}$).

Предположим, что это не так. Тогда существует многочлен $f(y) \in \mathbf{Z}[y]$ степени $\geqslant 1$, не имеющий корней в G. Рассматривая $f(y)$ как элемент кольца многочленов $G[y]$, запишем $f(y) = g(y)h(y)$, где $h(y) \in Irr_G$. Мы обозначаем через $\bar{g}(y)$ и $\bar{h}(y)$ какие-нибудь многочлены из $K_L[y]$ со свойствами $\pi^y(\bar{g}) = g$ и $\pi^y(\bar{h}) = h$ (при этом $\bar{h}(y)$ выберем унитарным).

Применяя лемму 14.8 к многочлену $\bar{\mu}(y) = f(y) - \bar{g}(y)\bar{h}(y) \in K_L[y]$, мы получим, что для всех $p \in X$, где X — подходящее множество со свойствами $X \subset L$ и $|L \setminus X| < \aleph_0$, в кольце $\mathbf{Z}_p[y]$ выполняется равенство $f = \pi_p^y(\bar{g})\pi_p^y(\bar{h})$. Так как $\bar{h}(y)$ — унитарный многочлен, то $\deg \pi_p^y(\bar{h}) = \deg \bar{h} = \deg h \geqslant 1$.

Если число $p \in L$ таково, что $p \in X$ и $f(y)$ разлагается в $\mathbf{Z}_p[y]$ в произведение многочленов степени 1 (так как множество L универсально, то этим требованиям удовлетворяют почти все $p \in L$), многочлен $\pi_p^y(\bar{h}) \in \mathbf{Z}_p[y]$ будет иметь в $\mathbf{Z}_p$ хотя бы один корень. Поэтому можно выбрать $d \in K_L$ так, чтобы почти для всех чисел $p \in L$ элемент $\pi_p(d) \in \mathbf{Z}_p$ был корнем многочлена $\pi_p^y(\bar{h})$ и, следовательно, выполнялось $h(d+T_L) = \bar{h}(d) + T_L = 0$. Зададим теперь F как наименьшее подкольцо факторкольца K_L/T_L, содержащее и G, и $d+T_L$. Это подкольцо F строго содержит G, так как корень $d+T_L$ многочлена $f(y)$ лежит в F; кроме того, ясно, что F изоморфно факторкольцу $G[y]/h(y)G[y]$, которое является полем. Поскольку F — алгебраическое расширение поля G, имеем $F \in \mathcal{F}$, что противоречит предположению о максимальности элемента $G \in \mathcal{F}$. Теорема доказана. ■

Теорема 14.10. *Пусть факторкольцо K_L/T_L содержит подкольцо F, являющееся алгебраически замкнутым полем и такое, что $|F| < \mathfrak{b}$. В этом случае естественное кольцевое вложение $F \to K_L/T_L$ можно продолжить до вложения алгебраического замыкания поля $F(x)$ в факторкольцо K_L/T_L, где $F(x)$ — простое трансцендентное расширение поля F.*

Доказательство. Через $F(x)$ обозначаем поле частных кольца многочленов $F[x]$. Пусть $Irr_{F(x)} = \{f_\xi(x,y)\}_{\xi\in\Gamma}$ (здесь $|\Gamma| = |F| < \mathfrak{b}$). Многочлены $f_\xi(x,y) \in F(x)[y]$ имеют в качестве своих коэффициентов элементы из $F(x)$, т. е. отношения многочленов кольца $F[x]$; для определённости будем считать, что все ненулевые коэффициенты представлены в виде несократимых дробей с унитарными числителями. Произведение знаменателей всех отличных от 0 коэффициентов многочлена $f_\xi(x,y)$ обозначим через $v_\xi(x)$. Заметим, что для всякого $v(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ многочлен $y + \frac{1}{v(x)}$ лежит в $Irr_{F(x)}$, а значит, имеем равенство $\{v_\xi(x) \mid \xi \in \Gamma\} = F[x] \setminus \{0\}$.

Пусть y^s есть старшая степень переменной y, встречающаяся в $f_\xi(x,y)$. Обозначаем $q_\xi(x,y) = v_\xi(x) f_\xi(x,y) \in F[x][y]$; многочлен $q_\xi(x,y)$ имеет при y^s коэффициент, равный $v_\xi(x)$. Далее, пусть $\overline{q}_\xi(x,y)$ есть какой-либо многочлен кольца $K_L[x][y]$, у которого все коэффициенты переходят в соответствующие коэффициенты $q_\xi(x,y)$ при отображении $\pi^x\colon K_L[x] \to (K_L/T_L)[x]$. Мы имеем $\pi^x(\overline{v}_\xi) = v_\xi$, где $\overline{v}_\xi(x)$ есть коэффициент многочлена $\overline{q}_\xi(x,y)$ при y^s.

Для каждого $i \in \mathbf{N}$ положим $w_\xi^i(y) = q_\xi(i,y) \in F[y]$. Очевидно, что при почти всех $i \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство $v_\xi(i) \neq 0$; зафиксируем некоторое i, удовлетворяющее ему. Ввиду алгебраической замкнутости поля F мы можем разложить многочлен $w_\xi^i(y)$ на линейные множители:

$$w_\xi^i(y) = v_\xi(i) \cdot (y-\alpha_1)(y-\alpha_2)...(y-\alpha_s),$$

где $\alpha_j \in F$. Несложно видеть, что $\overline{w}_\xi^i(y) = \overline{q}_\xi(i,y) \in K_L[y]$ переводится гомоморфизмом π^y в многочлен $w_\xi^i(y)$. Пусть $\alpha_j = \beta_j + T_L$, где $\beta_j \in K_L$. Заметим, что $\overline{v}_\xi(i) + T_L = v_\xi(i)$ есть ненулевой элемент поля F; значит, при почти всех $p \in L$ элемент $\overline{v}_\xi(i)$ кольца K_L будет иметь p-координату, отличную от нуля. Применяя к многочлену

$$\bar{\mu}(y) = \overline{w}_\xi^i(y) - \overline{v}_\xi(i) \cdot (y-\beta_1)(y-\beta_2)...(y-\beta_s) \in K_L[y]$$

лемму 14.8, мы получим, что почти для всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y(\overline{w}_\xi^i) \in \mathbf{Z}_p[y]$ можно представить в виде

$$\pi_p^y(\overline{w}_\xi^i) = \pi_p(\overline{v}_\xi(i)) \cdot (y-\pi_p(\beta_1))(y-\pi_p(\beta_2))...(y-\pi_p(\beta_s)).$$

Отсюда следует, что при почти всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y(\overline{w}_\xi^i)$ имеет степень s и разлагается в произведение многочленов степени 1.

Построим теперь функцию $z_\xi \in \mathbf{N}^\mathbf{N}$. Если $v_\xi(i) = 0$, полагаем $z_\xi(i) = 1$. Если же $v_\xi(i) \neq 0$, то мы выберем $z_\xi(i) \in \mathbf{N}$ таким образом, чтобы при любом $p \in L$ из соотношения $p > z_\xi(i)$ следовало, что многочлен $\pi_p^y(\overline{w}_\xi^i)$ разлагается в $\mathbf{Z}_p[y]$ в произведение s многочленов степени 1.

Рассмотрим множество функций $\{z_\xi \mid \xi \in \Gamma\} \subset \mathbf{N}^\mathbf{N}$. Поскольку $|\Gamma| < \mathfrak{b}$, то для некоторой функции $z \in \mathbf{N}^\mathbf{N}$ при всех $\xi \in \Gamma$ выполнено условие $z_\xi \prec z$. Будем считать, что z — строго возрастающая функция (очевидно, что можно выбрать её обладающей этим свойством). Отображение $\kappa\colon L \to \mathbf{N}$ определим равенством (13.8).

Зафиксируем произвольное $\xi \in \Gamma$; покажем, что выполнены следующие три свойства (как и выше, s — показатель старшей из входящих в многочлен $f_\xi(x, y)$ степеней переменной y).

(i) *Почти для всех* $p \in L$ *выполнено* $v_\xi(\kappa(p)) \neq 0$.

Утверждение вытекает из того, что каждое своё значение κ принимает лишь конечное число раз, а многочлен $v_\xi(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ может иметь только конечное число корней в F. ★

(ii) *Почти для всех чисел* $p \in L$ *многочлен* $\pi_p^y(\overline{w}_\xi^{\kappa(p)})$ *разложи́м в* $\mathbf{Z}_p[y]$ *в произведение* s *многочленов степени* 1.

В самом деле, существует $i_\xi \in \mathbf{N}$ такое, что $z_\xi(i) < z(i)$ при всех $i \geqslant i_\xi$. Пусть $p \geqslant z(i_\xi)$ и $v_\xi(\kappa(p)) \neq 0$ (этим соотношениям удовлетворяют почти все числа $p \in L$). Тогда при некотором $i \geqslant i_\xi$ будет выполнено $z(i) \leqslant p < z(i+1)$ и, следовательно, $z_\xi(\kappa(p)) = z_\xi(i) < z(i) \leqslant p$; поэтому (учитывая свойства z_ξ) многочлен $\pi_p^y(\overline{w}_\xi^{\kappa(p)})$ есть произведение s многочленов степени 1. ★

(iii) *Почти для всех* $p \in L$ *элемент* $\overline{v}_\xi(\kappa(p))$ *имеет* p*-координату* $\neq 0$.

Можно заметить, что коэффициент многочлена $\overline{w}_\xi^{\kappa(p)}(y) \in K_L[y]$ при y^s равен $\gamma_p = \overline{v}_\xi(\kappa(p))$ и поэтому многочлен $\pi_p^y(\overline{w}_\xi^{\kappa(p)}) \in \mathbf{Z}_p[y]$ имеет при той же степени переменной коэффициент $\pi_p(\gamma_p)$. Как следует из свойства (ii), почти для всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y(\overline{w}_\xi^{\kappa(p)})$ будет иметь степень s; значит, почти для всех p, принадлежащих множеству L, выполнено $\pi_p(\gamma_p) \neq 0$. ★

Положим $r = \big(\kappa(p) + p\mathbf{Z}\big)_{p \in L} \in K_L$ и $a = r + T_L \in K_L/T_L$. Далее, вновь зафиксируем произвольное $\xi \in \Gamma$. Мы знаем, что почти для всех чисел $p \in L$ элемент $\overline{v}_\xi(\kappa(p)) \in K_L$ имеет ненулевую p-координату (равную p-координате $\pi_p(\overline{v}_\xi(r))$ элемента $\overline{v}_\xi(r) \in K_L$). Итак, у $\overline{v}_\xi(r)$ почти все координаты не равны нулю, поэтому $\overline{v}_\xi(r) + T_L = v_\xi(a)$ будет обратимым элементом кольца K_L/T_L и, в частности, $v_\xi(a) \neq 0$. Из сказанного ясно, что множество

$$F(a) = \Big\{ u(a) \cdot \big(v(a)\big)^{-1} \;\Big|\; u(x), v(x) \in F[x];\;\; v(x) \neq 0 \Big\} \subset K_L/T_L$$

есть поле, F-изоморфное полю $F(x)$, а элемент a трансцендентен над F.

Рассмотрим множество $\mathcal{F}$, состоящее из всех таких полей $F' \subset K_L/T_L$, которые содержат в себе поле $F(a)$, являясь алгебраическими расширениями последнего; имеем $\mathcal{F} \neq \varnothing$, поскольку $F(a) \in \mathcal{F}$. Пусть G есть максимальный по включению элемент множества $\mathcal{F}$ (такой элемент обязательно существует в силу леммы Цорна). Покажем, что поле G содержит хотя бы одно решение уравнения $f_\xi(a, y) = 0$ при любом $\xi \in \Gamma$, т. е. что всякий многочлен из $Irr_{F(a)}$ имеет корень в G. Так как $\operatorname{char} F(a) = 0$, то ввиду леммы 14.7 из этого будет вытекать, что поле G служит для $F(a)$ алгебраическим замыканием, а тогда оно F-изоморфно алгебраическому замыканию поля $F(x)$.

Предположим противное: пусть существует $\xi \in \Gamma$, для которого поле G не содержит решений уравнения $f_\xi(a, y) = 0$ (или, что то же самое, решений уравнения $q_\xi(a, y) = 0$). Многочлен $q_\xi(a, y) \in F(a)[y]$ можно представить как произведение $q_\xi(a, y) = g(y)h(y)$, где $g(y) \in G[y]$ и $h(y) \in Irr_G$. Легко видеть, что многочлен $\bar{\nu}(y) = \overline{q}_\xi(r, y) \in K_L[y]$ переводится отображением π^y в многочлен $q_\xi(a, y)$. Через $\bar{g}(y)$ и $\bar{h}(y)$ мы обозначим какие-то многочлены из $K_L[y]$, для которых $\pi^y(\bar{g}) = g$ и $\pi^y(\bar{h}) = h$ (при этом $\bar{h}(y)$ выберем унитарным).

Из равенства $\pi_p(r) = \kappa(p) + p\mathbf{Z}$ следует соотношение $\pi_p^y(\bar{\nu}) = \pi_p^y(\overline{w}_\xi^{\kappa(p)})$. Применяя к многочлену $\bar{\mu}(y) = \bar{\nu}(y) - \bar{g}(y)\bar{h}(y) \in K_L[y]$ лемму 14.8, получим, что почти для всех $p \in L$ выполнено равенство $\pi_p^y(\bar{\nu}) = \pi_p^y(\bar{g})\pi_p^y(\bar{h})$ и, значит, $\pi_p^y(\overline{w}_\xi^{\kappa(p)}) = \pi_p^y(\bar{g})\pi_p^y(\bar{h})$. Соотношения $\deg \pi_p^y(\bar{h}) = \deg \bar{h} = \deg h \geqslant 1$ ввиду (ii) позволяют сделать вывод, что при почти всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y(\bar{h}) \in \mathbf{Z}_p[y]$ имеет в $\mathbf{Z}_p$ по меньшей мере один корень. Выберем $d \in K_L$ так, чтобы почти для всех $p \in L$ элемент $\pi_p(d) \in \mathbf{Z}_p$ являлся корнем многочлена $\pi_p^y(\bar{h})$. В этом случае элемент $d + T_L \in K_L/T_L$ — корень многочлена $h(y)$, а следовательно, и уравнения $q_\xi(a, y) = 0$. Теперь мы зададим F' как наименьшее из подколец кольца K_L/T_L, содержащее и G, и $d + T_L$. Это подкольцо строго содержит G и изоморфно кольцу $G[y]/h(y)G[y]$, которое является полем. Таким образом, имеем $F' \in \mathcal{F}$, что противоречит выбору поля G. ■

Теорема 14.11. *Пусть* L_χ — *универсальное множество. Тогда всякое поле* F *такое, что выполняется* $\operatorname{char} F = 0$ *и* $|F| \leqslant \mathfrak{b}$, *будет базовым полем подходящего* csp-*кольца кохарактеристики* χ.

Доказательство. Положим $L = L_\chi$. Рассмотрим теперь множество $\mathcal{F}$ всех подколец кольца K_L/T_L, которые являются алгебраически замкнутыми полями; ввиду теоремы 14.9 имеем $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Пусть G является максимальным относительно включения элементом множества $\mathcal{F}$ (такой элемент существует по лемме Цорна). В силу теоремы 14.10 для поля G будет выполнено условие $|G| \geqslant \mathfrak{b}$. Легко видеть, что всякое поле F со свойствами $\operatorname{char} F = 0$ и $|F| \leqslant \mathfrak{b}$ вкладывается в G. Отсюда по теореме 13.8 получаем, что такое поле F будет базовым полем не только подходящего csp-кольца $R \subset K_L$, но и подходящего csp-кольца кохарактеристики χ. ■

Следствие 14.12. *Пусть* L — *какое-либо бесконечное подмножество множества* $\mathbf{P}$, *а* F — *алгебраически замкнутое поле такое, что* $\operatorname{char} F = 0$ *и* $|F| \leqslant \mathfrak{b}$. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *поле* F *вкладывается в* K_L/T_L *как подкольцо*;

2) L — *универсальное множество.*

Доказательство. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из теоремы 14.11.

1) $\Rightarrow$ 2). Из условия 1) получаем, что K_L/T_L содержит в качестве подкольца алгебраическое замыкание поля $\mathbf{Q}$, поэтому для каждого многочлена $f(y) \in \mathbf{Z}[y]$ степени $\geqslant 1$ существует элемент $d \in K_L$ такой, что $f(d + T_L) = 0$. Это возможно лишь в том случае, когда почти для всех чисел $p \in L$ элемент $\pi_p(d) \in \mathbf{Z}_p$ будет корнем многочлена $f(y)$; следовательно, L — универсальное множество. ■

Теорема 14.13. *Если* $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, *то для поля* F *равносильны условия*:

1) $\operatorname{char} F = 0$ *и* $|F| \leqslant \mathfrak{c}$;

2) F *служит базовым полем некоторого* csp-*кольца.*

Доказательство. Как уже отмечено нами ранее, импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из соотношений $|K_\chi| = \mathfrak{c}$ и $\mathrm{char}(K_\chi/T_\chi) = 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть выполняется $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$. Из теорем 14.6 и 14.11 вытекает, что поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ есть базовое поле некоторого csp-кольца. Каждое поле F, удовлетворяющее условию 1), вкладывается в $\mathbf{C}$, а значит, оно тоже служит базовым полем подходящего csp-кольца. ■

В частности, условия 1) и 2) теоремы 14.13 будут равносильными, если мы принимаем обобщённую континуум-гипотезу (ОКГ), континуум-гипотезу (КГ) или аксиому Мартина; это следует из справедливости импликаций

$$\text{ОКГ} \implies \text{КГ} \implies \text{аксиома Мартина} \implies \mathfrak{b} = \mathfrak{c}.$$

Теорема 14.14 показывает, что существует достаточно много различных csp-колец, имеющих одно и то же базовое поле.

Теорема 14.14. *Пусть L — универсальное множество и F — счётное поле, причём выполняется* $\mathrm{char}\, F = 0$ *и* $F \ncong \mathbf{Q}$. *Тогда множество* csp-*колец* $R \subset K_L$ *таких, что* $R/T_L \cong F$, *имеет мощность* $\mathfrak{c}$.

Доказательство. Ясно, что искомая мощность не может превышать $\mathfrak{c}$ (поскольку имеется лишь $\mathfrak{c}$ различных счётных подмножеств кольца K_L/T_L). Пусть $\mathcal{D}$ есть какое-то континуальное почти дизъюнктное семейство счётных подмножеств множества L; существование такого семейства нам гарантирует предложение 1.7. Из леммы 1.8 известно, что для любых множеств $X, Y \in \mathcal{D}$ множество $L \setminus (X \cup Y)$ будет бесконечным. Для всякого $X \in \mathcal{D}$ полагаем

$$K_X = \prod_{p\in X} \mathbf{Z}_p, \qquad T_X = \bigoplus_{p\in X} \mathbf{Z}_p, \qquad K'_X = \prod_{p\in L\setminus X} \mathbf{Z}_p, \qquad T'_X = \bigoplus_{p\in L\setminus X} \mathbf{Z}_p;$$

кольца K_L/T_L и $(K_X/T_X) \times (K'_X/T'_X)$ будут отождествляться. Через θ_X и θ'_X мы обозначаем возникающие при таком отождествлении проекции из K_L/T_L на K_X/T_X и на K'_X/T'_X соответственно. Можно считать, что $F \subset G$, где G —

это содержащееся в K_L/T_L алгебраически замкнутое поле из доказательства теоремы 14.11.

Предположим сначала, что F есть алгебраическое расширение поля $\mathbf{Q}$. Выбираем $r = (r_p)_{p\in L} \in K_L$ так, чтобы $r + T_L \in F \setminus \mathbf{Q}$; тогда элемент $r + T_L$ служит корнем некоторого многочлена $h(y) \in Irr_{\mathbf{Q}}$ степени $\geqslant 2$. Далее, пусть элемент $d = (d_p)_{p\in L}$ кольца K_L таков, что $d + T_L$ принадлежит G и является корнем многочлена $h(y)$, отличным от $r + T_L$ (тогда имеем $r_p \neq d_p$ почти для всех $p \in L$). Обозначим теперь через ε какое-нибудь вложение полей $F \to G$, переводящее $r + T_L$ в $d + T_L$. Далее, для всякого $X \in \mathcal{D}$ определим вложение $\varepsilon_X \colon F \to K_L/T_L$ формулой $\varepsilon_X(a) = \big(\theta_X(\varepsilon(a)), \theta'_X(a)\big)$ при всех $a \in F$. В этом случае $\varepsilon_X(r + T_L) = r^{(X)} + T_L$, где элемент $r^{(X)} \in K_L$ таков, что

$$\pi_p(r^{(X)}) = \begin{cases} d_p, & \text{если } p \in X, \\ r_p, & \text{если } p \in L \setminus X. \end{cases}$$

Условия $\varepsilon_X(F) = R_X/T_L$ (где $X \in \mathcal{D}$) задают континуальное семейство csp-колец $R_X \subset K_L$, имеющих F своим базовым полем; нетрудно видеть, что выполнено $r^{(X)} \in R_X$. Далее, из свойств семейства $\mathcal{D}$ следует, что для любых различных множеств $X, Y \in \mathcal{D}$ у элемента $r^{(X)} - r^{(Y)} \in K_L$ будет бесконечно много как ненулевых, так и нулевых координат. Значит, элементы $r^{(X)}$ и $r^{(Y)}$ не могут содержаться в одном и том же csp-кольце в силу предложения 13.2. Итак, при $X \neq Y$ имеем $R_X \neq R_Y$.

