На правах рукописи

ВЕПРИНЦЕВ ДМИТРИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

СКРУЧЕННЫЕ ПОДМНОЖЕСТВА В ГРУППАХ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск-2008

Работа выполнена в Красноярском государственном аграрном университете

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор Беляев В.В.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
доцент Васильев А.В.

доктор физико-математических наук,
доцент Колесников С.Г.

Ведущая организация:

Институт математики
и механики УрО РАН

Защита состоится 30.06.2008 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "____" _____________ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета

____________________ Бушуева Н.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В работе [8] М. Ашбахер вводит понятие скрученной подгруппы в группе. При этом *скрученной подгруппой (twisted subgroup)* называется подмножество K группы G, удовлетворяющее следующим условиям:

(ts1) $1 \in K$,

(ts2) Если $x, y \in K$, то $xyx \in K$.

В.В. Беляевым было замечено, что в ряде случаев вместо свойства (ts2) удобнее рассматривать свойство

(ts2*) Если $x, y \in K$, то $xy^{-1}x \in K$.

Подмножество K группы G, для которого выполняются (ts1) и (ts2*) называется *скрученным подмножеством.*

Нетрудно показать, что скрученные подмножества всегда являются скрученными подгруппами. В конечных группах справедливо и обратное. При этом стоит заметить, что М. Ашбахер в [8] работает только в конечных группах.

Понятно, что любая подгруппа в группе является скрученным подмножеством. В качестве нетривиальных примеров скрученных подмножеств можно указать множество инволюций группы, пополненное 1, а также множества $I(\varphi) = \{\, x \in G \mid \varphi(x) = x^{-1} \,\}$ и $D(\varphi) = \{\, x^{-1}\varphi(x) \mid x \in G \,\}$, где φ — инволютивный автоморфизм группы G.

Следует отметить, что понятия скрученного подмножества и скрученной подгруппы в группе были введены недавно, поэтому пока эти объекты не подвергались систематическому изучению. Так, например, в работе [8] М. Ашбахер исследует в основном скрученные подгруппы специального вида, которые возникают в работе Т. Федера и М. Варди [13] и связаны с прикладными задачами.

С другой стороны, понятие скрученного подмножества обнаруживает связь с рядом классических объектов, которые происходят как из теории групп так и из геометрии и теоретической физики.

Остановимся на этой связи более подробно, но сначала заметим, что определив на произвольной группе G бинарную операцию

$$x \circ y := xy^{-1}x$$

для всех $x, y \in G$, мы ставим в соответствие группе G группоид $(G, \circ)$, в котором выполняются следующие тождества:

(s1) $x \circ x = x$**,**

(s2) $x \circ (x \circ y) = y$**,**

(s3) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$**.**

1. По всей видимости, первым историческим примером изучения системы тождеств (s1)—(s3) является понятие симметрического пространства, ставшее классическим благодаря работам Э. Картана, и вошедшее в учебники по дифференциальной геометрии ([7]).

Пользуясь современной терминологией [2], симметрическим пространством называют гладкое многообразие M, на котором задана бинарная операция, удовлетворяющая тождествам (s1)—(s3) и дополнительному топологическому свойству

(s4) для любой точки x из M существует такая ее окрестность U, что равенство $x \circ w = w$ влечет равенство $x = w$ для всех точек $w \in U$.

Операция "$\circ$" имеет следующую геометрическую интерпретацию: если A и B — точки некоторой поверхности M, лежащие достаточно близко друг от друга, то $A \circ B$ — точка геодезической, проведенной из B в A, лежащая симметрично точке B относительно A.

2. В теории групп лиева типа возникает понятие системы корней, необходимое для построения группы Вейля [11].

Пусть V — евклидово пространство. Скалярное произведение векторов $x, y \in V$ будем обозначать через (x, y). Для произвольного ненулевого вектора $v \in V$ определяется отображение $w_v \colon V \to V$

$$w_v(x) := x - \frac{2(x, v)}{(v, v)} v,$$

которое геометрически является отражением относительно гиперплоскости, ортогональной вектору v.

Конечное подмножество Φ ненулевых векторов пространства V называется системой корней V [11], если выполняются следующие аксиомы:

(1) Φ порождает V.

(2) Если $r, s \in \Phi$, то $w_r(s) \in \Phi$.

(3) Если $r, s \in \Phi$, то $2(r,s)/(r,r)$ — целое число.

(4) Если $r, \lambda s \in \Phi$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda = \pm 1$.