Предположим теперь, что F есть трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$. Выберем $r \in K_L$ так, чтобы элемент $r + T_L$ лежал в F и был трансцендентен над $\mathbf{Q}$. Полагая $d = -r$, получим, что элемент $d + T_L$ также содержится в F и трансцендентен над $\mathbf{Q}$ (при этом $d + T_L \neq r + T_L$). Тогда можно построить вложение полей $F \to G$, которое переводит элемент $r + T_L$ в элемент $d + T_L$. Действуя так же, как и в случае алгебраического расширения, мы приходим к континуальному семейству различных csp-колец $R_X \subset K_L$, которые имеют своим базовым полем F. ■

§15. Проективные модули над csp-кольцами

Выясним строение проективных модулей над csp-кольцами.

Пусть R — произвольное csp-кольцо кохарактеристики χ; для удобства введём обозначения $L = L_\chi$, $K = K_\chi$ и $T = T_\chi$. Тогда

$$T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset R \subset \prod_{p \in L} R_p = K,$$

где все кольца R_p определяются характеристикой χ по тем же правилам, что и в начале главы.

Можно естественным образом отождествить кольца R_p и их единичные элементы (обозначаем эти элементы через e_p) с соответствующими идеалами и идемпотентами кольца R, в этом случае $R_p = Re_p$. Далее, для $r \in R$ будем отождествлять p-координату элемента r и произведение re_p. Заметим также, что кольцо R_p допускает единственную модульную структуру как над самим собой, так и над кольцом R; поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать все R_p как R-модули, не оговаривая это дополнительно.

Как отмечалось в [6], элемент из R будет идемпотентом тогда и только тогда, когда он совпадает с элементом вида

$$e_X = \sum_{p \in X} e_p \qquad \text{или} \qquad 1 - e_X = 1 - \sum_{p \in X} e_p,$$

где X есть конечное (не исключено, что пустое) подмножество множества L. В дальнейшем, используя символ e_X, мы будем автоматически полагать, что множество X конечно; кроме того, будем говорить, что e_X есть *идемпотент конечного типа*. Для идемпотентов этого вида в последующем используются также обозначения ε и δ (с различными индексами или без таковых).

Определение 15.1. Для всякого элемента $r \in R$ множество

$$\operatorname{supp} r = \{p \in L \mid re_p \neq 0\}$$

будем называть *носителем* элемента r.

Ясно, что $\operatorname{supp} e_X = X$ и $\operatorname{supp}(1 - e_X) = L \setminus X$; если для идемпотентов $e, e' \in R$ выполнено $\operatorname{supp} e \subset \operatorname{supp} e'$, то Re является для идеала Re' прямым слагаемым, причём дополнительное прямое слагаемое, как несложно видеть, определено однозначно и равно $R(e' - e)$.

Лемма 15.2. *Для любых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in T$ можно найти идемпотент конечного типа ε такой, что $\varepsilon\beta_1 = \beta_1$, $\varepsilon\beta_2 = \beta_2$, ..., $\varepsilon\beta_n = \beta_n$.*

Доказательство. Достаточно будет положить $\varepsilon = e_X$, где X задаётся равенством $X = \operatorname{supp} \beta_1 \cup \operatorname{supp} \beta_2 \cup \ldots \cup \operatorname{supp} \beta_n$. ■

В целях замкнутости изложения приведём теорему о строении идеалов csp-кольца вместе с доказательством.

Теорема 15.3 [6]. *Подмножество из R является идеалом в R тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством одного из двух типов*:

$$J = \bigoplus_{p \in L} J_p, \tag{15.1}$$

$$J = R(1 - e_X) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in X} J_p\Big), \tag{15.2}$$

где J_p — произвольные идеалы соответствующих колец R_p.

Доказательство. Очевидно, что множества вида (15.1) и (15.2) будут идеалами в R. Обратно, пусть J есть какой-то идеал кольца R. Для каждого $p \in L$ обозначим $J_p = Je_p$ (тогда J_p является идеалом в R_p). Рассмотрим два возможных случая.

Если $J \subset T$, то по лемме 15.2 для любого $\beta \in J$ существует элемент e_X такой, что $\beta e_X = \beta$. Тогда $\beta = \sum\limits_{p \in X} \beta e_p \in \bigoplus\limits_{p \in X} Je_p \subset \bigoplus\limits_{p \in L} J_p$. Итак,

$$J \subset \bigoplus_{p \in L} J_p;$$

обратное включение очевидно, поэтому справедливо равенство (15.1).

Допустим теперь, что выполнено $J \not\subset T$. Тогда $(J+T)/T$ — ненулевой идеал поля R/T, поэтому имеем $J+T=R$, т. е. $1 \in J+T$. Отсюда вытекает, что для некоторого $\beta \in T$ справедливо включение $1-\beta \in J$. Выбирая идемпотент e_X со свойством $\beta e_X = \beta$, мы получаем $1-e_X = (1-\beta)(1-e_X) \in J$. Тогда $R(1-e_X) = R(1-e_X)(1-e_X) \subset J(1-e_X) \subset R(1-e_X)$ и, значит,

$$J = J(1-e_X) \oplus Je_X = R(1-e_X) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in X} Je_p\Big),$$

т. е. справедливо равенство (15.2). ■

Лемма 15.4. *Пусть A — произвольный R-модуль. Тогда*:

(а) *для всяких элементов $x_1, x_2, \dots, x_s \in AT$ существует идемпотент конечного типа ε такой, что $x_1\varepsilon = x_1$, $x_2\varepsilon = x_2$, ..., $x_s\varepsilon = x_s$;*

(б) *если M — подмодуль модуля A, то $M \cap AT = MT$;*

(в) *T — идемпотентный идеал кольца R.*

Доказательство. (а) Пусть $x_1, x_2, \dots, x_s \in AT$, тогда мы можем найти элементы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in T$ такие, что $x_j \in A\beta_1 + A\beta_2 + \dots + A\beta_n$ при любом j. По лемме 15.2 для какого-то идемпотента $\varepsilon \in T$ равенство $\varepsilon\beta_i = \beta_i$ верно при всех i; этот идемпотент удовлетворяет требуемым равенствам $x_j\varepsilon = x_j$.

(б) Пусть $x \in M \cap AT$. Ввиду пункта (а) существует идемпотент $\varepsilon \in T$ такой, что $x\varepsilon = x$. Отсюда имеем $x \in xT \subset MT$, что и требовалось (обратное включение $MT \subset M \cap AT$ очевидно).

(в) Применяя (б) к модулям $M = T$ и $A = R$, получим $T = T^2$. ■

В работе [70] был доказан следующий важный результат.

Теорема Капланского. *Произвольный проективный модуль может быть представлен как прямая сумма счётно порождённых подмодулей.*

Теорема 15.5. *Пусть R — какое-то* csp-*кольцо. В этом случае любой проективный R-модуль можно представить как прямую сумму семейства подмодулей, изоморфных идеалам кольца R.*

Доказательство. В силу теоремы Капланского будет достаточно рассмотреть случай счётно порождённого модуля. Допустим, что M — какой-то счётно порождённый проективный R-модуль. Можно считать, что выполнено $M \subset F$, где F есть прямая сумма счётного числа копий R. Легко убедиться, что фактормодуль M/MT представляет собой пространство над полем R/T. Пусть $\Psi = \{x_1, x_2, \ldots\}$ есть некоторая система элементов модуля M (счётная либо конечная) такая, что система $\{x_1 + MT,\ x_2 + MT, \ldots\}$ является базисом этого пространства. Тогда имеем

$$M = MT + \sum_{x \in \Psi} xR. \tag{15.3}$$

Всякий элемент модуля $M \subset F$ можно рассматривать как бесконечный вектор $(b_1, b_2, \ldots)$, почти все координаты которого равны нулю (здесь $b_i \in R$). Ввиду соотношения $M \cap FT = MT$ естественный эпиморфизм $M \to M/MT$ можно отождествить с отображением, которое сопоставляет всякому вектору $(b_1, b_2, \ldots) \in M$ вектор $(b_1 + T,\ b_2 + T, \ldots)$ с координатами из R/T. Допустим, что $x_n = (\beta_{1n}, \beta_{2n}, \ldots)$. Из $x_n \notin MT$ получаем, что хотя бы одна из координат $\beta_{in} \in R$ не принадлежит идеалу T; обозначим эту координату через β_n.

Для натурального $n \leqslant |\Psi|$ выберем наименьшее $s \in \mathbf{N}$ со свойством

$$\text{при всех } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ и } i > s \text{ выполнено } \beta_{ij} = 0. \tag{15.4}$$

Рассмотрим для этого числа s две матрицы

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \ldots & \beta_{sn} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\Gamma} = \begin{pmatrix} \beta_{11} + T & \beta_{12} + T & \ldots & \beta_{1n} + T \\ \beta_{21} + T & \beta_{22} + T & \ldots & \beta_{2n} + T \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \beta_{s1} + T & \beta_{s2} + T & \ldots & \beta_{sn} + T \end{pmatrix}.$$

Поскольку система $\{x_1 + MT,\ x_2 + MT, \ldots\}$ линейно независима, то столбцы матрицы $\overline{\Gamma}$ также линейно независимы над полем R/T. Поэтому $\overline{\Gamma}$ содержит по крайней мере один отличный от нуля минор порядка n; соответствующий минор матрицы Γ обозначим через Δ_n (ясно, что в этом случае $\Delta_n \notin T$).

Через Y_n обозначим множество всех $p \in L$ таких, что по меньшей мере один из элементов $\Delta_n e_p$ и $\beta_n e_p$ необратим в кольце R_p. По предложению 13.2 все Y_n суть конечные множества. Пусть $\{p_1, p_2, ...\}$ есть множество (имеющее конечную или же счётную мощность $\mathfrak{A}$) всех $p \in L$, которые не принадлежат ни одному из построенных нами множеств Y_n. Условимся, что $W_0 = \varnothing$; далее, для любого $n \geqslant 0$ мы определим W_{n+1} как множество $W_n \cup Y_{n+1}$, к которому присоединён элемент p_{n+1} (если выполняется $n \geqslant \mathfrak{A}$, то присоединять ничего не нужно). Получим возрастающую цепь $W_0 \subset W_1 \subset ... \subset W_n \subset ...$ конечных подмножеств множества L, объединение которой есть L. Обозначим через ε_n идемпотент конечного типа с носителем W_n.

Имеем равенство $x_n R = x_n \varepsilon_n R + x_n(1-\varepsilon_n)R$. Очевидно, $x_n \varepsilon_n R \subset MT$, поэтому далее мы можем считать, что система Ψ из равенства (15.3) состоит не из элементов x_n, а из элементов $x_n(1-\varepsilon_n)$. Далее, ясно, что аннулятором элемента $x_n(1-\varepsilon_n) \in M$, как и элемента $\beta_n(1-\varepsilon_n) \in R$, является идеал $R\varepsilon_n$. Следовательно, $x_n(1-\varepsilon_n)R \cong R/R\varepsilon_n \cong R(1-\varepsilon_n)$.

Замечание. Если система Ψ конечна и $|\Psi| = j$, мы будем считать, что $x_{j+1} = x_{j+2} = ... = 0$, $W_{j+1} = W_{j+2} = ... = L$ и $\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_{j+2} = ... = 1$. При этой договорённости наши дальнейшие рассуждения будут применимы и к случаю счётной, и к случаю конечной системы Ψ.

Итак, при всех $n \in \mathbf{N}$ модуль $x_n(1-\varepsilon_n)R$ изоморфен идеалу $R(1-\varepsilon_n)$. Заметим, что для каждого $p \in L \setminus W_n$ выполнено $\varepsilon_1 e_p = \varepsilon_2 e_p = ... = \varepsilon_n e_p = 0$. Предположим, что сумма

$$A = \sum_{j \in \mathbf{N}} x_j(1-\varepsilon_j)R \tag{15.5}$$

не является прямой. В этом случае при некотором $n > 1$ сумма первых $n-1$ слагаемых из равенства (15.5) является прямой, а сумма первых n слагаемых уже не прямая. Тогда найдутся элементы $d_1, d_2, \dots, d_n \in R$, для которых

$$x_1(1-\varepsilon_1)d_1 + x_2(1-\varepsilon_2)d_2 + ... + x_n(1-\varepsilon_n)d_n = 0 \tag{15.6}$$

и $x_n(1-\varepsilon_n)d_n \neq 0$. В силу последнего неравенства справедливо соотношение $d_n \notin R\varepsilon_n$; зафиксируем число $p \in L \setminus W_n$ такое, что $d_n e_p \neq 0$. Умножая (15.6) на e_p, приходим к равенству $x_1 d_1 e_p + x_2 d_2 e_p + \ldots + x_n d_n e_p = 0$. Перепишем его в виде системы уравнений

$$\begin{cases} (\beta_{11}e_p)d_1e_p + (\beta_{12}e_p)d_2e_p + \ldots + (\beta_{1n}e_p)d_ne_p = 0, \\ (\beta_{21}e_p)d_1e_p + (\beta_{22}e_p)d_2e_p + \ldots + (\beta_{2n}e_p)d_ne_p = 0, \\ \dotfill \\ (\beta_{s1}e_p)d_1e_p + (\beta_{s2}e_p)d_2e_p + \ldots + (\beta_{sn}e_p)d_ne_p = 0 \end{cases}$$

(здесь s — число, удовлетворяющее условию (15.4), а в качестве неизвестных выступают $d_1e_p, d_2e_p, \ldots, d_ne_p \in R_p$). Матрица такой системы содержит минор порядка n, равный $\Delta_n e_p$, т. е. являющийся обратимым элементом кольца R_p. Тогда по теореме 4.6 для всех $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ имеем соотношение $d_j e_p = 0$ — противоречие. Итак, сумма (15.5) является прямой.

Убедимся теперь, что можно найти подмодули $G_p \subset Me_p$, для которых $Me_p = G_p \oplus Ae_p$. Зафиксируем число $p \in L$. Существует $n \geqslant 0$ со свойствами $p \notin W_n$ и $p \in W_{n+1}$. Это значит, что $\varepsilon_{n+1}e_p = \varepsilon_{n+2}e_p = \ldots = e_p$ и, далее,

$$Ae_p = \bigoplus_{j\in\mathbf{N}} x_j(1-\varepsilon_j)Re_p = \bigoplus_{j=1}^{n} x_j(1-\varepsilon_j)Re_p \cong \bigoplus_{j=1}^{n} R(1-\varepsilon_j)e_p = \bigoplus_{j=1}^{n} R_p.$$

Таким образом, Ae_p является свободным R_p-модулем конечного ранга; будем считать, что выполняется $n \geqslant 1$ (для $n = 0$ требуемое утверждение очевидно в силу равенства $Ae_p = 0$). Рассмотрим два случая.

I. Пусть $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. Ввиду предложения 5.9 свободный R_p-модуль Ae_p инъективен и, значит, выделяется прямым слагаемым в R_p-модуле Me_p.

II. Пусть выполнено $R_p = \mathbf{Q}_p^*$. Наша ближайшая цель — убедиться, что Ae_p есть чистый подмодуль p-адического модуля Fe_p (а значит, модуля Me_p). Допустим, что $x \in Ae_p$ делится на p^k в модуле Fe_p. Для всех $j \leqslant n$ выполнено соотношение $x_j(1-\varepsilon_j)Re_p = x_jRe_p$; значит, $x = x_1d_1e_p + x_2d_2e_p + \ldots + x_nd_ne_p$, где $d_j \in R$. Всякий элемент модуля Fe_p можно представить как бесконечный вектор, координаты которого принадлежат кольцу $Re_p = \mathbf{Q}_p^*$. Если x делится на p^k, то и все координаты элемента x должны делиться на p^k (в кольце $\mathbf{Q}_p^*$). Пусть s — число, удовлетворяющее условию (15.4). Имеем

$$\begin{cases} (\beta_{11}e_p)d_1e_p + (\beta_{12}e_p)d_2e_p + \ldots + (\beta_{1n}e_p)d_ne_p \equiv 0 \pmod{p^k}, \\ (\beta_{21}e_p)d_1e_p + (\beta_{22}e_p)d_2e_p + \ldots + (\beta_{2n}e_p)d_ne_p \equiv 0 \pmod{p^k}, \\ \dotfill \\ (\beta_{s1}e_p)d_1e_p + (\beta_{s2}e_p)d_2e_p + \ldots + (\beta_{sn}e_p)d_ne_p \equiv 0 \pmod{p^k}, \end{cases}$$

где в качестве неизвестных выступают $d_1e_p, d_2e_p, \ldots, d_ne_p \in \mathbf{Q}_p^*$. Матрица этой системы содержит минор n-го порядка, равный $\Delta_n e_p$ и, значит, являющийся обратимым элементом кольца $\mathbf{Q}_p^*$. Следовательно, по теореме 4.6 при каждом $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполнено $d_je_p \equiv 0 \pmod{p^k}$. В этом случае для подходящих элементов $d_j' \in R$ имеем $d_je_p = p^kd_j'e_p$. Очевидно, что элемент

$$x' = (x_1d_1' + x_2d_2' + \ldots + x_nd_n')e_p \in Ae_p$$

удовлетворяет условию $p^kx' = x$. Таким образом, Ae_p есть чистый подмодуль модулей Fe_p и Me_p. Так как Ae_p — свободный p-адический модуль конечного ранга (и, значит, чисто инъективный p-адический модуль [16]), то он служит прямым слагаемым для любого R_p-модуля, который содержит Ae_p в качестве чистого подмодуля.

Тем самым существование R_p-модуля G_p со свойством $Me_p = G_p \oplus Ae_p$ доказано для всех $p \in L$. Нетрудно теперь заметить, что

$$M = MT + A = \Big(\bigoplus_{p\in L} Me_p\Big) + A = \Big(\bigoplus_{p\in L} G_p\Big) \oplus A \cong$$
$$\cong \Big(\bigoplus_{p\in L} G_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{n\in \mathbf{N}} R(1-\varepsilon_n)\Big).$$

Если выполняется $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, то G_p, как и всякий модуль над кольцом R_p, изоморфен прямой сумме какого-то семейства идеалов кольца R_p (и, значит, идеалов кольца R). Если же $R_p = \mathbf{Q}_p^*$, то G_p (будучи подмодулем свободного p-адического модуля Fe_p) есть прямая сумма изоморфных копий $\mathbf{Q}_p^*$. ■

Следствие 15.6. *Модуль M_R будет проективным в точности тогда, когда имеет место изоморфизм*

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in L} F_p\Big), \tag{15.7}$$

где F_p суть свободные R_p-модули, а все M_i — идеалы кольца R вида

$$J = R(1-\delta) \tag{15.8}$$

(*идемпотент конечного типа δ, вообще говоря, зависит от индекса i*).

Доказательство. Пусть M есть проективный R-модуль, тогда в силу теоремы 15.5 этот модуль будет изоморфен прямой сумме идеалов кольца R, которые, как мы знаем, имеют вид (15.1) или (15.2). Ясно, что все входящие в прямое разложение проективного модуля идеалы также должны быть проективными. Если $R_p = \mathbf{Q}_p^*$, то всякий ненулевой идеал $J_p \subset R_p$ как R-модуль будет изоморфен $\mathbf{Q}_p^*$. Если же $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, то среди всех идеалов кольца R_p проективными как R-модули являются лишь 0 и R_p (поскольку в силу предложения 5.9 только эти идеалы будут проективными R_p-модулями). Поэтому проективный идеал кольца R обязательно изоморфен как R-модуль идеалу J вида (15.1) или (15.2) такому, что для всякого p идеал J_p совпадает либо с 0, либо с R_p. Группируя прямые слагаемые вида R_p, получаем, что имеет место изоморфизм (15.7).

Обратно, каждый R-модуль вида (15.7) является проективным, так как он изоморфен прямой сумме семейства идеалов, каждый из которых служит прямым слагаемым кольца R. ■

Определение 15.7. Для произвольного модуля M_R размерность $r(M)$ фактормодуля M/MT как линейного пространства над R/T будем называть *псевдорангом* этого модуля.

Очевидно, что псевдоранг прямой суммы всякого семейства R-модулей равен сумме псевдорангов этих модулей, а идеалы вида (15.1) и (15.2) имеют псевдоранги 0 и 1 соответственно. Отсюда, в частности, немедленно следует, что для модуля вида (15.7) выполнено $r(M) = |I|$.

Пусть для модуля M имеет место изоморфизм (15.7). Тогда при любых $i \in I$ и $p \in L$ идеал $M_i e_p$ либо совпадает с R_p, либо равен 0; значит, для всех $p \in L$ модуль Me_p является свободным R_p-модулем. Ранг данного свободного модуля (он определён однозначно) мы обозначим через $r_p(M)$. Итак, любому проективному модулю M_R мы можем сопоставить кардинальные числа $r(M)$ и $\{r_p(M)\}_{p\in L}$. Построенный таким путём набор кардинальных чисел назовём *системой инвариантов* проективного модуля M_R (в статье Царева [33] было впервые предложено использовать указанные кардинальные инварианты для описания проективных модулей).

Заметим, что проективный R-модуль псевдоранга 0 имеет вид

$$F = \bigoplus_{p\in L} F_p \tag{15.9}$$

и определяется рангами $r_p(F) = r_p(F_p)$ свободных R_p-модулей F_p однозначно (с точностью до изоморфизма).

Предложение 15.8. *Пусть R-модули M и A проективны. Тогда*:

(а) *если $A \cong M$, то $r_p(A) = r_p(M)$ для всякого $p \in L$ и $r(A) = r(M)$;*

(б) *если существует вложение $A \to M$, то $r_p(A) \leqslant r_p(M)$ для всякого $p \in L$ и $r(A) \leqslant r(M)$.*

Доказательство. Утверждение (а) очевидно.

(б) Пусть выполнено $A \subset M$. Из равенства $A \cap MT = AT$ следует, что (R/T)-пространство A/AT вкладывается в M/MT, отсюда $r(A) \leqslant r(M)$.

Далее, для всех $p \in L$ имеем включение $Ae_p \subset Me_p$. Если $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, то соотношение $r_p(A) \leqslant r_p(M)$ следует из того, что $r_p(A)$ и $r_p(M)$ совпадают с размерностями $\mathbf{Z}_p$-пространств $p^{k-1}Ae_p$ и $p^{k-1}Me_p$ соответственно. Если же для числа p выполнено $R_p = \mathbf{Q}_p^*$, то нужное неравенство вытекает из свойств ранга p-адических модулей [16]. ■

Теорема 15.9. *Два проективных модуля над* csp-*кольцом изоморфны в точности тогда, когда они имеют одинаковые системы инвариантов.*

Доказательство теоремы 15.9 (в силу предложения 15.8 нам достаточно установить импликацию в одну сторону) по сути представляет собой главное содержание параграфа; это доказательство будет разбито на несколько самостоятельных утверждений. Прежде чем мы приступим к нему, узнаем, какие условия должны быть наложены на заданный набор кардиналов, чтобы этот набор служил системой инвариантов некоторого проективного R-модуля.

Теорема 15.10. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\{\mathfrak{M}_p\}_{p\in L}$ *— какие-то кардинальные числа и* $W = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\}$. *Проективный модуль* M_R *такой, что* $r(M) = \mathfrak{M}$ *и* $r_p(M) = \mathfrak{M}_p$ *при всех* $p \in L$, *существует в точности тогда, когда*

(A) *множество* W *конечно*

или

(B) *выполнены следующие три условия*:

(B1) *множество* W *счётно*;

(B2) $\{\mathfrak{M}_p \mid p \in W\} = \{\mathfrak{N}_n \mid n \in \mathbf{N}\}$, *где*

$$\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2 < \ldots < \mathfrak{N}_n < \ldots\,, \tag{15.10}$$

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}; \tag{15.11}$$

(B3) *для любого* $n \in \mathbf{N}$ *множество* $\{p \in L \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n\}$ *конечно.*

Доказательство. Убедимся сначала, что каждое из условий (A) и (B) обеспечивает существование подходящего проективного R-модуля.

Пусть выполнено (A); зададим проективный модуль M условием

$$M \cong \Big(\bigoplus_{\mathfrak{M}} R(1 - e_W)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in L} F_p\Big), \tag{15.12}$$

где F_p — это свободный R_p-модуль ранга

$$r_p(F_p) = \begin{cases} \mathfrak{M}_p, & \text{если } p \in W, \\ 0, & \text{если } \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}, \\ \mathfrak{M}_p - \mathfrak{M}, & \text{если } \mathfrak{M}_p > \mathfrak{M}. \end{cases} \tag{15.13}$$

Тогда легко показать, что модуль M обладает требуемой в теореме системой инвариантов.

Пусть теперь выполнено (B). Очевидно, что в этом случае кардинал $\mathfrak{M}$ бесконечен и имеет конфинальность $\aleph_0$. Введём обозначения

$$P_n = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p \leqslant \mathfrak{N}_n\} \ (n \geqslant 1), \qquad \mathfrak{N}_0 = 0, \qquad \mathfrak{A}_n = \mathfrak{N}_n - \mathfrak{N}_{n-1}. \tag{15.14}$$

Из (B3) мы знаем, что все множества P_n конечны. Через ε_n обозначим идемпотент конечного типа с носителем P_n; договоримся, что $\varepsilon_0 = 0$. Рассмотрим проективные модули

$$M' = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_{n-1}), \tag{15.15}$$

$$M \cong M' \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin W} F_p\Big), \tag{15.16}$$

где F_p — свободный R_p-модуль, имеющий ранг

$$r_p(F_p) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}, \\ \mathfrak{M}_p, & \text{если } \mathfrak{M}_p > \mathfrak{M}. \end{cases} \tag{15.17}$$

Для псевдоранга $r(M)$ модуля M имеем

$$r(M) = \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{A}_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}.$$

Если $p \in W$, то $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n$ для некоторого $n \geqslant 1$ и

$$r_p(M) = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n = \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}_p;$$

если же выполнено $p \in L \setminus W$, то справедливы равенства

$$r_p(M) = r_p(F_p) + \sum_{n\in\mathbf{N}} \mathfrak{A}_n = r_p(F_p) + \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p.$$

Итак, мы доказали достаточность каждого из условий (A) и (B).

Обратно, пусть теперь M — проективный R-модуль, имеющий нужную систему инвариантов, и справедливо соотношение (15.7), где $|I| = r(M) = \mathfrak{M}$

и $M_i = R(1-\delta_i)$. Сначала мы допустим, что $\mathfrak{M}$ — бесконечное кардинальное число, имеющее несчётную конфинальность. Ясно, что количество конечных подмножеств множества L счётно. Поэтому из условия $\mathrm{cf}(\mathfrak{M}) > \aleph_0$ вытекает, что для некоторого конечного подмножества $X \subset L$ среди всех M_i окажется ровно $\mathfrak{M}$ идеалов, совпадающих с $R(1-e_X)$; значит, прямая сумма $\mathfrak{M}$ копий идеала $R(1-e_X)$ будет вкладываться в M как прямое слагаемое. Последнее утверждение справедливо также в ситуации $\mathfrak{M} < \aleph_0$ (в этом случае X может быть задано как объединение всех множеств $\operatorname{supp}\delta_i$). Для каждого $p \in L \setminus X$ имеем соотношения $\mathfrak{M}_p = r_p(M) \geqslant \mathfrak{M} \cdot r_p\big(R(1-e_X)\big) = \mathfrak{M}$. Поэтому $W \subset X$, а значит, выполнено (A).

Теперь остаётся установить необходимость одного из условий (A) и (B) в том случае, когда $\mathfrak{M} = |I|$ есть бесконечный кардинал конфинальности $\aleph_0$. Предположим, что условие (A) не выполнено, т. е. $|W| = \aleph_0$.

Пусть Y — некоторое бесконечное подмножество множества L. Так как почти для всех $p \in L$ выполнено $r_p(M_i) = 1$, имеем

$$\sum_{p\in Y} \mathfrak{M}_p = \sum_{p\in Y} r_p(M) \geqslant \sum_{i\in I}\sum_{p\in Y} r_p(M_i) = \sum_{i\in I} \aleph_0 = \mathfrak{M}\cdot\aleph_0 = \mathfrak{M}. \qquad (15.18)$$

Зафиксируем теперь произвольное кардинальное число $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ и рассмотрим два возможных случая.

I. Если $\mathfrak{N} \geqslant \aleph_0$, то $Y = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}\}$ будет конечным множеством (иначе из (15.18) следовало бы $\aleph_0 \cdot \mathfrak{N} \geqslant \mathfrak{M}$, что невозможно).

II. Пусть $\mathfrak{N}$ есть конечное кардинальное число. Используя те же самые рассуждения, что и для случая $\mathfrak{M} < \aleph_0$, мы получаем, что при любом $s \in \mathbf{N}$ найдётся конечное множество $X \subset L$, для которого M содержит изоморфное модулю $R^s(1-e_X)$ прямое слагаемое. Тогда при всех $p \in L \setminus X$ выполняется неравенство $r_p(M) \geqslant s$. Следовательно, соотношение $r_p(M) = \mathfrak{N}$ имеет место лишь для конечного множества значений $p \in L$.

Мы показали, что среди кардинальных чисел $\mathfrak{M}_p$ всякое $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$ может встретиться лишь конечное число раз. Тогда в силу счётности множества W

множество $C = \{\mathfrak{M}_p \mid p \in W\}$ также является счётным. Обозначим через $\mathfrak{N}_1$ наименьший из элементов множества C; далее, пусть $\mathfrak{N}_{n+1}$ есть наименьший из элементов множества $C \setminus \{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_n\}$.

Получили возрастающую последовательность вида (15.10). Через Y мы обозначим некоторое подмножество множества L с тем свойством, что среди кардинальных чисел $\mathfrak{M}_p$, где $p \in Y$, ровно по разу встречается каждый член этой возрастающей последовательности (но при этом не встречается никакой другой кардинал). Применяя (15.18) к бесконечному множеству Y, получаем

$$\mathfrak{M} \geqslant \sup_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \sum_{p \in Y} \mathfrak{M}_p \geqslant \mathfrak{M},$$

т. е. справедливы равенства (15.11). Если C содержит кардинал $\mathfrak{N}$, отличный от всех $\mathfrak{N}_n$, то $\mathfrak{N} \geqslant \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \mathfrak{N}_n = \mathfrak{M}$ — противоречие.

Итак, $C = \{\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \dots, \mathfrak{N}_n, \dots\}$. Тем самым мы доказали, что выполнено условие (B). ■

Доказательство теоремы 15.9 (случай $r(M) < \aleph_0$). Пусть M и A суть проективные модули, которые имеют одинаковые системы инвариантов, причём $r(M) = r(A) = s$ — конечное число. Представим M и A в виде

$$M \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{s} R(1 - \delta_i) \right) \oplus M', \qquad A \cong \left(\bigoplus_{i=1}^{s} R(1 - \delta_i') \right) \oplus A'$$

(где M' и A' — проективные модули псевдоранга 0). Пусть X — объединение всех множеств $\operatorname{supp} \delta_i$ и $\operatorname{supp} \delta_i'$, и пусть $B = R^s(1 - e_X)$; тогда $M \cong B \oplus M''$ и $A \cong B \oplus A''$, где M'' и A'' — проективные модули псевдоранга 0. Кардинал $r_p(B)$ конечен при любом $p \in L$, так что

$$r_p(M'') = r_p(M) - r_p(B) = r_p(A) - r_p(B) = r_p(A'').$$

Поэтому имеем $M'' \cong A''$ и, значит, $M \cong A$. ■

Сформулируем полезное вспомогательное утверждение.

Лемма 15.11. *Пусть V, U — проективные R-модули, причём имеют место прямые разложения*

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i, \qquad U = \bigoplus_{p \in Y} F_p,$$

где $|I| \geqslant \aleph_0$ и для всяких $i \in I$ и $p \in Y$ справедливо соотношение $r_p(V_i) = 1$, а все F_p суть свободные R_p-модули. Тогда $V \oplus U \cong V \oplus U'$, где

$$U' = \bigoplus_{p \in Z} F_p, \qquad Z = \{p \in Y \mid r_p(U) = r_p(F_p) > |I|\}.$$

Доказательство. Положим $X = Y \setminus Z$. В случае $Z = Y$ утверждение леммы очевидно; в противном случае выполнено равенство $|X| \cdot |I| = |I|$, что позволяет разбить индексное множество I на (непересекающиеся) множества $\{I_p\}_{p \in X}$ таким образом, чтобы соотношение $|I_p| = |I|$ имело место при любом $p \in X$. Для всякого $p \in X$ справедливо равенство $|I| + r_p(F_p) = |I|$ и, значит, будет выполнено

$$\begin{aligned}
\bigoplus_{i \in I_p} V_i &\cong \Big(\bigoplus_{i \in I_p} V_i(1 - e_p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I_p} V_i e_p\Big) \cong \\
&\cong \Big(\bigoplus_{i \in I_p} V_i(1 - e_p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{|I|} R_p\Big) \cong \\
&\cong \Big(\bigoplus_{i \in I_p} V_i(1 - e_p)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{|I|} R_p\Big) \oplus F_p \cong \Big(\bigoplus_{i \in I_p} V_i\Big) \oplus F_p.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем изоморфизмы

$$\begin{aligned}
V \oplus U &\cong \Big(\bigoplus_{p \in X} \bigoplus_{i \in I_p} V_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in X} F_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in Z} F_p\Big) \cong \\
&\cong \Big(\bigoplus_{p \in X} \bigoplus_{i \in I_p} V_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in Z} F_p\Big) \cong V \oplus U',
\end{aligned}$$

завершающие доказательство леммы. ■

Доказательство теоремы 15.9 (случай $\mathrm{cf}(r(M)) > \aleph_0$). Пусть A и M суть проективные модули, имеющие одну и ту же систему инвариантов, причём $\mathfrak{M} = r(A) = r(M)$ — бесконечный кардинал, для которого выполнено $\mathrm{cf}(\mathfrak{M}) > \aleph_0$. Представим эти модули в виде

$$M \cong M' \oplus M'', \qquad \text{где } M' = \bigoplus_{i\in I} R(1-\delta_i), \tag{15.19}$$

$$A \cong A' \oplus A'', \qquad \text{где } A' = \bigoplus_{i\in I} R(1-\delta_i'); \tag{15.20}$$

здесь $|I| = \mathfrak{M}$, а M'' и A'' — проективные модули псевдоранга 0.

Из доказательства теоремы 15.10 известно, что для подходящего идемпотента конечного типа δ рассматриваемое разложение модуля M' содержит ровно $\mathfrak{M}$ слагаемых, равных $R(1-\delta)$. Кроме того, существует идемпотент δ' такой, что приведённое выше прямое разложение модуля A' будет содержать $\mathfrak{M}$ слагаемых, равных $R(1-\delta')$; обозначим $X = \operatorname{supp}\delta \cup \operatorname{supp}\delta'$.

Мы рассмотрим изоморфизм $M \cong M'(1-e_X) \oplus (M'e_X \oplus M'')$, а также аналогичный изоморфизм для модуля A. Заменяя ими изоморфизмы (15.19) и (15.20), приходим к записям того же вида, но с дополнительным условием: для любого $i \in I$ выполнено включение $X \subset \operatorname{supp}\delta_i \cap \operatorname{supp}\delta_i'$ (далее считаем, что это условие соблюдено). Легко видеть, что «новые» разложения «новых» модулей M' и A' будут содержать ровно по $\mathfrak{M}$ слагаемых, равных $R(1-e_X)$. Для произвольного $i \in I$ и множества $Y = \operatorname{supp}\delta_i \setminus X$ имеем

$$\begin{aligned}
&\Big(\bigoplus_{\aleph_0} R(1-e_X)\Big) \oplus R(1-\delta_i) \cong\\
&\qquad \cong \Big(\bigoplus_{\aleph_0} Re_Y\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\aleph_0} R(1-\delta_i)\Big) \oplus R(1-\delta_i) \cong\\
&\qquad \cong \Big(\bigoplus_{\aleph_0} Re_Y\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\aleph_0} R(1-\delta_i)\Big) \cong \bigoplus_{\aleph_0} R(1-e_X).
\end{aligned}$$

Используя теперь равенства $|I| = \mathfrak{M} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M} = \mathfrak{M}\cdot\aleph_0$, получаем

$$\begin{aligned}
M' &\cong \Big(\bigoplus_{\mathfrak{M}} R(1-e_X)\Big) \oplus M' \cong \bigoplus_{i\in I}\Big(\Big(\bigoplus_{\aleph_0} R(1-e_X)\Big) \oplus R(1-\delta_i)\Big) \cong\\
&\cong \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{\aleph_0} R(1-e_X) \cong \bigoplus_{\mathfrak{M}} R(1-e_X);
\end{aligned}$$

аналогичный изоморфизм справедлив и для модуля A'.

Пусть слагаемое M'' из разложения (15.19) имеет вид (15.9). Учитывая лемму 15.11 (надо применить её к модулю $V = M'$), можно считать, что для любого $p \notin X$ кардинальное число $r_p(F_p)$ или строго больше $\mathfrak{M}$, или равно 0; аналогичное предположение применимо к модулю A''. При всех $p \in L$ имеем $r_p(M) = r_p(M') + r_p(F_p)$. Для $p \in X$ отсюда будет следовать $r_p(F_p) = r_p(M)$, а для $p \notin X$ (с учётом наших дополнительных предположений) — $F_p = 0$ или $r_p(F_p) = r_p(M)$ соответственно в случаях $r_p(M) = \mathfrak{M}$ и $r_p(M) > \mathfrak{M}$. Поэтому все ранги $r_p(F_p)$ однозначно определены системой инвариантов проективного модуля M (совпадающей с системой инвариантов модуля A). Следовательно, $M'' \cong A''$ и, далее, $M \cong A$. ■

Предложение 15.12. *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечный кардинал,* $\mathrm{cf}(\mathfrak{M}) = \aleph_0$ *и модуль M задаётся равенством*

$$M = \bigoplus_{i \in I} M_i, \qquad \text{где } M_i = R(1 - \delta_i) \text{ и } |I| = \mathfrak{M}. \tag{15.21}$$

Если $W = \{p \in L \mid r_p(M) < \mathfrak{M}\}$ и δ_i' — идемпотент конечного типа такой, что $\operatorname{supp} \delta_i' = \operatorname{supp} \delta_i \cap W$, *то* $M \cong \bigoplus_{i \in I} R(1 - \delta_i')$.

Доказательство. Если множество $X = L \setminus W$ конечно, то имеем

$$M = M(1 - e_X) \oplus Me_X \cong \Big(\bigoplus_{i \in I} M_i(1 - e_X)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in X} \bigoplus_{\mathfrak{M}} Re_p\Big) \cong$$
$$\cong \Big(\bigoplus_{i \in I} R(1 - \delta_i)(1 - e_X)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\mathfrak{M}} Re_X\Big) \cong \bigoplus_{i \in I} R(1 - \delta_i'),$$

что и требовалось.

Предположим теперь, что множество X бесконечно. Пусть B_i — идеал, для которого $M_i \oplus B_i = R(1 - \delta_i')$. Нетрудно видеть, что имеет место прямое разложение

$$\bigoplus_{i \in I} B_i = \bigoplus_{p \in X} F_p,$$

где F_p — свободные R_p-модули (при этом $r_p(F_p) \leqslant |I| = \mathfrak{M}$).

Если $\mathfrak{M} = \aleph_0$, то положим $\mathfrak{N}_n = 1$ при всех $n \in \mathbf{N}$; в противном случае мы зафиксируем произвольную последовательность бесконечных кардиналов вида (15.10), для которой выполнены соотношения (15.11). Далее, разобьём I на (непересекающиеся) подмножества $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ таким образом, чтобы каждое множество I_n имело мощность $\mathfrak{N}_n$, и обозначим $A_n = \bigoplus\limits_{i\in I_n} M_i$.

Введём на счётном множестве $X \times \mathbf{N}$ строгий порядок "$\ll$" так, чтобы упорядоченные множества $(X \times \mathbf{N}, \ll)$ и $(\mathbf{N}, <)$ были изоморфны. Построим теперь по индукции инъекцию $\kappa\colon X \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Пусть $(p, l) \in X \times \mathbf{N}$, и пусть значения $\kappa(p', l')$ уже определены для каждой пары $(p', l') \ll (p, l)$; положим $H = \{\kappa(p', l') \mid (p', l') \ll (p, l)\}$. Если s — наибольшее число в $H \cup \{1\}$, то

$$\sum_{n\in H} r_p(A_n) \leqslant \sum_{n\in H} |I_n| = \sum_{n\in H} \mathfrak{N}_n \leqslant \max(|H|, \mathfrak{N}_s) < \mathfrak{M},$$

поэтому из $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} r_p(A_n) = r_p(M) = \mathfrak{M}$ следует $\sum\limits_{n\notin H} r_p(A_n) = \mathfrak{M}$.

Из последнего равенства можно вывести, что при некотором $n \in \mathbf{N} \setminus H$ имеет место неравенство $r_p(A_n) \geqslant \mathfrak{N}_l$. Положим $\kappa(p, l)$ равным наименьшему из чисел $n \in \mathbf{N} \setminus H$, обладающих указанным свойством. Итак, мы построили инъективное отображение κ.