Пусть Φ — система корней пространства V. Нетрудно проверить, что определив на Φ бинарную операцию

$$r \circ s := w_r(s)$$

для произвольных $r, s \in \Phi$ и профакторизовав группоид $(\Phi, \circ)$ по разбиению на подмножества вида $\{r, -r\}$, получим фактор-группоид, в котором бинарная операция "$\circ$" удовлетворяет тождествам (s1)—(s3).

3. В связи с задачей классификации симметричных билинейных форм большую роль играет множество симметричных матриц в матричных кольцах.

Пусть S — множество симметричных матриц в матричной группе G. Тогда понятно, что $E \in S$, где E — единичная матрица. Оказывается также, что для произвольных матриц $X, Y \in S$ матрица $X \circ Y = XY^{-1}X$ снова содержится в S. Это можно проверить непосредственно, а можно заметить, что S совпадает с множеством $I(\varphi)$, где φ — инволютивный автоморфизм группы G, переводящий произвольную матрицу X в матрицу $(X^{-1})^T$.

Таким образом, множество S является скрученным подмножеством группы G.

4. В работах [16], [17], Дж. Глауберман исследовал группы нечетного порядка с введенной следующим образом бинарной операцией: $x \odot y := x^{\frac{1}{2}} y x^{\frac{1}{2}}$. Относительно этой операции группа является лупой.

Заметим, что если подмножество H группы нечетного порядка содержит 1 и замкнуто относительно операции "$\odot$", то H замкнуто и относительно операции $x * y = xyx$, поскольку $x * y = x \odot (x \odot y)$. Таким образом, следуя терминологии М. Ашбахера [8], множество H есть скрученная подгруппа. Но нетрудно показать, что тогда H есть скрученное подмножество. Справедливо и обратное, то есть, если H — скрученное подмножество из группы нечетного порядка, то H замкнуто относительно операции "$\odot$".

Таким образом, фактически, в работах [16], [17] изучались скрученные подмножества в группах нечетного порядка.

Возвращаясь к свойствам операции "$\odot$"в группах нечетного порядка, что Дж. Глауберман в [16] отмечает следующее тождество:

$$x \odot (y \odot (x \odot z)) = (x \odot (y \odot x)) \odot z.$$

В работах [18, 20] рассматривается двойственное тождество

$$((z \odot x) \odot y) \odot x = z \odot ((x \odot y) \odot x).$$

Лупы, в которых имеет место последнее тождество называются правыми лупами Бола. В работе [9] М. Ашбахер, следуя Бэру [10], для произвольной лупы $(X, \cdot)$ рассматривает множество $K(X) = \{ R(x) \mid x \in X \} \subseteq Sym(X)$, где каждая подстановка $R(x)$ действует на X следующим образом: $yR(x) := y \cdot x$ для всякого $y \in X$. Со ссылкой на работы [14, 19], Ашбахер отмечает, что лупа X является правой лупой Бола тогда и только тогда, когда множество подстановок $K(X)$ является скрученным подмножеством группы $Sym(X)$.

5. Гирогруппы — это лупы специального вида, которые впервые появились в работе Абрахама А. Унгара [21] в 1988 году. В этой работе рассматривался так называемый релятивистский группоид $\mathbb{R}^3_1$, в котором бинарная операция не является ни коммутативной, ни ассоциативной. Понятие гирогруппы обобщает конструкцию релятивистского группоида $\mathbb{R}^3_1$. Физические интерпретации гирогрупп приводятся в работах [22] и [23], а в работах [15], [24] показано, что любая гирогруппа может быть вложена в некоторую группу в виде скрученной подгруппы. Таким образом, скрученные подмножества в группах обнаруживают связь с конструкциями, возникающими в теоретической физике.

В силу приведенных выше примеров правомерно поставить общий вопрос об изучении скрученных подмножеств и разработке некоторой теории этих структур. Заметим, что построению начал такой теории посвящены работы Мыльникова А.Л. [3, 4, 5, 6] и совместная работа Беляева В.В. и Мыльникова А.Л. [1].

Цель диссертации

Целью диссертации является исследование свойств скрученных подмножеств в группах с точки зрения тождеств, которым удовлетворяет операция $x \circ y = xy^{-1}x$, и изучение поведения скрученных подмножеств в подгруппах, ими порожденных.

Основные результаты

1. Построены примеры негрупповых симметроидов и симметроидов, изоморфно не вложимых в групповые.

2. Показано, что проективные скрученные подмножества и только они порождают в конечной группе 2-подгруппы.