Для каждого $p \in X$ обозначаем через D_p объединение множеств $I_{\kappa(p,l)}$, где l пробегает $\mathbf{N}$; пусть D_0 есть множество всех тех индексов $i \in I$, которые не принадлежат ни одному из таких множеств D_p. Для $p \in X \cup \{0\}$ через S_p будем обозначать прямую сумму всех идеалов M_i, где $i \in D_p$. Мы знаем, что $r_p(A_{\kappa(p,l)}) \geqslant \mathfrak{N}_l$ при любых $p \in X$ и $l \in \mathbf{N}$. Так как для всех $p \in X$ модуль S_p изоморфен прямой сумме модулей $A_{\kappa(p,l)}$, где l пробегает $\mathbf{N}$, то

$$\mathfrak{M} = |I| \geqslant |D_p| \geqslant r_p(S_p) \geqslant \sum_{l\in\mathbf{N}} \mathfrak{N}_l = \mathfrak{M},$$

поэтому $r_p(S_p) = \mathfrak{M}$. Это означает, что множество $D = \{i \in D_p \mid r_p(M_i) = 1\}$ имеет мощность $\mathfrak{M}$. Зафиксировав число $p \in X$, через M' обозначим прямую сумму идеалов M_i по всем $i \in D_p \setminus D$. Применяя лемму 15.11 к проективным R-модулям $V = \bigoplus\limits_{i \in D} M_i$ и $U = F_p$, получаем

$$S_p \oplus F_p \cong M' \oplus \Big(\bigoplus_{i \in D} M_i\Big) \oplus F_p \cong M' \oplus \Big(\bigoplus_{i \in D} M_i\Big) \cong S_p,$$

$$\bigoplus_{i \in I} R(1-\delta_i') \cong M \oplus \Big(\bigoplus_{i \in I} B_i\Big) \cong$$
$$\cong S_0 \oplus \Big(\bigoplus_{p \in X} S_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in X} F_p\Big) \cong S_0 \oplus \Big(\bigoplus_{p \in X} S_p\Big) \cong M.$$

Предложение доказано. ■

Суть доказанного результата заключается в следующем: если дано разложение вида (15.21), то можно считать, что соответствующее множество W обладает свойством

$$\text{при любых } p \in L \setminus W \text{ и } i \in I \text{ выполнено } r_p(M_i) = 1. \tag{15.22}$$

Предложение 15.13. *Пусть обозначения* $\mathfrak{M}$, M, W *имеют тот же самый смысл, что и в предложении* 15.12, *причём* $|W| = \aleph_0$ *и выполняется свойство* (15.22). *Кроме того, пусть* $\mathfrak{M}_p = r_p(M)$ *и обозначения* $\mathfrak{N}_n$ *имеют тот же самый смысл, что и в теореме* 15.10. *В этом случае* M *изоморфен модулю* M', *задаваемому условиями* (15.14) *и* (15.15).

Доказательство. Примем обозначения (15.14) и для $n \geqslant 1$ обозначим $Y_n = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p = \mathfrak{N}_n\}$ (тогда $Y_n \subset P_n$). Рассмотрим теперь два случая.

I. Пусть $\mathfrak{M} = |I| > \aleph_0$. Сначала мы предположим, что выполнено либо $\mathfrak{N}_1 = 0$ и $\mathfrak{N}_2 \geqslant \aleph_0$, либо $\mathfrak{N}_1 \geqslant \aleph_0$. Обозначим

$$D_n = \{i \in I \mid r_p(M_i) = 1 \text{ для некоторого } p \in P_n\}.$$

Поскольку $Y_n \neq \varnothing$, то хотя бы для одного числа $p \in P_n$ выполнено равенство $r_p(M) = \mathfrak{N}_n$. Следовательно,

$$\mathfrak{N}_n \leqslant |D_n| \leqslant |Y_1| \cdot \mathfrak{N}_1 + ... + |Y_n| \cdot \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_1 + ... + \mathfrak{N}_n = \mathfrak{N}_n,$$

поэтому $|D_n| = \mathfrak{N}_n$ (договоримся также, что $D_0 = \varnothing$). Из равенства $|W| = \aleph_0$ мы видим, что объединение возрастающей последовательности множеств D_n равно I. Обозначим $I_n = D_n \setminus D_{n-1}$; тогда $\{I_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ — разбиение множества I на непересекающиеся подмножества, при этом $|I_n| = |D_n| - |D_{n-1}| = \mathfrak{N}_n$.

Для всякого $n \in \mathbf{N}$ и всякого индекса $i \in I_n$ обозначаем через B_i идеал кольца R такой, что $M_i \oplus B_i = R(1-\varepsilon_{n-1})$. В этом случае для любых $j > n$, $p \in P_n$ и $i \in I_j$ имеем $r_p(M_i \oplus B_i) = 0$. Значит, если $p \in Y_n$, то

$$\sum_{i\in I} r_p(B_i) = \sum_{j\leqslant n} \sum_{i\in I_j} r_p(B_i) = \sum_{i\in D_n} r_p(B_i) \leqslant |D_n| = \mathfrak{N}_n.$$

Далее, в силу условия (15.22) при всех $p \notin W$ и $i \in I$ выполняется равенство $r_p(B_i) = 0$. Поскольку идеалы B_i имеют псевдоранг 0, можно записать

$$\bigoplus_{i\in I} B_i = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \bigoplus_{p\in Y_n} F_p,$$

где F_p есть свободный R_p-модуль ранга $r_p(F_p) \leqslant \mathfrak{N}_n$ при всех $p \in Y_n$.

Для каждого $n \in \mathbf{N}$ мы обозначим через A_n прямую сумму идеалов M_i по всем $i \in I_n$, тогда $A_n\varepsilon_{n-1} = 0$. Если $p \in Y_n$, то из $r_p(A_n) \leqslant |I_n| = \mathfrak{N}_n$ и

$$\mathfrak{N}_n = r_p(M) = \sum_{i\in I} r_p(M_i) = \sum_{i\in D_n} r_p(M_i) \leqslant$$
$$\leqslant |D_{n-1}| + \sum_{i\in I_n} r_p(M_i) = \mathfrak{N}_{n-1} + r_p(A_n)$$

следует, что $r_p(A_n) = \mathfrak{N}_n$. Для идемпотента конечного типа δ с носителем Y_n тогда имеем $A_n\delta \cong \bigoplus\limits_{\mathfrak{N}_n} \bigoplus\limits_{p\in Y_n} R_p$. Применим к модулю $V = A_n\delta$ лемму 15.11:

$$A_n \oplus \Big(\bigoplus_{p\in Y_n} F_p\Big) \cong A_n(1-\delta) \oplus \bigg(A_n\delta \oplus \Big(\bigoplus_{p\in Y_n} F_p\Big)\bigg) \cong$$
$$\cong A_n(1-\delta) \oplus A_n\delta = A_n$$

(если $n = 1$ и $\mathfrak{N}_1 = 0$, то эти изоморфизмы тоже справедливы, поскольку все входящие в них модули равны 0). Отсюда уже следует

$$\begin{aligned}\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{\mathfrak{N}_n} R(1-\varepsilon_{n-1}) &\cong \bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{i\in I_n}(M_i\oplus B_i)\cong\\ &\cong\Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{i\in I_n} M_i\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{i\in I} B_i\Big)=\\ &=\Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{p\in Y_n} F_p\Big)\cong\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} A_n\cong\bigoplus_{i\in I} M_i = M.\end{aligned}$$

Теперь мы допустим, что (15.10) — произвольная строго возрастающая последовательность со свойством (15.11), а $s \geqslant 0$ — наибольшее целое число, для которого $\mathfrak{N}_s$ конечно. Применяя к модулю $M(1-\varepsilon_s)$ приведённые выше рассуждения, приходим к изоморфизму

$$M(1-\varepsilon_s)\cong\bigoplus_{n>s}\bigoplus_{\mathfrak{N}_n} R(1-\varepsilon_{n-1}). \tag{15.23}$$

Группируя слагаемые R_p в прямом разложении модуля $M\varepsilon_s$, получаем

$$M\varepsilon_s\cong\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\mathfrak{N}_n}\bigoplus_{p\in Y_n} R_p\cong\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_{n-1})\varepsilon_s.$$

Из условия (15.23) и того, что $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2+\ldots+\mathfrak{A}_s+\mathfrak{N}_{s+1}=\mathfrak{N}_s+\mathfrak{N}_{s+1}=\mathfrak{N}_{s+1}$, следует изоморфизм

$$M(1-\varepsilon_s)\cong M(1-\varepsilon_s)\oplus\Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_s)\Big).$$

Поскольку при $n>s$ выполнено $\mathfrak{A}_n=\mathfrak{N}_n$, имеем

$$M=M(1-\varepsilon_s)\oplus M\varepsilon_s\cong M(1-\varepsilon_s)\oplus\Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_s)\Big)\oplus M\varepsilon_s\cong$$

$$\cong\Big(\bigoplus_{n>s}\bigoplus_{\mathfrak{N}_n} R(1-\varepsilon_{n-1})\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_s)\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(\varepsilon_s-\varepsilon_{n-1})\Big)\cong$$

$$\begin{aligned}&\cong\Big(\bigoplus_{n>s}\bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_{n-1})\Big)\oplus\Big(\bigoplus_{n=1}^{s}\bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_{n-1})\Big)\cong\\ &\cong\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_{n-1})=M'.\end{aligned}$$

II. Пусть выполнено $\mathfrak{M} = |I| = \aleph_0$. Занумеруем при помощи множества индексов I все идеалы $R(1-\varepsilon_{n-1})$ кольца R, входящие в разложение (15.15):

$$M' = \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} \bigoplus_{\mathfrak{A}_n} R(1-\varepsilon_{n-1}) \cong \bigoplus_{i\in I} M'_i.$$

Как мы уже знаем из доказательства теоремы 15.10, модуль M' имеет ту же систему инвариантов, что и M (так как для каждого $p \in L \setminus W$ справедливо равенство $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}$).

Идеал $M_i \cap M'_i = M_i M'_i$ кольца R имеет вид $R(1-\delta'_i)$, при этом в силу условия (15.22) выполнено включение $\operatorname{supp}\delta'_i \subset W$. Далее, существуют такие идеалы A_i и A'_i кольца R, что справедливы соотношения $M_i = R(1-\delta'_i) \oplus A_i$ и $M'_i = R(1-\delta'_i) \oplus A'_i$. Символом A (символом A') обозначим прямую сумму идеалов A_i (соответственно идеалов A'_i) по всем $i \in I$. Тогда

$$M \cong \Bigl(\bigoplus_{i\in I} R(1-\delta'_i)\Bigr) \oplus A, \qquad M' \cong \Bigl(\bigoplus_{i\in I} R(1-\delta'_i)\Bigr) \oplus A';$$

очевидно, что A и A' — это проективные модули псевдоранга 0, для которых $r_p(A) = r_p(A') = 0$ при всех $p \in L \setminus W$.

Для любого числа $p \in W$ кардинал $r_p(M) = r_p(M')$ является конечным и, следовательно,

$$\begin{aligned} r_p(A) = r_p(M) - \sum_{i\in I} r_p\bigl(R(1-\delta'_i)\bigr) = \\ = r_p(M') - \sum_{i\in I} r_p\bigl(R(1-\delta'_i)\bigr) = r_p(A'). \end{aligned}$$

Отсюда $A \cong A'$, а значит, $M \cong M'$. ■

Доказательство теоремы 15.9. Учитывая уже рассмотренные ранее случаи, достаточно ограничиться ситуацией, когда $r(M) = \mathfrak{M}$ — бесконечное кардинальное число счётной конфинальности.

Пусть проективный модуль M задан соотношением (15.7), где $|I| = \mathfrak{M}$, и пусть выполнено $r_p(M) = \mathfrak{M}_p$. Мы будем постепенно «улучшать» свойства разложения (15.7). Положим

$$X = \{p \in L \mid \mathfrak{M}'_p < \mathfrak{M}\}, \qquad \text{где } \mathfrak{M}'_p = \sum_{i\in I} r_p(M_i),$$
$$W = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\};$$

тогда ввиду предложения 15.12 можно считать, что при любых $p \notin X$ и $i \in I$ выполнено условие $r_p(M_i) = 1$. Ясно, что $W = \{p \in X \mid r_p(F_p) < \mathfrak{M}\}$; введём обозначение $Y = X \setminus W$.

Зададим идемпотенты конечного типа δ_i условием

$$\operatorname{supp} \delta_i = \{p \in Y \mid r_p(M_i) = 0\}.$$

Поскольку для всех $p \in X$ (а значит, для всех $p \in Y$) справедливо равенство $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'_p = \mathfrak{M}$, имеем

$$\bigoplus_{i\in I} R\delta_i \cong \bigoplus_{p\in Y} \bigoplus_{\mathfrak{M}} R_p.$$

Заметим, что для любых $p \notin W$ и $i \in I$ выполнено $r_p(M_i \oplus R\delta_i) = 1$ (так как из $r_p(M_i) = 0$ и $p \notin W$ вытекает $p \in Y$ и, значит, $p \in \operatorname{supp} \delta_i$). Учитывая, что при всех $p \in Y$ справедливо неравенство $r_p(F_p) \geqslant \mathfrak{M}$, получаем

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in Y} F_p\Big) \cong \Big(\bigoplus_{i\in I} (M_i \oplus R\delta_i)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\in Y} F_p\Big).$$

Это означает, что в разложении (15.7) можно заменить идеалы M_i идеалами $M_i \oplus R\delta_i$. В связи со сказанным будем далее предполагать, что выполняется свойство (15.22).

Если $p \in W$, то множество $I_p = \{i \in I \mid r_p(M_i) = 0\}$ имеет мощность $\mathfrak{M}$ (в случае $|I_p| < \mathfrak{M}$ из равенства $\mathfrak{M} - |I_p| = \mathfrak{M}$ следовало бы $r_p(M) \geqslant \mathfrak{M}$, что невозможно). Итак, при любом $p \in W$ имеем $|I_p| = \mathfrak{M} > \mathfrak{M}_p \geqslant r_p(F_p)$, откуда легко вывести, что существует прямое разложение

$$\bigoplus_{p\in W} F_p \cong \bigoplus_{i\in I} R\delta'_i$$

такое, что для всякого $i \in I$ выполнено $M_i \cap R\delta'_i = 0$. Это позволяет перейти от исходного разложения (15.7) к аналогичному разложению

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i\in I}(M_i \oplus R\delta'_i)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin W} F_p\Big).$$

Идеалы $M_i \oplus R\delta'_i$ также имеют вид (15.8), т. е. далее мы можем считать, что разложение (15.7) обладает свойством «$F_p = 0$ при всех $p \in W$».

Кроме того, ввиду леммы 15.11 будем считать, что в разложении (15.7) для любого $p \notin W$ выполнено либо $r_p(F_p) > \mathfrak{M}$, либо $F_p = 0$. Рассмотрим два возможных случая.

I. Сначала предположим, что множество W конечно; учитывая (15.22), мы имеем изоморфизмы

$$\begin{aligned} M &\cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin W} F_p\Big) \cong \\ &\cong \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i e_W\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i(1-e_W)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin W} F_p\Big) \cong \\ &\cong \Big(\bigoplus_{p\in W}\bigoplus_{\mathfrak{M}_p} R_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\mathfrak{M}} R(1-e_W)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p\notin W} F_p\Big). \end{aligned}$$

Для любого $p \notin W$ выполняется $\mathfrak{M}_p = r_p(M) = \mathfrak{M} + r_p(F_p)$. Отсюда с учётом наших дополнительных предположений мы получим $F_p = 0$ или $r_p(F_p) = \mathfrak{M}_p$ соответственно для случаев $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_p > \mathfrak{M}$. Из этого ясно, что строение проективного модуля M однозначно определяется его системой инвариантов.

II. Допустим, что W — счётное множество. Применяя к прямой сумме идеалов M_i (по всем $i \in I$) предложение 15.13 и повторяя приведённые выше рассуждения о рангах $r_p(F_p)$, мы получаем, что рассматриваемый модуль M задаётся условиями (15.14)–(15.17), т. е. в этом случае он также определяется однозначно с точностью до изоморфизма. ■

Теперь мы докажем критерий существования мономорфизма из одного проективного модуля над csp-кольцом в другой.

Теорема 15.14. *Пусть M и A — проективные R-модули. Следующие условия эквивалентны*:

1) *существует вложение* $A \to M$;

2) $r_p(A) \leqslant r_p(M)$ *для всех* $p \in L$ *и* $r(A) \leqslant r(M)$.

Доказательство. Учитывая предложение 15.8, достаточно установить импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Благодаря следствию 15.6 можно записать

$$M \cong \Big(\bigoplus_{i \in I} R(1-\delta_i)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in L} F_p\Big),$$

где F_p суть свободные R_p-модули, а элементы δ_i — подходящие идемпотенты конечного типа. Если выполнено 2), то существуют свободные R_p-модули F'_p, ранги которых $r_p(F'_p)$ будут удовлетворять равенству $r_p(F'_p) + r_p(A) = r_p(M)$ при всех $p \in L$.

Ввиду условия $r(A) \leqslant r(M) = |I|$ можно выбрать подмножество $D \subset I$ такое, что $|D| = r(A)$. Заметим, что каждый идеал $T(1-\delta_i)$ проективен, так как он совпадает с взятой по всем $p \in L \setminus \operatorname{supp} \delta_i$ прямой суммой идеалов R_p. Рассмотрим проективные R-модули

$$M' = \Big(\bigoplus_{i \in D} R(1-\delta_i)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i \notin D} T(1-\delta_i)\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{p \in L} F_p\Big),$$

$$A' = \Big(\bigoplus_{p \in L} F'_p\Big) \oplus A.$$

Ясно, что модуль M' вкладывается в M. При любом $p \in L$ имеем $Te_p = Re_p$, отсюда $M'e_p \cong Me_p$ и $r_p(M') = r_p(M) = r_p(F'_p) + r_p(A) = r_p(A')$; кроме того, выполняется $r(M') = |D| = r(A) = r(A')$. Применяя теперь теорему 15.9 к A' и M', приходим к изоморфизму $A' \cong M'$. Это означает, что модуль A можно вложить в M. ■

Из теорем 15.9 и 15.14 сразу получаем, что справедлив аналог теоремы Кантора—Шрёдера—Бернштейна: если для проективных R-модулей M и A существуют вложения $A \to M$ и $M \to A$, то $M \cong A$.

Предложение 15.15. *Пусть M — какой-то проективный R-модуль. Следующие условия эквивалентны*:

1) *модуль M_R конечно порождён*;

2) *все кардинальные инварианты модуля M_R конечны и $r_p(M) = r(M)$ почти для всех $p \in L$.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{M} = r(M)$ и $\mathfrak{M}_p = r_p(M)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Из условия 2) следует, что множество $W = \{p \in L \mid \mathfrak{M}_p < \mathfrak{M}\}$ будет конечным, т. е. выполнено условие (A) теоремы 15.10; так как строение проективного модуля M однозначно определяется его системой инвариантов, то получаем, что M задаётся условиями (15.12) и (15.13). Все кардиналы $\mathfrak{M}_p$ конечны, поэтому свободные R_p-модули F_p имеют конечные ранги и, значит, являются конечно порождёнными R-модулями. Из 2) следует, что множество тех $p \in L$, для которых $F_p \neq 0$, конечно. Отсюда вытекает, что M — конечно порождённый R-модуль.

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть M обладает конечной системой образующих, состоящей из s элементов. Ввиду проективности модуля M можно считать, что M есть прямое слагаемое свободного модуля R^s, т. е. $R^s = M \oplus A$ для некоторого A. В силу предложения 15.8 инварианты модулей M и A не могут быть больше соответствующих инвариантов модуля R^s (проще говоря, они не превышают числа s). Из $\mathfrak{M} < \aleph_0$ следует, что условие (B) теоремы 15.10 не выполняется, а значит, выполняется условие (A). Таким образом, $r_p(M) \geqslant r(M)$ почти для всех $p \in L$. Применяя аналогичные рассуждения к проективному модулю A, получаем, что при почти всех $p \in L$ справедливы неравенства $r_p(M) \geqslant r(M)$ и $r_p(A) \geqslant r(A)$. Для всех таких p имеем

$$s = r(R^s) = r(M) + r(A) \leqslant r_p(M) + r_p(A) = r_p(R^s) = s,$$

откуда, в частности, следует равенство $r_p(M) = r(M)$. ■

Через Υ мы обозначим множество всех функций $\xi\colon L \to \mathbf{N} \cup \{0\}$ с тем свойством, что $\xi(p)$ представляет собой одно и то же неотрицательное число почти для всех $p \in L$. Очевидно, что множество Υ является коммутативным моноидом относительно операции поточечного сложения.

Для любого конечно порождённого проективного модуля M_R и любого $p \in L$ положим $\xi_M(p) = r_p(M)$, тогда (по предложению 15.15) имеем $\xi_M \in \Upsilon$. Очевидно, что выполнено $\xi_{M \oplus A} = \xi_M + \xi_A$, причём в силу предложения 15.15 и теоремы 15.9 равенство $\xi_M = \xi_A$ эквивалентно условию $M \cong A$.

Зафиксируем функцию $\eta \in \Upsilon$. Для каждого $p \in L$ положим $\mathfrak{M}_p = \eta(p)$, а через $\mathfrak{M}$ обозначим неотрицательное число, которое совпадает с $\eta(p)$ почти для всех $p \in L$. Легко видеть, что $\mathfrak{M}$ и $\{\mathfrak{M}_p\}_{p \in L}$ удовлетворяют условию (A) теоремы 15.10, поэтому из предложения 15.15 и теоремы 15.10 получаем, что для подходящего конечно порождённого проективного модуля M выполнено $\eta = \xi_M$. Из этого можно заключить, что Υ есть моноид классов изоморфных конечно порождённых проективных R-модулей.

Определим отображение ι из $\Upsilon \times \Upsilon$ в группу $\mathbf{Z}^L$ всех функций $L \to \mathbf{Z}$, положив $\iota(\xi, \eta) = \xi - \eta$ (вычитание производится поточечно). Поскольку в Υ справедлив закон сокращения, имеет место

Лемма 15.16. *Для* $\xi, \eta, \xi', \eta' \in \Upsilon$ *равносильны следующие условия*:

1) $\xi + \eta' + \zeta = \xi' + \eta + \zeta$ *для некоторого* $\zeta \in \Upsilon$;

2) $\xi + \eta' = \xi' + \eta$;

3) $\iota(\xi, \eta) = \iota(\xi', \eta')$.

Введём обозначение $L_0 = L \cup \{0\}$.

Теорема 15.17. *Для каждого* csp-*кольца* R *группа Гротендика* $K_0(R)$ *есть свободная группа счётного ранга.*

Доказательство. Напомним, что символом $K_0(R)$ обозначают группу Гротендика моноида Υ всех классов изоморфных конечно порождённых проективных R-модулей (см. [78]). Задавая на $\Upsilon \times \Upsilon$ операцию покоординатного сложения, получим

$$\iota\big((\xi,\eta)+(\xi',\eta')\big)=\iota(\xi+\xi',\eta+\eta')=\xi+\xi'-\eta-\eta'=\iota(\xi,\eta)+\iota(\xi',\eta')$$

для произвольных $\xi,\eta,\xi',\eta'\in\Upsilon$. Учитывая эквивалентность условий 1) и 3) леммы 15.16, получаем, что образ $\iota(\Upsilon\times\Upsilon)$ отображения ι является группой Гротендика моноида Υ. Остаётся лишь заметить, что этот образ есть прямая сумма счётного числа копий группы $\mathbf{Z}$; свободным базисом группы $\iota(\Upsilon\times\Upsilon)$ будет, например, множество $\{\eta_p\}_{p\in L_0}$, где $\eta_0(p)=\eta_p(p)=1$ для всякого $p\in L$ и $\eta_p(q)=0$ для любых различных $p,q\in L$. ■

§16. Тензорное произведение модулей над csp-кольцами

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, мы будем считать, что R есть некоторое csp-кольцо,

$$T = \bigoplus_{p \in L} R_p \subset R \subset \prod_{p \in L} R_p = K, \qquad L_0 = L \cup \{0\}.$$

Поле R/T обозначим через R_0.

Если A есть R-модуль, будем писать $A_0 = A/AT$ и $A_p = Ae_p$ для $p \in L$ (заметим, что это согласуется с обозначениями R_0 и R_p). Очевидно, A_p будет R_p-модулем при всех $p \in L_0$. Для всякого R-модуля A можно рассматривать точную последовательность модулей

$$0 \longrightarrow AT \longrightarrow A \longrightarrow A_0 \longrightarrow 0, \tag{16.1}$$

при этом выполнено

$$AT = A\Big(\bigoplus_{p \in L} Re_p\Big) = \bigoplus_{p \in L} Ae_p = \bigoplus_{p \in L} A_p. \tag{16.2}$$

Утверждения следующей леммы устанавливаются непосредственно.

Лемма 16.1. *Пусть A — произвольный R-модуль. Тогда*:

(а) $A = A_p \oplus A(1 - e_p)$ *для любого* $p \in L$;

(б) *для любых различных* $p, q \in L_0$ *выполнено* $(A_p)_q = 0$;

(в) $(A_0)_0 \cong A_0$ *и для любого* $p \in L$ *выполнено* $(A_p)_p = A_p$;

(г) $A = 0$ *в точности в том случае, когда* $A_p = 0$ *для всех* $p \in L_0$.

Для $p \in L_0$ в силу существования гомоморфизма колец $R \to R_p$ всякий R_p-модуль естественным образом превращается в R-модуль. При этом ввиду сюръективности данного гомоморфизма для произвольных R_p-модулей U, V выполнено равенство $U \otimes_R V = U \otimes_{R_p} V$ (см. предложение 10.1 и замечание, сделанное после этого предложения).

Предложение 16.2. *Пусть A и F суть какие-то R-модули, и пусть $\alpha_p \colon A_p \otimes_R F \to A \otimes_R F$ (где $p \in L$) — гомоморфизм, который индуцируется* *естественным вложением* $A_p \to A$, *а гомоморфизм* $\alpha_0 \colon A \otimes_R F \to A_0 \otimes_R F$ *индуцируется естественным эпиморфизмом* $A \to A_0$. *Тогда*:

(а) α_p *является мономорфизмом при всех* $p \in L$;

(б) *при всех* $p \in L$ *выполнено* $(A \otimes_R F)_p = \operatorname{Im} \alpha_p$;

(в) $\operatorname{Ker} \alpha_0 = (A \otimes_R F)T$;

(г) *при всех* $p \in L_0$ *выполнено* $(A \otimes_R F)_p \cong A_p \otimes_R F \cong A_p \otimes_R F_p$.

Доказательство. Утверждение (а) вытекает из того факта, что A_p — прямое слагаемое (и, значит, чистый подмодуль) модуля A, если $p \in L$.

(б) Пусть $p \in L$. Для любых $f \in F$, $a \in A_p$ в группе $A \otimes_R F$ выполнено $a \otimes_R f = ae_p \otimes_R f = (a \otimes_R f)e_p \in (A \otimes_R F)e_p$, откуда ясно, что модуль $\operatorname{Im} \alpha_p$ содержится в модуле $(A \otimes_R F)e_p = (A \otimes_R F)_p$. Обратно, если $f \in F$ и $a \in A$, то $(a \otimes_R f)e_p = ae_p \otimes_R f \in \operatorname{Im} \alpha_p$. Таким образом, $(A \otimes_R F)_p \subset \operatorname{Im} \alpha_p$; значит, справедливо равенство $(A \otimes_R F)_p = \operatorname{Im} \alpha_p$.

(в) Рассмотрим точную последовательность

$$AT \otimes_R F \xrightarrow{\alpha} A \otimes_R F \xrightarrow{\alpha_0} A_0 \otimes_R F \longrightarrow 0, \tag{16.3}$$

индуцированную последовательностью (16.1). Ввиду (16.2) мы имеем

$$(A \otimes_R F)T = \bigoplus_{p \in L} (A \otimes_R F)_p = \bigoplus_{p \in L} \operatorname{Im} \alpha_p = \operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker} \alpha_0.$$

(г) Из справедливости утверждений (а) и (б) следует, что выполняется $(A \otimes_R F)_p = \operatorname{Im} \alpha_p \cong A_p \otimes_R F$. Последовательность (16.3) точна, поэтому

$$(A \otimes_R F)_0 = (A \otimes_R F)/(A \otimes_R F)T = (A \otimes_R F)/\operatorname{Ker} \alpha_0 \cong A_0 \otimes_R F.$$

Наконец, для любого $p \in L_0$ имеем

$$(A \otimes_R F)_p \cong \big((A \otimes_R F)_p\big)_p \cong (A_p \otimes_R F)_p \cong A_p \otimes_R F_p,$$

что завершает доказательство предложения. ■

Из леммы 16.1 и того факта, что $\otimes_R$ и $\otimes_{R_p}$ для R_p-модулей совпадают, теперь вытекает следующий результат.

Теорема 16.3. *Для R-модулей A и F эквивалентны условия*:

1) $A \otimes_R F = 0$;

2) $A \otimes_R F_p = 0$ *при всех* $p \in L_0$;

3) $A_p \otimes_R F = 0$ *при всех* $p \in L_0$;

4) $A_p \otimes_R F_p = 0$ *при всех* $p \in L_0$;

5) $A_p \otimes_{R_p} F_p = 0$ *при всех* $p \in L_0$.

Кроме того, из леммы 16.1 и предложения 16.2 немедленно получается, что для произвольных R-модулей A и F и любых различных чисел $p, q \in L_0$ выполнено $A_q \otimes_R F_p \cong A_q \otimes_R (F_p)_q = A_q \otimes_R 0 = 0$.

Напомним теперь, что в случае $S = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ категория mod-S совпадает с категорией p^k-ограниченных абелевых групп, при этом для всех S-модулей U и V выполняется $U \otimes_S V = U \otimes V$ (поскольку гомоморфизм колец $\mathbf{Z} \to S$ сюръективен). С учётом леммы 7.1 и того факта, что для любого ненулевого S-модуля U справедливо соотношение $pU \neq U$, получаем такое утверждение: $U \otimes_S V = 0$ в точности тогда, когда хотя бы один из модулей U и V равен 0. Очевидно, указанная эквивалентность остаётся верной и в том случае, когда S есть некоторое поле.

Лемма 16.4. *Пусть U и V — модули над кольцом $S = \mathbf{Q}_p^*$. Тогда*:

(а) *если $\mathbf{t}(U) = U = pU \neq 0$, то равенство $U \otimes_S V = 0$ выполняется в том и только в том случае, когда $p(V/\mathbf{t}(V)) = V/\mathbf{t}(V)$*;

(б) *если $\mathbf{t}(U) = U \neq pU$, то равенство $U \otimes_S V = 0$ выполняется в том и только в том случае, когда $pV = V$*;

(в) *если $\mathbf{t}(U) \neq U$ и $\mathbf{t}(V) \neq V$, то $U \otimes_S V \neq 0$.*

Доказательство этого результата аналогично доказательству леммы 7.1 (можно воспользоваться также тем фактом, что если выполняется $\mathbf{t}(U) = U$ или $\mathbf{t}(V) = V$, то $U \otimes_S V = U \otimes V$).

Итак, мы получили полный ответ на вопрос о том, при каких условиях для R-модулей A и F справедливо равенство $A \otimes_R F = 0$.

Предложение 16.5. *Пусть A, B, F — некоторые R-модули, причём выполнено $B \subset A$, и пусть $\beta_p\colon B_p \otimes_R F \to B \otimes_R F$, $\lambda_p\colon B_p \otimes_R F \to A_p \otimes_R F$, где $p \in L$, и $\lambda\colon B \otimes_R F \to A \otimes_R F$ — гомоморфизмы, которые индуцированы естественными вложениями $B_p \to B$, $B_p \to A_p$ и $B \to A$ соответственно. Справедливы следующие утверждения*:

(а) $\operatorname{Ker}\lambda = \bigoplus\limits_{p\in L} \beta_p(\operatorname{Ker}\lambda_p)$;

(б) λ *является мономорфизмом тогда и только тогда, когда при всех $p \in L$ гомоморфизм λ_p является мономорфизмом.*

Доказательство. (а) Как видно из доказательства предложения 15.8, существует естественное вложение модуля $B_0 = B/BT$ в модуль $A_0 = A/AT$; это вложение мы обозначим символом μ. Пусть $\lambda_0\colon B_0 \otimes_R F \to A_0 \otimes_R F$ есть гомоморфизм, индуцированный вложением μ. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
B \otimes_R F \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "\lambda"'] & B_0 \otimes_R F \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_0"] & 0 \\
A \otimes_R F \arrow[r, "\alpha_0"] & A_0 \otimes_R F \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна, так как и гомоморфизм $\lambda_0\beta_0$, и гомоморфизм $\alpha_0\lambda$ будут переводить каждый элемент $b \otimes_R f \in B \otimes_R F$ в элемент $(b + AT) \otimes_R f$. Заметим, что $\mu(B_0)$ — подпространство (R/T)-пространства A_0. Следовательно, $\mu(B_0)$ служит для A_0 прямым слагаемым (и как модуль над R/T, и как R-модуль). Это значит, что $\mu(B_0)$ будет чистым подмодулем R-модуля A_0 и что λ_0 будет мономорфизмом.

Пусть $y \in \operatorname{Ker}\lambda$, тогда ввиду предложения 16.2 имеем

$$y \in \operatorname{Ker}(\alpha_0\lambda) = \operatorname{Ker}(\lambda_0\beta_0) = \operatorname{Ker}\beta_0 = (B \otimes_R F)T = \bigoplus_{p\in L} \operatorname{Im}\beta_p.$$

Следовательно, для некоторого конечного подмножества $X \subset L$ справедливо равенство $y = \sum\limits_{p\in X} \beta_p(y_p)$, где $y_p \in B_p \otimes_R F$.

Через α_p обозначаем гомоморфизм $A_p \otimes_R F \to A \otimes_R F$, индуцируемый естественным вложением $A_p \to A$. Для произвольного $p \in X$ мы рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_p \otimes_R F \arrow[r, "\beta_p"] \arrow[d, "\lambda_p"'] & B \otimes_R F \arrow[d, "\lambda"] \\ 0 \arrow[r] & A_p \otimes_R F \arrow[r, "\alpha_p"] & A \otimes_R F \end{tikzcd}$$

(её строки точны в силу предложения 16.2). Из равенства $y_p e_p = y_p$ вытекает $y = \sum\limits_{p\in X} \beta_p(y_p e_p) = \sum\limits_{p\in X} \beta_p(y_p) e_p$. Поэтому для любого $p \in X$ имеем

$$0 = \lambda(y) e_p = \lambda(y e_p) = \lambda(\beta_p(y_p) e_p) = \lambda(\beta_p(y_p e_p)) = \lambda(\beta_p(y_p)),$$

отсюда $y_p \in \operatorname{Ker}(\lambda\beta_p) = \operatorname{Ker}(\alpha_p\lambda_p) = \operatorname{Ker}\lambda_p$.

Тем самым мы доказали, что

$$\operatorname{Ker}\lambda \subset \sum_{p\in L} \beta_p(\operatorname{Ker}\lambda_p). \tag{16.4}$$

Сумма, стоящая в правой части включения (16.4), является прямой (так как прямой является сумма подмодулей $\operatorname{Im}\beta_p$ по всем $p \in L$). Будет справедливо и обратное включение, поскольку для любого $p \in L$ выполнено

$$\beta_p(\operatorname{Ker}\lambda_p) = \beta_p(\operatorname{Ker}(\alpha_p\lambda_p)) = \beta_p(\operatorname{Ker}(\lambda\beta_p)) \subset \operatorname{Ker}\lambda.$$

Утверждение (б) непосредственно следует из (а) в силу инъективности гомоморфизмов β_p при всех $p \in L$. ■

Теорема 16.6. *Пусть A, B, F — какие-то R-модули, причём $B \subset A$. Следующие условия эквивалентны*:

1) *гомоморфизм $B \otimes_R F \to A \otimes_R F$ инъективен*;
2) *гомоморфизм $B_p \otimes_R F \to A_p \otimes_R F$ инъективен для всех $p \in L$*;
3) *гомоморфизм $B \otimes_R F_p \to A \otimes_R F_p$ инъективен для всех $p \in L$*;

4) *гомоморфизм* $B_p \otimes_R F_p \to A_p \otimes_R F_p$ *инъективен для всех* $p \in L$;

5) *гомоморфизм* $B_p \otimes_{R_p} F_p \to A_p \otimes_{R_p} F_p$ *инъективен для всех* $p \in L$.

Доказательство. Равносильность 1) и 2) уже была установлена нами в предыдущем предложении. Далее, для доказательства импликации 3) $\Rightarrow$ 4) достаточно заметить, что ввиду справедливости импликации 1) $\Rightarrow$ 2) из инъективности гомоморфизма $B \otimes_R F_p \to A \otimes_R F_p$ для какого-то $p \in L$ вытекает инъективность гомоморфизма $B_p \otimes_R F_p \to A_p \otimes_R F_p$.

4) $\Rightarrow$ 3). Допустим, что гомоморфизм $B_p \otimes_R F_p \to A_p \otimes_R F_p$, где $p \in L$, есть мономорфизм. Для всякого $q \in L \setminus \{p\}$ имеем $A_q \otimes_R F_p = B_q \otimes_R F_p = 0$. Таким образом, при всех $q \in L$ гомоморфизм $B_q \otimes_R F_p \to A_q \otimes_R F_p$ является инъективным. Ввиду справедливости импликации 2) $\Rightarrow$ 1) мы получаем, что гомоморфизм $B \otimes_R F_p \to A \otimes_R F_p$ также инъективен.

Эквивалентность 4) и 5) очевидна ввиду того факта, что $\otimes_R$ и $\otimes_{R_p}$ для R_p-модулей совпадают.

Установим теперь равносильность условий 2) и 4). Зафиксируем $p \in L$; пусть $\lambda_p \colon B_p \otimes_R F \to A_p \otimes_R F$ и $\lambda'_p \colon B_p \otimes_R F_p \to A_p \otimes_R F_p$ — гомоморфизмы, индуцируемые вложением $B_p \to A_p$, а отображения $\alpha_p \colon A_p \otimes_R F_p \to A_p \otimes_R F$ и $\beta_p \colon B_p \otimes_R F_p \to B_p \otimes_R F$ суть гомоморфизмы, индуцированные вложением $F_p \to F$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_p \otimes_R F_p \arrow[r, "\beta_p"] \arrow[d, "\lambda'_p"'] & B_p \otimes_R F \arrow[d, "\lambda_p"] \\ 0 \arrow[r] & A_p \otimes_R F_p \arrow[r, "\alpha_p"] & A_p \otimes_R F \end{tikzcd}$$

В силу предложения 16.2 эта диаграмма имеет точные строки и, кроме того, выполняется $A_p \otimes_R F = (A_p \otimes_R F)e_p = (A_p \otimes_R F)_p = \operatorname{Im} \alpha_p$, а значит, α_p есть изоморфизм (аналогичное утверждение справедливо и для β_p). Отсюда ясно, что гомоморфизм λ_p будет инъективным в точности тогда, когда инъективен гомоморфизм λ'_p. ■

Теорема 16.7 по сути обобщает данное в [33] описание плоских модулей над кольцом псевдорациональных чисел, имеющим кохарактеристику

$$(k_p)_{p\in\mathbf{P}} = (\infty, \infty, \dots, \infty, \dots).$$

Теорема 16.7. *Для R-модуля F эквивалентны условия*:

1) *F — плоский R-модуль*;

2) *F_p является плоским R-модулем для всех $p \in L$*;

3) *F_p является плоским R_p-модулем для всех $p \in L$*;

4) *F_p является R_p-модулем без кручения для всех $p \in L$ со свойством $R_p = \mathbf{Q}_p^*$ и свободным R_p-модулем для всех $p \in L$ со свойством $R_p \neq \mathbf{Q}_p^*$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) получается из того факта, что каждый модуль F_p, где $p \in L$, служит прямым слагаемым R-модуля F.

2) $\Rightarrow$ 3). Допустим, что F_p — плоский R-модуль. Пусть A — какой-либо R_p-модуль, и пусть B есть его подмодуль. Гомоморфизм $B \otimes_R F_p \to A \otimes_R F_p$, индуцированный естественным вложением B в A, является мономорфизмом, а так как $\otimes_R$ совпадает с $\otimes_{R_p}$ для R_p-модулей, то получаем, что F_p является плоским R_p-модулем.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть A — какой-либо R-модуль, и пусть B — подмодуль в A. Из условия 3) видно, что отображение $B_p \otimes_{R_p} F_p \to A_p \otimes_{R_p} F_p$, индуцируемое естественным вложением $B_p \to A_p$, будет мономорфизмом для любого $p \in L$, а значит, в силу теоремы 16.6 индуцируемое вложением $B \to A$ отображение $B \otimes_R F \to A \otimes_R F$ также будет мономорфизмом. Следовательно, F является плоским R-модулем.

Эквивалентность условий 3) и 4) легко получается из предложения 5.9 и теоремы 3.13. ■

Теорема 16.8. *Для подмодуля B модуля A_R равносильны условия*:

1) *B есть чистый подмодуль модуля A_R*;

2) *$B \cap AJ = BJ$ для любого идеала J кольца R*;

3) *B есть $\cap$-чистый подмодуль модуля A_R;*

4) *B_p есть чистый подмодуль R_p-модуля A_p (при всех $p \in L$);*

5) *$B_p \cap A_p J = B_p J$ для любого идеала J кольца R_p;*

6) *B_p есть $\cap$-чистый подмодуль R_p-модуля A_p (при всех $p \in L$).*

Доказательство. Известно, что импликация 1) $\Rightarrow$ 2) имеет место для модулей над произвольным кольцом R (см. [73]).

2) $\Rightarrow$ 3). Полагая $J = Rr$ для произвольного элемента $r \in R$, получаем нужное равенство $B \cap Ar = Br$.

3) $\Rightarrow$ 6). Каждый элемент $x \in R_p$ является p-координатой подходящего элемента $r \in R$. В силу условия 3) имеем

$$B_p \cap A_p x = B_p \cap A_p r e_p \subset B \cap A r e_p = B r e_p = B_p r e_p = B_p x,$$

отсюда $B_p \cap A_p x = B_p x$ (включение $B_p x \subset B_p \cap A_p x$ очевидно).