3. Описаны конечные группы, обладающие инволютивным автоморфизмом, который оставляет неподвижными ровно два класса сопряженных элементов.

Методы исследования

Применяются методы теории групп.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая ценность

Результаты, изложенные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть использованы как в дальнейших исследованиях в теории групп, так и при чтении специальных курсов по алгебре.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения и четырех глав основного текста. Список литературы состоит из 41 наименования. Работа изложена на 96 страницах текста, набранного в редакционно-издательской системе LaTeX.

Публикации

Основные результаты по теме диссертации опубликованы в работах [25, 26, 27, 28, 29].

Содержание диссертации.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. В каждой главе нумерация утверждений начинается заново.

Глава I.

В первой главе диссертации исследуется операция скручивания в группах. Определим на произвольной группе G бинарную операцию $x \circ y := xy^{-1}x$ для всех $x, y \in G$. Таким образом группе G соответствует группоид $(G, \circ)$. Понятно, что скрученными подмножествами группы G являются подгруппоиды группоида $(G, \circ)$, содержащие 1. Как замечено выше, в группоиде $(G, \circ)$ выполняются тождества (s1)-(s3). Введем основные определения.

Определение [Беляев В.В.]. *Пусть $(S, \circ)$ — группоид, в котором выполняются тождества (s1), (s2) и (s3). Тогда S будем называть симметроидом, а операцию „$\circ$“ — скручиванием.*

Определение. *Если G — группа, то симметроид $(G, \circ)$ будем называть присоединенным симметроидом группы G и обозначать через $S(G)$.*

Определение. *Симметроиды S и T будем называть изоморфными, если существует такое биективное отображение $\varphi : S \to T$, что $\varphi(s_1 \circ s_2) = \varphi(s_1) \circ \varphi(s_2)$ для всех $s_1, s_2 \in S$.*

Определение. *Симметроид будем называть групповым, если он изоморфен присоединенному симметроиду некоторой группы.*

В главе изучается возможность вкладывать абстрактные симметроиды в группы в виде скрученных подмножеств. Большую роль при этом играет следующее

Определение. *Элементы a и b симметроида S будем называть коллинеарными, если $a \circ x = b \circ x$ для произвольного $x \in S$.*

Нетрудно показать, что в произвольном симметроиде отношение коллинеарности является конгруэнцией. Фактор-симметроид симметроида S по отношению коллинеарности будем обозначать через $P(S)$.

Определим теперь для произвольного симметроида S последовательность

$$P^0(S), \quad P^1(S), \quad \dots, \quad P^n(S), \dots,$$

где $P^0(S) = S$, и $P^n(S) := P(P^{n-1}(S))$ для $n \geq 1$.

Определение. *Симметроид S будем называть проективным, если $P^n(S)$ — одноэлементный симметроид для некоторого n.*

Получены следующие результаты о проективных симметроидах.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа и $S(G)$ — присоединенный симметроид группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $S(G)$ — проективный симметроид,

(2) G — 2-группа.

Теорема 4. *Пусть G — конечная группа, $G \neq 1$ и S — скрученное подмножество из G такое, что $G =< S >$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) S — проективный симметроид,

(2) G — 2-группа.

Мы вводим понятие симметроида, исходя из свойств операции скручивания в группах. А любой ли симметроид может быть получен таким образом? Точнее

Вопрос 1. *Всякий ли симметроид является групповым?*

Ответ оказывается отрицательным. Доказана

Теорема 5. *Существуют негрупповые симметроиды.*

Таким образом, существуют симметроиды, которые не реализуются как присоединенные к группам. Следующий вопрос возникает в связи с решением первого вопроса.

Вопрос 2. *Всякий ли симметроид изоморфно вложим в групповой?*

Ответ снова оказывается отрицательным. Получена

Теорема 6. *Существуют симметроиды, изоморфно не вложимые в групповые.*

Значит, имеются симметроиды, которые не реализуются как скрученные подмножества в группах. С другой стороны, получены достаточные условия вложимости. Например, симметроид не содержащий двух различных коллинеарных элементов изоморфно вложим в групповой.

Глава II.

Во второй главе диссертации исследуется поведение скрученных подмножеств в подгруппах, ими порожденных.

Пусть скрученное подмножество T порождает группу G. Тогда справедливы (см. ниже) два утверждения:

(R) Для любого $x \in G$ существует $y \in G$ такой, что $Tx = yT$.