Импликации 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6) доказываются так же, как 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3).

6) $\Rightarrow$ 4). Из условия 6) сразу вытекает, что B_p — сервантная подгруппа группы A_p для всякого $p \in L$. По теореме 3.16 получаем, что B_p есть чистый подмодуль R_p-модуля A_p (как в случае $R_p = \mathbf{Q}_p^*$, так и в случае $R_p \neq \mathbf{Q}_p^*$).

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть F — произвольный R-модуль. Из условия 4) видно, что для всякого $p \in L$ гомоморфизм $B_p \otimes_{R_p} F_p \to A_p \otimes_{R_p} F_p$ будет инъективным; применяя теорему 16.6, получаем, что гомоморфизм $B \otimes_R F \to A \otimes_R F$ тоже инъективен. Поэтому B — чистый подмодуль R-модуля A. ∎

§17. Радикалы в категории модулей над csp-кольцом

Как вытекает из §10, гомоморфизмы колец $R \to R_p$ дают возможность для каждого $p \in L_0$ считать mod-R_p полной подкатегорией категории mod-R (ввиду того, что рассматриваемые кольцевые гомоморфизмы сюръективны). Фактически mod-R_p — это класс всех R-модулей, аннулируемых подходящим идемпотентным идеалом кольца R (равным $R(1-e_p)$ при $p \in L$ и равным T при $p = 0$). Для $p \in L_0$ и радикального класса $\mathcal{R}$ категории mod-R полагаем $\mathcal{R}_p = \mathcal{R} \cap \text{mod-}R_p$.

Предложение 17.1. *Если $\mathcal{R}$ — радикальный класс в* mod-R, *то $\mathcal{R}_p$ — радикальный класс категории* mod-R_p *для всякого $p \in L_0$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что из замкнутости класса $\mathcal{R}$ относительно прямых сумм, расширений и гомоморфных образов получается замкнутость каждого из классов $\mathcal{R}_p$, где $p \in L_0$, относительно прямых сумм, расширений и гомоморфных образов. ■

Предложение 17.2. *Пусть $\mathcal{R}$ есть произвольный радикальный класс категории* mod-R *и* $A \in$ mod-R. *Следующие условия эквивалентны*:

1) $A \in \mathcal{R}$;

2) $A_p \in \mathcal{R}$ *для всех* $p \in L_0$;

3) $A_p \in \mathcal{R}_p$ *для всех* $p \in L_0$.

Доказательство. 1) ⇒ 2). Из леммы 16.1 ясно, что при любом $p \in L_0$ модуль A_p служит гомоморфным образом модуля A; отсюда следует нужная импликация.

2) ⇒ 1). Пусть $A_p \in \mathcal{R}$ при любом $p \in L_0$. Тогда ввиду (16.2) мы имеем соотношение $AT \in \mathcal{R}$. Из точности последовательности (16.1) и замкнутости класса $\mathcal{R}$ относительно расширений получаем $A \in \mathcal{R}$.

Эквивалентность условий 2) и 3) очевидна, так как для всякого $p \in L_0$ выполнено $A_p \in \text{mod-}R_p$ и $\mathcal{R}_p = \mathcal{R} \cap \text{mod-}R_p$. ■

В следующей лемме собрано несколько простых фактов.

Лемма 17.3. *Пусть* $S = \mathbf{Q}_p^*$ *и* $\rho \in \mathcal{IR}(S)$. *Тогда*:

(а) *если* $S \in \mathcal{R}(\rho)$, *то* $\mathcal{R}(\rho) = \text{mod-}S$;

(б) *если* $\mathcal{A}_p \in \mathcal{R}(\rho)$, *то* $\mathcal{R}(\rho)$ *содержит все делимые* S*-модули*;

(в) *если* $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho)$, *то* $\mathcal{R}(\rho)$ *содержит все периодические* S*-модули*;

(г) *если* $\mathbf{Z}(p^\infty) \in \mathcal{R}(\rho)$, *то* $\mathcal{R}(\rho)$ *содержит все делимые периодические* S*-модули*;

(д) *если* $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}(\rho)$, *то* $\mathcal{R}(\rho)$ *содержит лишь делимые* S*-модули*;

(е) *если* $\mathcal{A}_p \notin \mathcal{R}(\rho)$, *то* $\mathcal{R}(\rho)$ *содержит лишь периодические* S*-модули.*

Доказательство. Утверждение (а) следует из того факта, что всякий S-модуль служит гомоморфным образом прямой суммы копий модуля S.

(б) Достаточно заметить, что каждый делимый S-модуль представляет собой прямую сумму копий $\mathbf{Z}(p^\infty)$ и $\mathcal{A}_p$ [16] и что $\mathcal{A}_p$ имеет $\mathbf{Z}(p^\infty)$ в качестве гомоморфного образа.

(в) Пусть B есть какой-нибудь собственный подмодуль периодического S-модуля A, тогда A/B — ненулевой периодический модуль. Из $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho)$ и неравенства $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z}(p), A/B) \neq 0$ следует $\rho(A/B) \neq 0$. Это значит, что для всякого периодического S-модуля A выполнено $\rho(A) = A$, т. е. $A \in \mathcal{R}(\rho)$.

(г) Достаточно заметить, что всякий делимый периодический S-модуль является прямой суммой копий модуля $\mathbf{Z}(p^\infty)$ [16].

(д) Если модуль A не является делимым, то модуль A/pA отличен от 0 и имеет прямое слагаемое, которое изоморфно $\mathbf{Z}(p)$. Поэтому из $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}(\rho)$ следует $A \notin \mathcal{R}(\rho)$.

(е) Пусть A_S — непериодический модуль со свойством $A \in \mathcal{R}(\rho)$. Тогда $A/\,\mathbf{t}(A) \in \mathcal{R}(\rho)$ есть ненулевой модуль без кручения, а его делимая оболочка будет представлять собой прямую сумму некоторого числа копий модуля $\mathcal{A}_p$; следовательно, $\mathrm{Hom}(A/\,\mathbf{t}(A), \mathcal{A}_p) \neq 0$. Отсюда получаем, что $\rho(\mathcal{A}_p)$ является ненулевым подмодулем модуля $\mathcal{A}_p$. Если $\mathcal{A}_p \notin \mathcal{R}(\rho)$, то $\rho(\mathcal{A}_p) \neq \mathcal{A}_p$, а значит, модуль $\rho(\mathcal{A}_p)$ изоморфен S. Поэтому ввиду пункта (a) имеем $\mathcal{R}(\rho) = \text{mod-}S$, что невозможно. ■

Предложение 17.4. *Если выполнено $S = \mathbf{Q}_p^*$, то в категории* mod-S *существует ровно шесть радикальных классов*:

$\mathcal{R}^n = \{0\}$;

$\mathcal{R}^m$ — *класс всех делимых периодических S-модулей*;

$\mathcal{R}^l$ — *класс всех периодических S-модулей*;

$\mathcal{R}^\lambda$ — *класс всех делимых S-модулей*;

$\mathcal{R}^\mu = \{A_S \mid A/\,\mathbf{t}(A)$ — *делимый S-модуль*$\}$;

$\mathcal{R}^\nu$ — *класс всех S-модулей.*

Каждый из этих классов имеет вид $^{\otimes}\{F\}$ для подходящего S-модуля F.

Доказательство. Ясно, что для модулей $F^n = S$ и $F^\nu = 0$ выполнено $^{\otimes}\{F^n\} = \mathcal{R}^n$ и $^{\otimes}\{F^\nu\} = \mathcal{R}^\nu$. Далее, из леммы 16.4 непосредственно вытекает следующее:

если $F^\mu = \mathbf{Z}(p^\infty)$, то $^{\otimes}\{F^\mu\} = \mathcal{R}^\mu$;

если $F^\lambda = \mathbf{Z}(p)$, то $^{\otimes}\{F^\lambda\} = \mathcal{R}^\lambda$;

если $F^l = \mathcal{A}_p$, то $^{\otimes}\{F^l\} = \mathcal{R}^l$;

если $F^m = \mathcal{A}_p \oplus \mathbf{Z}(p)$, то $^{\otimes}\{F^m\} = {}^{\otimes}\{F^\lambda\} \cap {}^{\otimes}\{F^l\} = \mathcal{R}^m$.

Таким образом, каждый из шести указанных классов модулей действительно представи́м в виде $^{\otimes}\{F\}$ и, в частности, является радикальным классом.

Обратно, пусть задан радикальный класс $\mathcal{R}$ категории mod-S. Сначала мы предположим, что $\mathcal{R} \not\subset \mathcal{R}^\mu$; тогда существует модуль $A \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}^\mu$. В этом случае входящий в класс $\mathcal{R}$ модуль без кручения $A/\,\mathbf{t}(A)$ не будет делимым. Так как S является полной областью дискретного нормирования, то $A/\,\mathbf{t}(A)$ содержит прямое слагаемое, изоморфное модулю S (см. [16]). Отсюда $S \in \mathcal{R}$ и $\mathcal{R} = \text{mod-}S = \mathcal{R}^\nu$.

Допустим теперь, что имеет место включение $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^\mu$. Мы рассмотрим четыре возможных случая.

Пусть $\mathcal{A}_p \in \mathcal{R}$ и $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}$. Тогда из леммы 17.3 вытекает, что для всех $A \in \mathcal{R}^\mu$ модули $A/\,\mathbf{t}(A)$ и $\mathbf{t}(A)$ принадлежат $\mathcal{R}$, а значит, $A \in \mathcal{R}$. Тем самым мы доказали, что $\mathcal{R} = \mathcal{R}^\mu$.

Если $\mathcal{A}_p \in \mathcal{R}$ и $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}$, то из утверждений (б) и (д) леммы 17.3 ясно, что $\mathcal{R} = \mathcal{R}^\lambda$.

Если выполняются условия $\mathcal{A}_p \notin \mathcal{R}$ и $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}$, то из утверждений (в) и (е) леммы 17.3 получаем $\mathcal{R} = \mathcal{R}^l$.

Наконец, пусть $\mathcal{A}_p \notin \mathcal{R}$ и $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}$. Тогда из леммы 17.3 вытекает, что $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^\lambda \cap \mathcal{R}^l = \mathcal{R}^m$. Если в классе $\mathcal{R}$ есть хотя бы один ненулевой модуль A, то $\mathbf{Z}(p^\infty) \in \mathcal{R}$, так как A имеет прямое слагаемое, которое изоморфно $\mathbf{Z}(p^\infty)$. Отсюда следует $\mathcal{R}^m \subset \mathcal{R}$, а значит, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^m$. ■

Предложение 17.5. *Если S совпадает с каким-нибудь из колец вида $\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ либо является полем, то в категории* mod-S *существует ровно два радикальных класса*: $\mathcal{R}^n = \{0\}$ *и* $\mathcal{R}^\nu =$ mod-S. *Оба эти класса представимы в виде* ${}^{\otimes}\{F\}$, *где F — подходящий S-модуль.*

Доказательство. Первое утверждение сразу вытекает из того факта, что S — коммутативное локальное совершенное кольцо [48]. Ясно также, что для модулей $F^n = S$ и $F^\nu = 0$ выполнено ${}^{\otimes}\{F^n\} = \mathcal{R}^n$ и ${}^{\otimes}\{F^\nu\} = \mathcal{R}^\nu$. ■

Убедимся, что в общем случае аналог предложения 8.2 не имеет места, т. е. из того, что W_F — кручение, не следует, что n_F является кручением.

Пример 17.6. Пусть $S = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, где $k > 1$, и $F = \mathbf{Z}(p)$. В этом случае в силу предыдущего предложения из условия $S \notin {}^{\otimes}\{F\}$ следует ${}^{\otimes}\{F\} = \{0\}$, поэтому $\mathrm{W}_F = 0$. С другой стороны, $pS \subset \mathrm{n}_F(S)$; таким образом, радикал n_F не совпадает с W_F и, значит, не является кручением.

Предложение 17.7. *Пусть $\mathcal{R}$ и $\mathcal{R}'$ — некоторые радикальные классы категории* mod-R. *Справедливы следующие утверждения*:

(а) *$\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$ в точности тогда, когда $\mathcal{R}_p \subset \mathcal{R}'_p$ для всех $p \in L_0$*;

(б) $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ *в точности тогда, когда* $\mathcal{R}_p = \mathcal{R}'_p$ *для всех* $p \in L_0$.

Доказательство. (а) Если $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$, то, очевидно, $\mathcal{R}_p \subset \mathcal{R}'_p$ при всех p. Обратно, пусть $\mathcal{R}_p \subset \mathcal{R}'_p$ для каждого $p \in L_0$, и пусть $A \in \text{mod-}R$. Поскольку $A_p \in \text{mod-}R_p$ при всех $p \in L_0$, то ввиду предложения 17.2 имеем импликации

$$A \in \mathcal{R} \Longrightarrow A_p \in \mathcal{R} \text{ при всех } p \in L_0 \Longrightarrow A_p \in \mathcal{R}_p \text{ при всех } p \in L_0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A_p \in \mathcal{R}'_p \text{ при всех } p \in L_0 \Longrightarrow A_p \in \mathcal{R}' \text{ при всех } p \in L_0 \Longrightarrow A \in \mathcal{R}';$$

отсюда $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$.

Утверждение (б) немедленно следует из (а). ■

Предложение 17.8. *Если* F *есть некоторый* R*-модуль и* $\mathcal{R} = {}^{\otimes}\{F\}$, *то для всех* $p \in L_0$ *выполнено*

$$\mathcal{R} \cap \text{mod-}R_p = \{A \in \text{mod-}R_p \mid A \otimes_{R_p} F_p = 0\}.$$

Доказательство. Если A есть произвольный R_p-модуль, то из $A_p \cong A$ и предложения 16.2 следует изоморфизм $A \otimes_R F \cong A \otimes_R F_p$. Таким образом, для всякого $p \in L_0$ и всякого R_p-модуля A имеем эквивалентности

$$A \in {}^{\otimes}\{F\} \iff A \otimes_R F = 0 \iff A \otimes_R F_p = 0 \iff A \otimes_{R_p} F_p = 0.$$

Отсюда ${}^{\otimes}\{F\} \cap \text{mod-}R_p = \{A \in \text{mod-}R_p \mid A \otimes_{R_p} F_p = 0\}$. ■

Напомним, что (как ясно из предложений 2.6 и 2.10) большая решётка всех радикальных классов категории mod-S, где S — некоторое кольцо, изоморфна большой решётке $\mathcal{IR}(S)$. Из предложения 17.4 следует, что $\mathcal{IR}(\mathbf{Q}_p^*)$ представляет собой обычную решётку (которая изоморфна шестиэлементной решётке $\mathcal{K} = \{l, m, n, \lambda, \mu, \nu\}$, введённой на странице 65). Если же выполнено $S = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ или S является полем, то по предложению 17.5 мы получаем, что $\mathcal{IR}(S)$ есть обычная решётка, изоморфная двухэлементной цепи $\{n, \nu\} \subset \mathcal{K}$. Для всякого $p \in L_0$ положим

$$\mathcal{H}_p = \begin{cases} \mathcal{K}, & \text{если } R_p = \mathbf{Q}_p^*, \\ \{n, \nu\}, & \text{если } p = 0 \text{ или } R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}, \text{ где } k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Теорема 17.9. (а) *Большая решётка* $\mathcal{IR}(R)$ *изоморфна решётке*

$$\mathcal{J}_\chi = \prod_{p \in L_0} \mathcal{H}_p$$

(*и, следовательно, является полной дистрибутивной решёткой*).

(б) *Все радикалы из* $\mathcal{IR}(R)$ *суть* $\otimes$*-радикалы, т. е.* $\mathcal{L}(R) = \mathcal{IR}(R)$.

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{J}_\chi$ есть полная дистрибутивная решётка, так как все $\mathcal{H}_p$ суть полные дистрибутивные решётки. По предложению 17.7 радикальный класс $\mathcal{R} \subset \text{mod-}R$ однозначно определяется соответствующими ему классами R_p-модулей $\mathcal{R}_p$, причём сопоставление $\mathcal{R} \rightsquigarrow (\mathcal{R}_p)_{p \in L_0}$ сохраняет отношение естественного порядка. Кроме того, ранее было показано, что для всякого $p \in L_0$ решётка $\mathcal{H}_p$ изоморфна (обычной) решётке $\mathcal{IR}(R_p)$.

Нам остаётся проверить, что для каждого набора $(\mathcal{R}_p)_{p \in L_0}$, где $\mathcal{R}_p$ суть некоторые радикальные классы категорий $\text{mod-}R_p$, существует радикальный класс $\mathcal{R} = {}^{\otimes}\{G\}$ категории $\text{mod-}R$ такой, что при любом $p \in L_0$ выполняется $\mathcal{R} \cap \text{mod-}R_p = \mathcal{R}_p$. По предложениям 17.4 и 17.5 имеем $\mathcal{R}_p = {}^{\otimes}\{F_p\}$, где F_p — подходящие R_p-модули. Учитывая предложение 17.8, тогда достаточно найти R-модуль G такой, что $G/GT \cong F_0$ и для любого $p \in L$ выполнено $Ge_p \cong F_p$. Этим условиям удовлетворяет, например, модуль $G = F$, где

$$F = \bigoplus_{p \in L_0} F_p. \tag{17.1}$$

Теорема доказана. ■

Следующий результат служит аналогом предложения 2.14.

Теорема 17.10. *Пусть* $\rho \in \mathcal{IR}(S)$, *где* $S = R_p$ (*для какого-то* $p \in L_0$) *или* $S = R$. *Тогда для всякого* $A \in \text{mod-}S$ *подмодуль* $\rho(A)$ *чист в* A.

Доказательство. Если S является полем либо имеет место равенство $S = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$, то наше утверждение справедливо, так как по предложению 17.5 для всякого модуля A_S подмодуль $\rho(A)$ совпадает с 0 или с A.

Пусть теперь $S = \mathbf{Q}_p^*$. Если $\mathbf{Z}(p) \notin \mathcal{R}(\rho)$, то по лемме 17.3 модуль $\rho(A)$ является делимым, поэтому для всех $k \in \mathbf{N}$ выполнено $\rho(A) \cap p^k A = p^k \rho(A)$. Если $\mathbf{Z}(p) \in \mathcal{R}(\rho)$, то ввиду той же леммы $\mathcal{R}(\rho)$ содержит все периодические модули; тогда из $\rho(A/\rho(A)) = 0$ следует, что $A/\rho(A)$ — модуль без кручения. Следовательно, при любом $a \in A$ соотношение $p^k(a + \rho(A)) = 0$ равносильно соотношению $a \in \rho(A)$, т. е. и в этом случае выполнено $\rho(A) \cap p^k A = p^k \rho(A)$. Итак, $\rho(A)$ — чистый подмодуль S-модуля A.

Наконец, пусть $S = R$. Для $p \in L$ из предложения 2.2 в силу равенства $A = A_p \oplus A(1 - e_p)$ следует, что справедливо соотношение

$$\rho(A) = \rho(A_p) \oplus \rho(A(1 - e_p)), \tag{17.2}$$

отсюда $\rho(A)e_p = \rho(A_p)$. По предложению 17.1 класс $\mathcal{R}(\rho) \cap \text{mod-}R_p$ является радикальным в mod-R_p, т. е. $\mathcal{R}(\rho) \cap \text{mod-}R_p = \mathcal{R}(\rho_p)$ для какого-то радикала $\rho_p \in \mathcal{IR}(R_p)$. Всякий подмодуль R-модуля A_p лежит в mod-R_p; поэтому наибольший принадлежащий $\mathcal{R}(\rho_p)$ подмодуль R_p-модуля A_p будет наибольшим из R-подмодулей модуля A_p, входящих в класс $\mathcal{R}(\rho)$, т. е. $\rho(A_p) = \rho_p(A_p)$ при всех $p \in L$. Как мы уже знаем, $\rho_p(A_p)$ есть чистый подмодуль R_p-модуля A_p. Таким образом, для произвольного $p \in L$ подмодуль $\rho(A)e_p$ является чистым подмодулем R_p-модуля A_p. Применяя теорему 16.8, получаем, что подмодуль $\rho(A) \subset A$ тоже будет чистым. ∎

Пусть $\Gamma\colon \mathcal{IR}(R) \to \mathcal{J}_\chi$ есть изоморфизм, существование которого было доказано в теореме 17.9. Выясним, в каких случаях идемпотентный радикал категории mod-R является кручением.

Предложение 17.11. *Пусть* $\mathcal{R}$ *есть какой-нибудь радикальный класс категории* mod-R. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *класс* $\mathcal{R}$ *замкнут относительно подмодулей*;

2) *для произвольного* $p \in L$ *класс* $\mathcal{R}_p$ *будет замкнутым относительно подмодулей.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) сразу получается из равенства $\mathcal{R}_p = \mathcal{R} \cap \text{mod-}R_p$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\mathcal{R}_p$ замкнут относительно подмодулей при любом $p \in L$. Предположим, что B есть подмодуль R-модуля $A \in \mathcal{R}$. Из предложения 17.2 вытекает, что $A_p \in \mathcal{R}_p$ при всех $p \in L_0$. Для любого $p \in L$ мы имеем $B_p \subset A_p$ и, следовательно, $B_p \in \mathcal{R}_p$.

Напомним, что $B \cap AT = BT$, а значит, R_0-модуль $B_0 = B/BT$ можно вложить в модуль $A_0 = A/AT$. В силу предложения 17.5 радикальный класс $\mathcal{R}_0 \subset \text{mod-}R_0$ замкнут относительно взятия подмодулей, поэтому из $A_0 \in \mathcal{R}_0$ следует, что $B_0 \in \mathcal{R}_0$. Применяя предложение 17.2 к модулям B_p, где $p \in L_0$, получаем $B \in \mathcal{R}$. Итак, класс $\mathcal{R}$ замкнут относительно подмодулей. ■

Теорема 17.12. *Радикал $\rho \in \mathcal{IR}(R)$ является кручением в точности тогда, когда $\big[\Gamma(\rho)\big](L) \subset \{n, l, \nu\}$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 17.9 любой идемпотентный радикал $\rho \in \mathcal{IR}(R)$ совпадает с каким-то из радикалов W_F, причём модуль F_R может быть выбран в виде (17.1), где каждое слагаемое F_p есть один из R_p-модулей F^n, F^m, F^l, F^λ, F^μ и F^ν. Из предложений 17.8 и 17.11 вытекает, что ρ будет кручением в точности в том случае, когда классы ${}^{\otimes}\{F_p\} \subset \text{mod-}R_p$ являются замкнутыми относительно взятия подмодулей для всех $p \in L$.

Если $\big[\Gamma(\rho)\big](L) \subset \{n, l, \nu\}$, то R_p-модуль F_p при любом $p \in L$ совпадает или с модулем $F^n = R_p$, или с $F^l = \mathcal{A}_p$, или с $F^\nu = 0$. С учётом теоремы 3.13 мы получаем, что для каждого $p \in L$ модуль $F_p \in \text{mod-}R_p$ является плоским и, значит, класс ${}^{\otimes}\{F_p\}$ замкнут относительно подмодулей (предложение 6.5). Следовательно, радикал $\rho = \mathrm{W}_F$ будет кручением.

Пусть теперь для какого-либо $p \in L$ выполняется $\big[\Gamma(\rho)\big](p) \in \{m, \lambda, \mu\}$; тогда имеем $R_p = \mathbf{Q}_p^*$, а R_p-модуль F_p совпадёт с $\mathcal{A}_p \oplus \mathbf{Z}(p)$, $\mathbf{Z}(p)$ или $\mathbf{Z}(p^\infty)$. В первых двух случаях, очевидно, справедливы соотношения $\mathbf{Z}(p^\infty) \in {}^{\otimes}\{F_p\}$ и $\mathbf{Z}(p) \notin {}^{\otimes}\{F_p\}$, в третьем случае — $\mathcal{A}_p \in {}^{\otimes}\{F_p\}$ и $\mathbf{Q}_p^* \notin {}^{\otimes}\{F_p\}$. Значит, класс модулей ${}^{\otimes}\{F_p\} \subset \text{mod-}R_p$ не замкнут относительно подмодулей, т. е. радикал $\rho = \mathrm{W}_F$ не будет кручением. Теорема доказана. ■

Выясним, когда радикал из $\mathcal{IR}(R)$ является кокручением.

Лемма 17.13. *Идеал $J \subset R$ идемпотентен в точности тогда, когда*

$$J = \bigoplus_{p \in X} R_p, \tag{17.3}$$

где $X \subset L$, или $J = R(1-\varepsilon)$, где ε есть идемпотент конечного типа.

Доказательство. Если J — некоторый идеал кольца R, то при любом $p \in L$ идеал J_p будет выделяться в J прямым слагаемым. Поэтому для идемпотентного идеала J и $p \in L$ идеал J_p кольца R_p тоже будет идемпотентным, т. е. совпадёт с 0 либо с R_p. Если при этом J есть идеал вида (15.1), то сразу получаем, что для некоторого $X \subset L$ выполнено (17.3).

Пусть теперь идемпотентный идеал J имеет вид (15.2). Для множества $Y = \{p \in X \mid J_p = R_p\}$ при каждом $p \in X \setminus Y$ справедливо равенство $J_p = 0$. Полагая $\varepsilon = e_{X \setminus Y}$, получаем

$$R(1-\varepsilon) = R(1-e_X) \oplus R(e_X - \varepsilon) = R(1-e_X) \oplus \Bigl(\bigoplus_{p \in Y} Re_p\Bigr) =$$
$$= R(1-e_X) \oplus \Bigl(\bigoplus_{p \in Y} J_p\Bigr) = R(1-e_X) \oplus \Bigl(\bigoplus_{p \in X} J_p\Bigr) = J.$$

Остаётся заметить, что всякий идеал вида (17.3) или вида $R(1-\varepsilon)$ является идемпотентным. ■

Теорема 17.14. *Для радикала $\rho \in \mathcal{IR}(R)$ эквивалентны условия:*

1) *ρ — кокручение;*

2) *$\bigl[\Gamma(\rho)\bigr](L) \subset \{n, \nu\}$, причём если выполнено $\bigl[\Gamma(\rho)\bigr](0) = \nu$, то почти для всех $p \in L$ справедливо равенство $\bigl[\Gamma(\rho)\bigr](p) = \nu$.*

Доказательство. Ввиду предложения 2.11 достаточно найти $\Gamma(\rho)$ для всех радикалов ρ, задаваемых равенством $\rho(A) = AJ$, где J — произвольный идемпотентный идеал кольца R. Если J имеет вид (17.3), то легко заметить, что при любом $A \in \text{mod-}R$ выполнено

$$\rho(A) = \bigoplus_{p\in X} AR_p = \bigoplus_{p\in X} ARe_p = \bigoplus_{p\in X} Ae_p = \bigoplus_{p\in X} A_p.$$

Если $q \in L_0 \setminus X$, то для каждого $A \in \text{mod-}R_q$ имеем $A_p \cong (A_q)_p = 0$ при всех $p \in X$ и поэтому выполнено $\rho(A) = 0$. Таким образом, $\mathcal{R}(\rho) \cap \text{mod-}R_q = \{0\}$, т. е. $\big[\Gamma(\rho)\big](q) = n$. Если $p \in X$, то при любом $A \in \text{mod-}R_p$ будет справедливо соотношение $A_p = A$, а значит, $\rho(A) = A$. Поэтому $\mathcal{R}(\rho) \cap \text{mod-}R_p = \text{mod-}R_p$, отсюда $\big[\Gamma(\rho)\big](p) = \nu$.

Пусть теперь $J = R(1-\varepsilon)$, где ε — идемпотент конечного типа. В этом случае при любом $A \in \text{mod-}R$ справедливы равенства $\rho(A) = AJ = A(1-\varepsilon)$. Если $p \in L \setminus \operatorname{supp}\varepsilon$ и имеет место включение $A \in \text{mod-}R_p$, то

$$A = Ae_p = A(e_p - e_p\varepsilon) = Ae_p(1-\varepsilon) = A(1-\varepsilon) = \rho(A).$$

Далее, если выполнено $A \in \text{mod-}R_0$, то $A\varepsilon \subset AT = 0$ и $\rho(A) = A(1-\varepsilon) = A$. Поэтому для произвольного $p \in L_0 \setminus \operatorname{supp}\varepsilon$ имеем $\mathcal{R}(\rho) \cap \text{mod-}R_p = \text{mod-}R_p$, что эквивалентно равенству $\big[\Gamma(\rho)\big](p) = \nu$.

Если же $p \in \operatorname{supp}\varepsilon$ и $A \in \text{mod-}R_p$, то

$$\rho(A) = A(1-\varepsilon) = Ae_p(1-\varepsilon) = A(e_p - e_p) = 0,$$

а значит, для всех $p \in \operatorname{supp}\varepsilon$ имеем $\mathcal{R}(\rho) \cap \text{mod-}R_p = \{0\}$, т. е. $\big[\Gamma(\rho)\big](p) = n$. Теорема доказана. ■

Следствие 17.15. *В категории модулей над каждым* csp-*кольцом все кокручения являются кручениями.*

В работе [8] для модуля A над кольцом псевдоалгебраических чисел R чистыми названы подмодули $B \subset A$ такие, что $B \cap Ar = Br$ для всех $r \in R$, не являющихся делителями нуля. Распространим это определение на случай модулей над произвольным csp-кольцом R.

Определение 17.16. Подмодуль B модуля A_R называется *Z-чистым*, если для всех элементов r кольца R, не являющихся делителями нуля, имеет место равенство $B \cap Ar = Br$.

По теореме 16.8 в категории mod-R всякий чистый подмодуль является $\cap$-чистым и, следовательно, Z-чистым.

Предложение 17.17. *Пусть B — какой-либо подмодуль R-модуля A. Следующие условия эквивалентны:*

1) *B является Z-чистым подмодулем модуля A;*

2) *для всех $p \in L$ со свойством $R_p = \mathbf{Q}_p^*$ модуль B_p является чистым подмодулем p-адического модуля A_p.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Допустим, что B есть Z-чистый подмодуль модуля A, и зафиксируем $p \in L$, для которого $R_p = \mathbf{Q}_p^*$. Пусть $b \in B_p \cap p^k A_p$, тогда $b = p^k a$, где $a \in A_p$. Так как аддитивная группа кольца R не содержит элементов порядка p, то элемент $p^k \in R$ не является делителем нуля. В этом случае выполняется $b \in B \cap p^k A = p^k B$, отсюда $b = p^k c$ для какого-то $c \in B$. Поэтому $b = be_p = p^k(ce_p) \in p^k Be_p = p^k B_p$. Таким образом, $B_p \cap p^k A_p = p^k B_p$ (включение $p^k B_p \subset B_p \cap p^k A_p$ очевидно). В силу теоремы 3.16 отсюда можно сделать вывод, что B_p — чистый подмодуль p-адического модуля A_p.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $b \in B \cap Ar$ и элемент $r \in R$ не является делителем нуля (тогда, в частности, $r \notin T$). Имеем $b = ar$ для какого-то $a \in A$. Соотношение $Rr \not\subset T$ позволяет заключить, что Rr есть идеал вида (15.2); таким образом, мы можем записать $1 - e_X \in Rr$, где X — некоторое конечное подмножество множества L. Итак, существует $d \in R$ со свойством $1 - e_X = dr$.

Зафиксируем число $p \in X$. Элемент $be_p = ae_p re_p$ принадлежит модулю $Be_p \cap Ae_p re_p = B_p \cap A_p(re_p)$. Если $R_p = \mathbf{Q}_p^*$, то по условию B_p будет чистым, а значит, и $\cap$-чистым подмодулем p-адического модуля A_p; если же $R_p \neq \mathbf{Q}_p^*$, то элемент re_p обратим в кольце R_p (иначе элемент r оказался бы делителем нуля в кольце R). В обоих случаях $B_p \cap A_p(re_p) = B_p(re_p) = B_p r$.

Итак, для любого $p \in X$ найдётся элемент $c_p \in B_p$ такой, что $be_p = c_p r$. Для элемента $b' = bd + \sum\limits_{p \in X} c_p \in B$ имеем

$$b'r = bdr + \sum_{p \in X} c_p r = b(1 - e_X) + \sum_{p \in X} be_p = b(1 - e_X) + be_X = b,$$

отсюда $b \in Br$. Итак, $B \cap Ar = Br$ (включение $Br \subset B \cap Ar$ очевидно). ■

Из теоремы 16.8 и предложения 17.17 следует существование Z-чистых подмодулей, не являющихся чистыми (для этого csp-кольцо R должно иметь кохарактеристику, хотя бы один символ которой не принадлежит множеству $\{0, 1, \infty\}$).

Следующий результат в какой-то мере аналогичен лемме 8.3.

Теорема 17.18. *Все радикальные классы категории* mod-R *замкнуты относительно* Z*-чистых* (*а значит, и относительно чистых*) *подмодулей.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{R}$ есть радикальный класс категории mod-R. В силу теоремы 17.9 можем записать $\mathcal{R} = {}^{\otimes}\{F\}$ для некоторого R-модуля F. Зафиксируем R-модуль $A \in \mathcal{R}$ и его Z-чистый подмодуль B. По теореме 16.3 имеем $A_p \otimes_{R_p} F_p = 0$ при всех $p \in L_0$.

Предположим сначала, что выполнено $p = 0$ или $R_p = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$. Как уже было отмечено, R_p-модуль B_p вкладывается в A_p. Из предложения 17.5 ясно, что радикальный класс ${}^{\otimes}\{F_p\} \subset$ mod-R_p будет замкнут относительно взятия подмодулей, поэтому из $A_p \otimes_{R_p} F_p = 0$ получаем $B_p \otimes_{R_p} F_p = 0$.

Допустим теперь, что $R_p = \mathbf{Q}_p^*$; тогда B_p является чистым подмодулем p-адического модуля A_p. Поэтому из равенства $A_p \otimes_{R_p} F_p = 0$ снова вытекает $B_p \otimes_{R_p} F_p = 0$. Итак, для любого $p \in L_0$ выполнено $B_p \otimes_{R_p} F_p = 0$. Применяя теорему 16.3, получаем $B \otimes_R F = 0$, т. е. $B \in {}^{\otimes}\{F\} = \mathcal{R}$. ■

Так как в категориях mod-R_p и mod-R всякий идемпотентный радикал $\otimes$-порождается каким-либо модулем, аналог теоремы 9.8 для этих категорий выглядит следующим образом:

Теорема 17.19. *Если $\mathcal{S} \neq \varnothing$ — некоторое семейство идемпотентных радикалов категории* mod-S, *где* $S = R_p$ *(для какого-то* $p \in L_0$*) либо* $S = R$, *то для всякого* S*-модуля* A *справедливо равенство* (9.2).

Доказательство. Введём обозначения

$$\sigma = \bigwedge_{\rho \in \mathcal{S}} \rho, \qquad B = \bigcap_{\rho \in \mathcal{S}} \rho(A).$$

Сначала допустим, что $S = \mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z}$ или S есть поле. Ввиду предложения 17.5 семейство $\mathcal{S}$ содержит наименьший элемент; ясно, что этот элемент совпадёт с радикалом σ. Тогда и левая, и правая части в (9.2) равны $\sigma(A)$.

Пусть теперь $S = \mathbf{Q}_p^*$. Символами ρ^n, ρ^m, ρ^l, ρ^λ, ρ^μ и ρ^ν мы обозначаем идемпотентные радикалы категории mod-$\mathbf{Q}_p^*$, соответствующие радикальным классам из предложения 17.4. Если в семействе $\mathcal{S}$ есть наименьший элемент, то равенство (9.2) проверяется так же, как и в предыдущем случае. Если в $\mathcal{S}$ нет наименьшего элемента, то $\{\rho^l, \rho^\lambda\} \subset \mathcal{S} \subset \{\rho^l, \rho^\lambda, \rho^\mu, \rho^\nu\}$, откуда вытекает $\sigma = \rho^l \wedge \rho^\lambda = \rho^m$ и $B = \rho^l(A) \cap \rho^\lambda(A) = \mathbf{t}(A) \cap \mathbf{d}(A)$. Ясно, что подмодуль B содержит наибольший делимый периодический подмодуль $\rho^m(A)$ модуля A_S. С другой стороны, ввиду леммы 9.1 имеем $B = \mathbf{d}(\mathbf{t}(A))$, т. е. B есть делимый периодический модуль. Следовательно, $\sigma(A) = \rho^m(A) = B$.

Пусть $S = R$. Зафиксируем произвольное $p \in L$ со свойством $R_p = \mathbf{Q}_p^*$. Как и в доказательстве теоремы 17.10, для любого $\rho \in \mathcal{S}$ выполняется (17.2). Из включений $\rho(A_p) \subset A_p$ и $\rho(A(1-e_p)) \subset A(1-e_p)$ следует равенство

$$B_p = \bigcap_{\rho \in \mathcal{S}} \rho(A_p). \tag{17.4}$$

Для $\rho \in \mathcal{S}$ символом ρ_p будем обозначать идемпотентный радикал категории mod-R_p такой, что выполнено $\mathcal{R}(\rho_p) = \mathcal{R}(\rho) \cap \text{mod-}R_p$. Тогда $\rho(A_p) = \rho_p(A_p)$ для произвольного $\rho \in \mathcal{S}$ (см. доказательство теоремы 17.10). Учитывая уже рассмотренный случай $S = \mathbf{Q}_p^*$ и соотношение (17.4), мы имеем $B_p = \sigma_p(A_p)$, где $\sigma_p \in \mathcal{IR}(R_p)$ — точная нижняя грань семейства $\{\rho_p \mid \rho \in \mathcal{S}\}$. Это значит, что B_p есть чистый подмодуль p-адического модуля A_p ввиду теоремы 17.10. Применяя теперь предложение 17.17, получаем, что подмодуль B модуля A_R является Z-чистым.

Отсюда видим, что B есть Z-чистый подмодуль R-модуля $\rho(A) \in \mathcal{R}(\rho)$ для всякого $\rho \in \mathcal{S}$. Из замкнутости радикальных классов $\mathcal{R}(\rho)$ относительно Z-чистых подмодулей следует, что $B \in \mathcal{R}(\rho)$ для всех $\rho \in \mathcal{S}$. Учитывая (2.2), получаем $B \subset \sigma(A)$. Обратное включение вытекает из того, что $\sigma(A) \subset \rho(A)$ при любом $\rho \in \mathcal{S}$. Итак, $\sigma(A) = B$, что завершает доказательство. ■

Следствие 17.20. *Если* $\rho, \sigma \in \mathcal{IR}(R)$, *то*

$$[\rho \wedge \sigma](A) = \rho(\sigma(A)) = \sigma(\rho(A)) = \rho(A) \cap \sigma(A)$$

для всех R*-модулей* A *(в частности, любые два радикала категории* mod-R *коммутируют между собой).*

Доказательство. В силу доказанной теоремы выполняется равенство $[\rho \wedge \sigma](A) = \rho(A) \cap \sigma(A)$. Очевидно, что $[\rho \wedge \sigma](A) \subset \rho(\sigma(A)) \subset \rho(A) \cap \sigma(A)$, поэтому $\rho(\sigma(A)) = \rho(A) \cap \sigma(A)$. Равенство $\sigma(\rho(A)) = \rho(A) \cap \sigma(A)$ выполнено по соображениям симметрии. ■

Заключение

В диссертации полностью описано строение решётки всех $\otimes$-радикалов категории абелевых групп и строение решётки, состоящей из идемпотентных радикалов категории модулей над произвольным csp-кольцом; помимо этого, найдены некоторые решёточные свойства таких радикалов. Показано, каким образом можно аппроксимировать заданный порождённый (копорождённый) S-модулем радикал с помощью радикала, порождённого (или соответственно копорождённого) S-S-бимодулем, и описываются все кольца S со свойством, что аппроксимирующий радикал всегда совпадёт с исходным; установленные результаты могут быть применены к изучению $\mathrm{E}(e)$-модулей и $\mathrm{T}(e)$-модулей.

Получен ряд важных теорем, позволяющих представить заданное поле как базовое поле подходящего csp-кольца (что, в свою очередь, даёт возможность реализовать это поле как кольцо эндоморфизмов в категории Уокера и как $\mathbf{Q}$-алгебру квазиэндоморфизмов sp-группы с циклическими примарными компонентами). Для этого в рамках направления «теоретико-множественные методы в алгебре» автором был создан новый раздел, который связан с применением кардинальных характеристик континуума для исследования полей, колец и многочленов. Даётся также полное описание плоских и (при помощи разработанных автором методов, которые основаны на рассмотрении матриц и определителей над каким-либо csp-кольцом) полное описание проективных модулей над csp-кольцом. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании важных классов смешанных групп (в частности, факторно делимых групп и sp-групп).