(L) Для любого $x \in G$ существует $y \in G$ такой, что $xT = Ty$.

Определение. *Подмножество T группы G, удовлетворяющее (R) и (L) назовем симметричным.*

Естественно возникает вопрос о связи между свойствами (R) и (L).

Вопрос. *Верно ли, что условия (R) и (L) равносильны?*

В общем случае вопрос открыт, но в случае конечной группы получен положительный ответ:

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа и T — подмножество из G. Тогда условия (R) и (L) эквивалентны.*

В главе обобщаются некоторые понятия и результаты статьи М. Ашбахера [8], посвященной исследованию скрученных подмножеств в группах. Оказывается, что часть результатов, сформулированных в [8] для скрученных подмножеств, остается справедливой и для симметричных.

Определение. *Пусть S — симметричное подмножество группы G. Ядром S будем называть подгруппу $Ker(S) = \{\, x \in G \mid Sx = S \,\}$.*

Ядро симметричного подмножества является нормальной подгруппой в группе.

Определение. *Симметричное подмножество S группы G назовем редуцированным, если $Ker(S) = 1$.*

Следующий результат устанавливает что при подходящей факторизации группы всякое симметричное подмножество можно перевести в редуцированное.

Теорема 3. *Пусть $\overline{G}$ — гомоморфный образ группы G под действием гомоморфизма $\overline{}$ и S — симметричное подмножество из G. Тогда*

(1) $\overline{S}$ — симметричное подмножество группы $\overline{G}$.

(2) если $\overline{G} = G/Ker(S)$, то $\overline{S}$ - редуцированное симметричное подмножество группы $\overline{G}$.

Далее, в работе [8] при определенных предположениях по скрученному подмножеству строится инволютивный автоморфизм группы. Оказалось, что аналогичное построение может быть проведено и для симметричных подмножеств. Построенный при этом автоморфизм уже не обязательно является инволютивным.

Теорема 4. *Пусть S — редуцированное симметричное подмножество группы G. Тогда*

(1) Для любого $x \in G$ существует единственный $y \in G$ такой, что $xS = Sy$,

(2) Отображение $x \to y$ является автоморфизмом группы G.

Определение. *Автоморфизм $x \to y$ будем называть автоморфизмом, ассоциированным с редуцированным симметричным подмножеством S. Обозначим этот автоморфизм через φ_S.*

Определение [Беляев В.В.]. *Пусть G — произвольная группа, $a \in G$, $\psi \in Aut(G)$. Дивергенцией автоморфизма ψ в точке a назовем множество $D_a(\psi) = \{\, x^{-1}a\psi(x) \mid x \in G \,\}$.*

Таким образом, автоморфизму группы G ставится в соответствие набор подмножеств из G. Например, дивергенциями тождественного автоморфизма будут классы сопряженных элементов группы G.

Теорема 5. *Редуцированное симметричное подмножество S группы G является объединением некоторого набора дивергенций ассоциированного автоморфизма φ:* $\quad S = \bigcup\limits_{g \in S} D_g(\varphi_S)$.

Понятие дивергенции автоморфизма и техника работы с дивергенциями детально разрабатывается в третьей главе диссертации. Следующий результат устанавливает связь между скрученными и симметричными подмножествами.

Теорема 7. *Пусть T — скрученное подмножество группы G, причем $< T >= G$. Тогда T — симметричное подмножество группы G.*

Глава III.

Пусть G — конечная группа и φ — автоморфизм группы G. Введем обозначения:

$\Delta(\varphi, G)$ — число дивергенций автоморфизма φ в группе G,

$\delta(\varphi, G)$ — число φ-инвариантных классов сопряженных элементов группы G.

Получены следующие основные результаты:

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа и φ — автоморфизм группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $\Delta(\varphi, G) = 1$,

(2) $C_G(\varphi) = 1$.

Теорема 5. *Пусть G — конечная группа и φ — произвольный автоморфизм группы G. Тогда $\delta(\varphi, G) = \Delta(\varphi, G)$.*

Глава IV.

В заключительной главе диссертации рассматриваются автоморфизмы конечных групп, близкие к регулярным. Пусть G — конечная группа и φ — автоморфизм группы G. Тогда φ действует на множестве классов сопряженных элементов из G. Естественно возникает вопрос о связи между числом $\delta(\varphi, G)$ и другими числовыми характеристиками автоморфизма φ.

Из результатов главы III следует, что в случае конечной группы автоморфизмы с $\delta(\varphi, G) = 1$ — это в точности регулярные автоморфизмы.