Основные обозначения

$\subset$	включение (не обязательно строгое)
$\bigoplus, \prod$	прямая сумма, прямое произведение
$\mathbf{P}$	множество всех простых чисел
$\mathbf{N}$	множество всех натуральных чисел ($\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\}$)
$\mathbf{Z}$	кольцо (и группа) всех целых чисел
$\mathbf{Z}(n)$	циклическая группа порядка $n \in \mathbf{N}$
$\mathbf{Z}(p^\infty)$	квазициклическая p-группа ($p \in \mathbf{P}$)
$\mathbf{Q}$	поле (и группа) всех рациональных чисел
$\mathbf{Q}^{(n)}$	кольцо (и группа) всех рациональных чисел, знаменатели которых делят некоторую степень числа $n \in \mathbf{N}$
$\mathbf{Q}^{(L)}$	кольцо (и группа) всех рациональных чисел, знаменатели которых суть произведения простых чисел из множества L
$\mathbf{Q}_n$	кольцо (и группа) всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с числом $n \in \mathbf{N}$
$\mathbf{Q}_L$	кольцо (и группа) всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты со всеми числами из множества L
$\mathbf{Q}_p^*$	кольцо (и группа) всех целых p-адических чисел ($p \in \mathbf{P}$)
$\mathcal{A}_p$	поле (и группа) всех p-адических чисел ($p \in \mathbf{P}$)
$\mathbf{R}$	множество всех вещественных чисел
$\|B\|$	мощность множества B
$\aleph_0$	наименьшее бесконечное кардинальное число
$\mathfrak{c}$	мощность континуума
$\mathrm{cf}(\mathfrak{M})$	конфинальность кардинального числа $\mathfrak{M}$
$\mathbf{t}(A)$	периодическая часть группы A
$\mathbf{t}_p(A)$	p-компонента группы A ($p \in \mathbf{P}$)
$\mathbf{d}(A)$	наибольшая делимая подгруппа группы A
A/B	фактормодуль модуля A по подмодулю B

$\langle g_1, g_2, \dots, g_n\rangle$	подгруппа, порождённая элементами $g_1, g_2, \dots, g_n$
$\langle g_1, g_2, \dots, g_n\rangle_*$	сервантная подгруппа группы без кручения, порождённая элементами $g_1, g_2, \dots, g_n$
${}_SF$, A_S	левый и правый модули над кольцом S
${}_RB_S$	R-S-бимодуль B
$A \otimes_S F$	тензорное произведение модулей A_S и ${}_SF$ над кольцом S
$A \otimes F$	тензорное произведение групп A и F
$\mathrm{Hom}_S(V, A)$	группа S-гомоморфизмов из модуля V_S в модуль A_S
$\mathrm{Hom}(V, A)$	группа гомоморфизмов из группы V в группу A
$\mathrm{End}\, V_S$	кольцо эндоморфизмов модуля V_S
id_V	тождественный эндоморфизм модуля V
$\mathrm{Im}\,\varphi$, $\mathrm{Ker}\,\varphi$	образ и ядро гомоморфизма φ
S-mod, mod-S	категории левых и правых S-модулей (а также классы объектов этих категорий)
$\mathcal{IR}(S)$	большая решётка идемпотентных радикалов категории mod-S
$\mathfrak{I}(I)$	идеализатор одностороннего идеала I
1_R	единичный элемент кольца R
R^+	аддитивная группа кольца R
$\mathrm{char}\, R$	характеристика кольца R
$Z(R)$	центр кольца R
$R[y]$	множество всех многочленов от переменной y с коэффициентами из R
Irr_F	множество всех неприводимых унитарных многочленов от переменной y с коэффициентами из поля F
$F(a)$	расширение поля F, получаемое присоединением элемента a
F^{alg}	алгебраическое замыкание поля F

Список литературы

1. Андрунакиевич В. А. *Радикалы алгебр и структурная теория* / В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин. – М.: Наука. – 1979.

2. Архангельский А. В. *Канторовская теория множеств* / А. В. Архангельский. – М.: Изд-во МГУ. – 1988.

3. Ван дер Варден Б. Л. *Алгебра* / Б. Л. ван дер Варден. – М.: Наука. – 1979.

4. Глухов М. М. *Алгебра. Т. 1* / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. – М.: Гелиос АРВ. – 2003.

5. Глухов М. М. *Алгебра. Т. 2* / М. М. Глухов, В. П. Елизаров, А. А. Нечаев. – М.: Гелиос АРВ. – 2003.

6. Зиновьев Е. Г. *Об одном обобщении колец псевдорациональных чисел* / Е. Г. Зиновьев // Вестн. Томского ун-та. – 2006. – № 290. – С. 46–47.

7. Зиновьев Е. Г. csp-*кольца как обобщение колец псевдорациональных чисел* / Е. Г. Зиновьев // Фундам. и прикл. математика. – 2007. – Т. 13. – С. 35–38.

8. Зиновьев Е. Г. *Кольца псевдоалгебраических чисел и модули над ними*: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Зиновьев Егор Геннадьевич. – Томск. – 2009.

9. Картан А. *Гомологическая алгебра* / А. Картан, С. Эйленберг. – М.: Иностр. лит. – 1960.

10. Каток С. Б. *p-адический анализ в сравнении с вещественным* / С. Б. Каток. – М.: МЦНМО. – 2004.

11. Каш Ф. *Модули и кольца* / Ф. Каш. – М.: Мир. – 1981.

12. Кашу А. И. *Радикалы и кручения в модулях* / А. И. Кашу. – Кишинёв: Штиинца. – 1983.

13. Кашу А. И. *Функторы и кручения в категориях модулей* / А. И. Кашу. – Кишинёв: Штиинца. – 1997.

14. Крылов П. А. *Об одном классе смешанных абелевых групп* / П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова, Е. И. Подберезина // Вестн. Томского ун-та. – 2000. – № 269. – С. 47–51.

15. Крылов П. А. *Обобщённые* T-*модули и* E-*модули* / П. А. Крылов, М. А. Приходовский // Универсальная алгебра и её приложения. Труды участников международного семинара (Волгоград, 1999). – Волгоград: Перемена. – 2000. – С. 153–169.

16. Крылов П. А. *Модули над областями дискретного нормирования* / П. А. Крылов, А. А. Туганбаев. – М.: Факториал Пресс. – 2007.

17. Куликов Л. Я. *К теории абелевых групп произвольной мощности* / Л. Я. Куликов // Мат. сб. – 1941. – Т. 9(51). – С. 165–181.

18. Курош А. Г. *Радикалы колец и алгебр* / А. Г. Курош // Мат. сб. – 1953. – Т. 33(75). – С. 13–26.

19. Курош А. Г. *Радикалы в теории групп* / А. Г. Курош // Сиб. мат. журн. – 1962. – Т. 3. – С. 912–931.

20. Ламбек И. *Кольца и модули* / И. Ламбек. – М.: Мир. – 1971.

21. Ленг С. *Алгебра* / С. Ленг. – М.: Мир. – 1968.

22. Мишина А. П. *Абелевы группы и модули* / А. П. Мишина, Л. А. Скорняков. – М.: Наука. – 1969.

23. Приходовский М. А. *Изоморфизмы тензорных произведений модулей и* T-*модули*: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06 / Приходовский Михаил Анатольевич. – Томск. – 2002.

24. Рябухин Ю. М. *Радикалы в категориях* / Ю. М. Рябухин // Изв. АН МССР. – 1964. – № 6. – С. 58–74.

25. Скорняков Л. А. *Элементы теории структур* / Л. А. Скорняков. – М.: Наука. – 1970.

26. Туганбаев А. А. *Теория колец. Арифметические модули и кольца* / А. А. Туганбаев. – М.: МЦНМО. – 2009.

27. Тэбырцэ Е. И. *О булевости решётки кручений в модулях* / Е. И. Тэбырцэ // *Математические исследования. Т. 8, вып. 3(29)*. – Кишинёв: Штиинца. – 1973. – С. 92–105.

28. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1* / К. Фейс. – М.: Мир. – 1977.

29. Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2* / К. Фейс. – М.: Мир. – 1979.

30. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы. Т. 1* / Л. Фукс. – М.: Мир. – 1974.

31. Фукс Л. *Бесконечные абелевы группы. Т. 2* / Л. Фукс. – М.: Мир. – 1977.

32. Халмош П. *Теория меры* / П. Халмош. – М.: Иностр. лит. – 1953.

33. Царев А. В. *Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел* / А. В. Царев // Мат. заметки. – 2006. – Т. 80. – С. 437–448.

34. Царев А. В. *Сервантные подкольца колец* $\mathbf{Z}_\chi$ / А. В. Царев // Мат. сб. – 2009. – Т. 200. – С. 123–150.

35. Царев А. В. *Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы*: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 / Царев Андрей Валерьевич. – М. – 2009.

36. Царев А. В. *Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы*: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.06 / Царев Андрей Валерьевич. – М. – 2009.

37. Чеглякова С. В. *Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел* / С. В. Чеглякова // Фундам. и прикл. математика. – 2001. – Т. 7. – С. 627–629.

38. Ширяев А. Н. *Вероятность. Т. 1* / А. Н. Ширяев. – М.: МЦНМО. – 2004.

39. Ширяев А. Н. *Вероятность. Т. 2* / А. Н. Ширяев. – М.: МЦНМО. – 2004.

40. Эклоф П. *Теоретико-множественные методы в гомологической алгебре и теории абелевых групп* / П. Эклоф. – М.: Мир. – 1986.

41. Энгелькинг Р. *Общая топология* / Р. Энгелькинг. – М.: Мир. – 1986.

42. Albrecht U. F. *The flat dimension of mixed Abelian groups as* E*-modules* / U. F. Albrecht, H. P. Goeters, W. J. Wickless // Rocky Mountain J. Math. – 1995. – V. 25. – P. 569–590.

43. Amitsur S. A. *A general theory of radicals. I. Radicals in complete lattices* / S. A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1952. – V. 74. – P. 774–786.

44. Amitsur S. A. *A general theory of radicals. II. Radicals in rings and bicategories* / S. A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76. – P. 100–125.

45. Amitsur S. A. *A general theory of radicals. III. Applications* / S. A. Amitsur // Amer. J. Math. – 1954. – V. 76. – P. 126–136.

46. Anderson F. W. *Rings and categories of modules* / F. W. Anderson, K. R. Fuller. – New York et al.: Springer. – 1992.

47. Bartoszyński T. *Set theory*: *on the structure of the real line* / T. Bartoszyński, H. Judah. – Wellesley: A. K. Peters. – 1995.

48. Bican L. *On rings with trivial torsion parts* / L. Bican, P. Jambor, T. Kepka, P. Němec // Bull. Austral. Math. Soc. – 1973. – V. 9. – P. 275–290.

49. Bican L. *Rings*, *modules*, *and preradicals* / L. Bican, T. Kepka, P. Němec. – New York; Basel: Marcel Dekker. – 1982.

50. Birkenmeier G. F. *A connection between weak regularity and the simplicity of prime factor rings* / G. F. Birkenmeier, J. Y. Kim, J. K. Park // Proc. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 122. – P. 53–58.

51. Blass A. *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum* / A. Blass // *Handbook of set theory.* – Dordrecht et al.: Springer. – 2010. – P. 395–489.

52. Butler M. C. R. *On locally free torsion-free rings of finite rank* / M. C. R. Butler // J. London Math. Soc. – 1968. – V. 43. – P. 297–300.

53. Corner A. L. S. *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring* / A. L. S. Corner // Proc. London Math. Soc. – 1963. – V. 13. – P. 687–710.

54. Dickson S. E. *On torsion classes of Abelian groups* / S. E. Dickson // J. Math. Soc. Japan. – 1965. – V. 17. – P. 30–35.

55. Dischinger F. *Sur les anneaux fortement π-réguliers* / F. Dischinger // Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris). Sér. A–B. – 1976. – V. 283. – P. A571–A573.

56. Dugas M. *Every cotorsion-free algebra is an endomorphism algebra* / M. Dugas, R. Göbel // Math. Z. – 1982. – V. 181. – P. 451–470.

57. Fomin A. A. *Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers* / A. A. Fomin // Abelian Groups and Modules. Proceedings of the international conference (Dublin, 1998). – Basel et al.: Birkhäuser. – 1999. – P. 87–100.

58. Fomin A. A. *Quotient divisible mixed groups* / A. A. Fomin // Abelian Groups, Rings, and Modules. Proceedings of the AGRAM 2000 Conference (Perth, 2000). – Providence: Amer. Math. Soc. – 2001. – P. 117–128.

59. Gardner B. J. *Torsion classes and pure subgroups* / B. J. Gardner // Pacific J. Math. – 1970. – V. 33. – P. 109–116.

60. Gardner B. J. *Two notes on radicals of Abelian groups* / B. J. Gardner // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1972. – V. 13. – P. 419–430.

61. Gardner B. J. *Generalized-pure-hereditary radical classes of Abelian groups* / B. J. Gardner // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1973. – V. 14. – P. 187–195.

62. Göbel R. *Semi-rigid classes of cotorsion-free Abelian groups* / R. Göbel, S. Shelah // J. Algebra. – 1985. – V. 93. – P. 136–150.

63. Göbel R. *Approximations and endomorphism algebras of modules* / R. Göbel, J. Trlifaj. – Berlin; Boston: De Gruyter. – 2012.

64. Golan J. S. *Torsion theories* / J. S. Golan. – Harlow: Longman Sci. Techn.; New York: Wiley. – 1986.

65. Green E. L. *On the representation theory of rings in matrix form* / E. L. Green // Pacific J. Math. – 1982. – V. 100. – P. 123–138.

66. Haghany A. *Study of modules over formal triangular matrix rings* / A. Haghany, K. Varadarajan // J. Pure Appl. Algebra. – 2000. – V. 147. – P. 41–58.

67. Jambor P. *On generation of torsion theories* / P. Jambor // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1972. – V. 13. – P. 79–98.

68. Jambor P. *An orthogonal theory of a set-valued bifunctor* / P. Jambor // Czech. Math. J. – 1973. – V. 23(98). – P. 447–454.

69. Jambor P. *Hereditary tensor-orthogonal theories* / P. Jambor // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1975. – V. 16. – P. 139–145.

70. Kaplansky I. *Projective modules* / I. Kaplansky // Ann. Math. – 1958. – V. 68. – P. 372–377.

71. Kashu A. I. *Some remarks on approximation of preradicals in modules* / A. I. Kashu // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat. – 2002. – № 3(40). – P. 53–60.

72. Krylov P. A. *Endomorphism rings of Abelian groups* / P. A. Krylov, A. V. Mikhalev, A. A. Tuganbaev. – Dordrecht et al.: Kluwer. – 2003.

73. Lam T. Y. *Lectures on modules and rings* / T. Y. Lam. – New York et al.: Springer. – 1999.

74. Lambek J. *Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients* / J. Lambek. – Berlin et al.: Springer. – 1971.

75. Orsatti A. *Alcuni gruppi abeliani il cui anello degli endomorfismi è locale* / A. Orsatti // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. – 1965. – V. 35. – P. 107–115.

76. Pierce R. S. E-*modules* / R. S. Pierce // Abelian Group Theory. Proceedings of the 1987 Perth Conference (Perth, 1987). – Providence: Amer. Math. Soc. – 1989. – P. 221–240.

77. Robson J. C. *Idealizers and hereditary noetherian prime rings* / J. C. Robson // J. Algebra. – 1972. – V. 22. – P. 45–81.

78. Rosenberg J. *Algebraic K-theory and its applications* / J. Rosenberg. – Berlin et al.: Springer. – 1994.

79. Schelter W. F. *Flat modules and torsion theories* / W. F. Schelter, P. C. Roberts // Math. Z. – 1972. – V. 129. – P. 331–334.

80. Schultz P. *The endomorphism ring of the additive group of a ring* / P. Schultz // J. Austral. Math. Soc. – 1973. – V. 15. – P. 60–69.

81. Shelah S. *Infinite Abelian groups*, *Whitehead problem and some constructions* / S. Shelah // Israel J. Math. – 1974. – V. 18. – P. 243–256.

82. Stenström B. *Rings of quotients* / B. Stenström. – Berlin et al.: Springer. – 1975.

83. Van Douwen E. K. *The integers and topology* / E. K. van Douwen // *Handbook of set-theoretic topology*. – Amsterdam et al.: North-Holland. – 1984. – P. 111–167.

Работы автора по теме диссертации

84. Тимошенко Е. А. E-*модули и связанный с ними радикал* / Е. А. Тимошенко // *Абелевы группы и модули. Вып. 15.* – Томск: Изд-во Томского ун-та. – 2000. – С. 98–112.

85. Тимошенко Е. А. T-*модули и* T-*радикал* / Е. А. Тимошенко // Материалы 39-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск. – 2001. – С. 3.

86. Тимошенко Е. А. T-*радикалы в категории абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Международная конференция «Алгебра и её приложения». Тезисы докладов. – Красноярск. – 2002. – С. 118.

87. Тимошенко Е. А. T-*радикалы в категории модулей* / Е. А. Тимошенко // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения. Тезисы докладов 5-й Международной конференции. – Тула. – 2003. – С. 214–215.

88. Timoshenko E. A. T-*radicals in the category of modules* / E. A. Timoshenko // International Conference on Radicals. Program and abstracts. – Chişinău. – 2003. – P. 33–35.

89. Тимошенко Е. А. T-*радикалы в категории модулей* / Е. А. Тимошенко // Международная конференция по математике и механике. Тезисы докладов. – Томск. – 2003. – С. 59.

90. Тимошенко Е. А. T-*радикалы и* E-*радикалы в категории модулей* / Е. А. Тимошенко // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45. – С. 201–210.

91. Тимошенко Е. А. T-*радикалы в категории абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Алгебра, логика и кибернетика. Материалы международной конференции, посвящённой 75-летию со дня рождения А. И. Кокорина. – Иркутск. – 2004. – С. 107–108.

92. Timoshenko E. A. T-*radicals in the category of modules* / E. A. Timoshenko // Acta Appl. Math. – 2005. – V. 85. – P. 297–303.

93. Тимошенко Е. А. T-*радикалы в категории абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Материалы 43-й Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс»: Математика. – Новосибирск. – 2005. – С. 14.

94. Тимошенко Е. А. *Радикальные классы, замкнутые относительно сервантных подгрупп* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Труды Всероссийского симпозиума. – Бийск. – 2005. – С. 37–39.

95. Тимошенко Е. А. *Радикальные классы, замкнутые относительно сервантных подгрупп* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. – 2006. – № 290. – С. 86–88.

96. Тимошенко Е. А. *Об одном соотношении дистрибутивности для* T-*радикалов* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума. – Бийск. – 2006. – С. 38–40.

97. Тимошенко Е. А. *О пересечениях* T-*радикалов в категории абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. – 2007. – № 299. – С. 106–107.

98. Тимошенко Е. А. *Об идемпотентных радикалах, порождаемых бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Международная конференция «Алгебра и её приложения». Тезисы докладов. – Красноярск. – 2007. – С. 132–133.

99. Тимошенко Е. А. *Радикальные классы, порождаемые или копорождаемые бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. – М. – 2008. – С. 227–228.

100. Тимошенко Е. А. *О порождаемости* $\mathrm{T}(F)$*-радикалов бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Всероссийская конференция по математике и механике. Сборник тезисов. – Томск. – 2008. – С. 64.

101. Timoshenko E. A. T*-radicals in the category of Abelian groups* / E. A. Timoshenko // J. Math. Sci. (New York). – 2008. – V. 154. – P. 411–421.

102. Тимошенко Е. А. *О соотношениях дистрибутивности для* T*-радикалов абелевых групп* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Самарского ун-та. – 2008. – № 6(65). – С. 193–201.

103. Тимошенко Е. А. T*-радикалы, порождаемые бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Самарского ун-та. – 2009. – № 8(74). – С. 88–93.

104. Тимошенко Е. А. *Радикалы в категории модулей над* csp*-кольцом* / Е. А. Тимошенко // Проблемы теоретической и прикладной математики. Тезисы 41-й Всероссийской молодёжной конференции. – Екатеринбург. – 2010. – С. 85–91.

105. Тимошенко Е. А. *О порождаемости* T*-радикалов бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2010. – № 2(10). – С. 16–19.

106. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел* / Е. А. Тимошенко // Алгебра, логика и приложения. Тезисы докладов международной конференции. – Красноярск. – 2010. – С. 97–98.

107. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума. – Бийск. – 2010. – С. 52–54.

108. Тимошенко Е. А. *Радикалы, порождаемые или копорождаемые бимодулями* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2010. – № 3(11). – С. 47–52.

109. Тимошенко Е. А. *О базовых полях* csp*-колец* / Е. А. Тимошенко // Алгебра и логика. – 2010. – Т. 49. – С. 555–565.

110. Тимошенко Е. А. *О* br*-кольцах* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2010. – № 4(12). – С. 32–38.

111. Тимошенко Е. А. *О радикалах в категории модулей над* csp*-кольцом* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2011. – № 3(15). – С. 59–65.

112. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над* csp*-кольцами* / Е. А. Тимошенко // Алгебра и математическая логика. Материалы международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения В. В. Морозова. – Казань. – 2011. – С. 170–171.

113. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел* / Е. А. Тимошенко // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. – 2011. – Т. 4. – С. 541–550.

114. Тимошенко Е. А. *Базовые поля* csp*-колец* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Материалы Всероссийского симпозиума. – Бийск. – 2012. – С. 47–50.

115. Тимошенко Е. А. *Проективные модули над* csp*-кольцами* / Е. А. Тимошенко // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. – 2012. – Т. 5. – С. 581–585.

116. Timoshenko E. A. *Purely transcendental extensions of the field* $\mathbf{Q}$ *as base fields of* csp*-rings* / E. A. Timoshenko // Алгебра и логика: теория и приложения. Тезисы докладов международной конференции. – Красноярск. – 2013. – С. 172–174.

117. Тимошенко Е. А. *Чисто трансцендентные расширения поля рациональных чисел как базовые поля* csp*-колец* / Е. А. Тимошенко // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. – 2013. – № 5(25). – С. 30–39.

118. Тимошенко Е. А. *Группа Гротендика* K_0 *произвольного* csp*-кольца* / Е. А. Тимошенко // Абелевы группы. Материалы Международного симпозиума, посвящённого 100-летию со дня рождения Л. Я. Куликова. – М. – 2014. – С. 72–74.