Предположим теперь, что φ — автоморфизм конечной группы G и $\delta(\varphi, G) = 2$. Тогда удается показать, что $|C_G(\varphi)| = 2$, то есть всякий автоморфизм с двумя неподвижными классами сопряженных элементов имеет ровно две неподвижные точки. Отметим, что обратное утверждение неверно, и, таким образом, условие $\delta(\varphi, G) = 2$ (или эквивалентное условие $\Delta(\varphi, G) = 2$) выделяет некоторый собственный подкласс в классе автоморфизмов с двухэлементным централизатором.

В главе исследуются конечные группы, обладающие инволютивным автоморфизмом с $\Delta(\varphi, G) = 2$. Интерес к случаю инволютивного автоморфизма вызван прежде всего тем, что дивергенция такого автоморфизма в точке 1 является скрученным подмножеством в группе.

Для формулировки результатов оказалось удобным

Определение. *Пусть G — группа и φ — автоморфизм G. Группу G будем называть φ-приводимой, если G представима в виде прямого произведения двух нетривиальных φ-инвариантных подгрупп, и φ-неприводимой в противном случае.*

Основными результатами главы являются теоремы 2 и 3, первая из которых сводит изучение конечной φ-приводимой группы с условием $\Delta(\varphi, G) = 2$ к исследованию φ-неприводимых групп с таким же условием, а вторая дает список φ-неприводимых групп.

Теорема 2. *Пусть G — конечная группа и φ — автоморфизм группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(I) φ — инволютивный автоморфизм G, $\Delta(\varphi, G) = 2$ и G φ-приводима.

(II) $G = B \times A$, где B и A — нетривиальные φ-инвариантные подгруппы из G, причем

(a) A — абелева группа нечетного порядка и $\varphi(a) = a^{-1}$ для всех $a \in A$.

(b) Выполняется одно из условий:

(1) B — группа порядка 2.

(2) φ — инволютивный автоморфизм B, $\Delta(\varphi, B) = 2$ и B φ-неприводима.

Теорема 3. *Пусть G — конечная группа и φ — автоморфизм группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(I) φ — инволютивный автоморфизм G, $\Delta(\varphi, G) = 2$ и G φ-неприводима.

(II) Группа G и автоморфизм φ удовлетворяют одному из случаев:

(1) $G =< b >$ — циклическая 2-группа порядка > 2, $\varphi(b) = b^{-1}$;

(2) $G =< b >$ — циклическая 2-группа порядка > 4, $\varphi(b) = b^{-1}w$, где w — инволюция из B;

(3) $G =< w > \times < b >$ — четверная группа Клейна, где w и b — инволюции, $\varphi(w) = w$, $\varphi(b) = bw$;

(4) $G = Q \rightthreetimes A$, причем

(i) $Q =< w > \times < b >$, где w и b — инволюции,

(ii) $A =< a >$, где a — элемент порядка 3^n для $n \geq 1$, $w^a = b$,

(iii) $\varphi(w) = w$, $\varphi(b) = bw$, $\varphi(a) = a^{-1}$.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В. Беляеву, под руководством которого выполнена эта работа.

Апробация

Результаты диссертации докладывались автором на алгебраических семинарах Красноярского Государственного Университета, Красноярского Государственного Аграрного Университета, Московского Государственного Университета, Московского Физико-Технического Института, на конференциях "Мальцевские чтения"в 2005, 2006 гг. и международной конференции "Алгебра и ее приложения", посвященной 75-летию профессора В.П. Шункова в 2007 г.

Список литературы

[1] Беляев, В.В. *Оценка порядка группы, порожденной конечным скрученным подмножеством* /В.В. Беляев, А.Л. Мыльников. //Математические системы. Вып.6 /Краснояр. гос. аграр. ун-т.— Красноярск, 2007.—С. 3—5.

[2] Лоос, О. *Симметрические пространства* /О. Лоос— М.: Наука, 1985.

[3] Мыльников, А.Л. *Конечные перекрученные группы* /А.Л. Мыльников //Математические системы. Вып.3 /Краснояр. гос. аграр. ун-т.— Красноярск, 2005.—С. 53—58.

[4] Мыльников, А.Л. *Нильпотентность коммутанта конечной перекрученной группы* /А.Л.Мыльников //Сиб. матем. ж.—2006.— Т.47,—N5,—С. 1117—1127.

[5] Мыльников, А.Л. *О ступени разрешимости конечной перекрученной группы* /А.Л. Мыльников //Вестник Красноярского госуниверситета.— 2006.—N1.—С. 61—67.

[6] Мыльников, А.Л. *Конечные минимальные неперекрученные группы* /А.Л. Мыльников //Вестник Красноярского госуниверситета.—2005.— N1.—С. 71—76.

[7] Трофимов, В.В. *Введение в геометрию многообразий с симметриями* /В.В. Трофимов— М.: Изд-во МГУ, 1989.

[8] Aschbacher, M. *Near subgroups of finite groups* /M. Aschbacher //J. Group Theory.—1998.—v.1. N2.—P. 113—129.

[9] Aschbacher, M. *On Bol loops of exponent 2* /M. Aschbacher //J. of Algebra 288(2005).—P. 99—136.

[10] Baer, R. *Nets and Groups* /R. Baer //Trans. Amer. Math. Soc. 47(1939).—P. 110—141.

[11] Carter, R. W. *Simple groups of Lie type* /R.W. Carter //New York: Wiley and Sons.—1972.

[12] Feder, T. *Strong near subgroups and left gyrogroups* /T. Feder //J. of Algebra 259(2003).—P. 177—190.

[13] Feder, T. *The computational structure of monotone monadic SNP and constraint satisfaction: A study through datalog and group theory* /T. Feder, M. Vardi //SIAM J. Comput. N28. —1998.—P. 57—104.

[14] Foguel, T. *On twisted subgroups and Bol loops of odd order* /T. Foguel, M. Kinyon, J. Philips //submitted for publication.

[15] Foguel, T. *Involutory decomposition of groups into twisted subgroups and subgroups* /T. Foguel, A.A. Ungar //J. Group Theory 3(2000).—P. 27—46.

[16] Glauberman, G. *On loops of odd order* /G. Glauberman //J. of Algebra.—1964. N1.—P. 374—395.

[17] Glauberman, G. *On loops of odd order II* /G. Glauberman //J. of Algebra.—1964. N8.—P. 393—414.

[18] Kiechle, H. *Theory of K-loops, Lecture Notes in Mathematics 1778* /H. Kiechle //Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.—2002.

[19] Kreuzer, A. *Inner mappings of Bruck loops* /A. Kreuzer //Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 123 (1998).—P. 53—57.

[20] Robinson, D. A. *Bol loops* /D.A. Robinson //Trans. Amer. Math. Soc. 123 (1966).—P. 341—354.

[21] Ungar, A.A. *Thomas rotation and the parametrization of the Lorentz transformation group* /A.A. Ungar //Found. Phys. Lett.—1988. N1.—P. 57—89.

[22] Ungar, A.A. *Thomas precession and its associated grouplike structure* /A.A. Ungar // Amer. J. Phys.—1991. —v.59.—P. 824—834.

[23] Ungar, A.A. *The holomorphic automorphism group of complex dis*k /A.A. Ungar //Aequat. Math.—1994.—v.47.—P. 240—254.

[24] Ungar, A.A. *Thomas precession: its underlying gyrogroup axiom and their use in hyperbolic geometry and relativistic physics* /A.A. Ungar //Found. Phys.—1997.—v.27.—P. 881—951.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[25] Вепринцев, Д.В. *Симметричные подмножества в группах* /Д.В. Вепринцев //Математические системы. Вып.4 /Краснояр. гос. аграр. ун-т.—Красноярск, 2005.—С. 3—12.

[26] Вепринцев, Д.В. *Редуцированные симметричные подмножества в группах* /Д.В. Вепринцев //Математические системы. Вып.4 /Краснояр. гос. аграр. ун-т.—Красноярск, 2005.—С. 13—17.

[27] Вепринцев, Д.В. *Конечные группы, обладающие инволютивным автоморфизмом с небольшим числом неподвижных классов сопряженных элементов* /Д.В. Вепринцев //Математические системы. Вып.6 /Краснояр. гос. аграр. ун-т.—Красноярск, 2007.—С. 17—39.

[28] Вепринцев, Д.В. *Об операции скручивания в группах* /Д.В. Вепринцев //Математические системы. Вып.6 /Краснояр. гос. аграр. ун-т.—Красноярск, 2007.—С. 6—16.

[29] Вепринцев, Д.В. *Инволютивная декомпозиция группы и скрученные подмножества с малым количеством инволюций* /Д.В. Вепринцев, А.Л. Мыльников //Сиб. матем. ж.—2008.—Т.49,—N2,—С. 275—280.