На правах рукописи

Ушаков

Ушаков Юрий Юрьевич

Автоморфизмы свободных алгебр и функции на группах лиева типа ранга 1

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2013

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО "Сибирский федеральный университет"

Научный руководитель

д-р физ.-мат. наук, профессор Левчук Владимир Михайлович

Официальные оппоненты:

Мазуров Виктор Данилович,

д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАН,

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

Советник РАН при ИМ СО РАН.

Зюбин Сергей Александрович, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Национальный исследовательский Томский Политехнический университет,

Центр международной сертификации технического образования

и инженерной профессии, начальник отдела.

Ведущая организация

Институт математики и механики Уральского отделения РАН.

Защита состоится 26 апреля 2013 года в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при ФГАОУ ВПО "Сибирский федеральный университет" по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан   марта 2013 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета   Бушуева Наталья Александровна

Общая характеристика работы [1]

Актуальность темы. В диссертации исследуются вопросы о функциях на конечных группах и автоморфизмы свободной ассоциативной алгебры.

В Коуровской тетради в 1969 году Л. А. Бокутем записан

Известный вопрос. *Описать группу автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры ранга* $n \geq 2$ [1, Вопрос 3.3].

Обычно, для свободной ассоциативной алгебры A_n (с единицей) ранга n над полем выделяют стандартные элементарные автоморфизмы; порождённые ими автоморфизмы называют *ручными*, а остальные автоморфизмы — *дикими*.

Таким образом, вопрос 3.3 сводится к описанию диких автоморфизмов. Трудным оказывается даже вопрос, когда группа $\operatorname{Aut} A_n$ совпадает с подгруппой в ней всех ручных автоморфизмов. Ещё к началу 1970-х годов А. Г. Чернякевич было доказано, что все автоморфизмы алгебры A_2 — ручные.

Напомним, что любой эндоморфизм φ алгебры A_n над полем F характеризуется действием на её свободных порождающих $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$; полагают $A_n = F\langle x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n\rangle$. Если $f_i := \varphi(x_i)$, то пишем $\varphi = (f_1,\ f_2,\ \ldots, f_n)$. Первый «подозрительный» автоморфизм выявился уже для алгебры A_3. В монографии Кона [7] он называется *автоморфизмом Аника*, и задаётся по правилу:

$$\delta = (x_1 + x_3(x_1x_3 - x_3x_2), \quad x_2 + (x_1x_3 - x_3x_2)x_3, \quad x_3).$$

Лишь в 2003 году завершено доказательство дикости автоморфизма Аника в случае основного поля характеристики 0. Это показали И. П. Шестаков и У. У. Умирбаев, [13], [6]. Примечательно, как показали в 2005 году те же авторы, что продолжение δ на алгебру A_n ранга $n > 3$ по правилу $\delta(x_i) = x_i$ для $i > 3$ всегда даёт ручной автоморфизм.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00968) и проекта "Алгебро-логические структуры и комплексный анализ с приложениями к передаче и защите информации" , выполняемому в рамках "Задание Минобрнауки РФ"

Эти работы опирались, в первую очередь, на метод свободных дифференцирований Фокса и матриц Якоби. Те же методы позволили В. А. Романькову [4] в 2004 г. установить критерий обратимости эндоморфизма алгебры A_n.

Уже краткий обзор указывает на трудность получения результатов в этом направлении и на необходимость разработки новых подходов.

В 1936 году Ф. Холл [11] ввёл важные функции на конечных группах G, исследуя гомоморфизмы свободных групп на n-порождённые группы. Он называет n-базой конечной группы G всякий упорядоченный порождающий набор n её элементов. Число всех n-баз группы G обозначает через $\varphi_n(G)$, называя φ_n n-й обобщённой функцией Эйлера. (Её называем также функцией Эйлера-Холла.) Очевидно, когда G — циклическая группа, $\varphi_1(G)$ совпадает со значением на $|G|$ обычной теоретико-числовой функции Эйлера.

С другой стороны, в [11] доказано существование для любой (известной) конечной простой неабелевой группы G и натурального числа n наибольшего числа $d = d_n(G)$ такого, что прямая степень G^d порождается n элементами. Там же установлена взаимосвязь введённых функций: $\varphi_n(G) = d_n(G) \cdot |\operatorname{Aut} G|$.

С. А. Сыскин записал в Коуровской тетради вопрос вычисления значений $d_2(G)$ для конечных простых групп G [1, вопрос 12.86].

Конечно, для чисел $d_2(G)$ единообразную формулу можно ожидать лишь для отдельных классов групп. Более естественна, в целом, гипотеза Уайголда:

Если G — конечная простая неабелева группа, то

$$d_2(G) \geq \sqrt{|G|} \qquad [1, вопрос 17.116].$$

В работах Эрфаниана, Реза, Мароти и Тамбурини гипотеза Уайголда, по существу, изучена.

Числа $d_2(G)$ изучались для конечных простых групп лиева типа ранга 1. Их рекуррентное описание для групп Сузуки ${}^2B_2(2^m)$ и групп $PSL_2(2^m)$ получили Н.М. Сучков и Д.М. Приходько [5]. Числа $\varphi_2(G)$ вычислены Ф. Холлом в [11] явно для групп $PSL_2(q)$ с простыми q (как и для некоторых групп подстановок малых степеней); для нечетных q их изучал Д. М. Приходько. Случай оставшихся групп Ри $^2G_2(q)$ и унитарных групп $PSU_3(q^2)$ мало изучен; они отличаются тем, что в них существуют неразрешимые подгруппы с неединичным разрешимым радикалом [2].

Л. Пыбер ввёл функцию $k(G)$ числа классов сопряженных элементов конечной группы G и для силовских подгрупп P_i, $|G| = |P_1||P_2| \dots |P_r|$, высказал гипотезу $k(G) \leq k(P_1)k(P_2) \dots k(P_r)$ (см. [1, Вопрос 14.76]).

Цель диссертации. Целью является разработка нового подхода изучения автоморфизмов свободных ассоциативных алгебр и исследование вопросов С. А. Сыскина, Дж. Уайголда и Л. Пыбера в классе конечных простых групп лиева типа ранга 1 (Коуровская тетрадь [1], вопросы 3.3, 12.86, 14.76, 17.116).

Методы исследования. Используются классические методы теории групп и алгебр. Разрабатывается новый подход к исследованию вопроса об автоморфизмах свободных ассоциативных алгебр.

Научная новизна и практическая значимость. Все основные результаты являются новыми. Работа носит теоретический характер.

Аппробация диссертации. Результаты диссертации аппробировались на международной школе-конференции по теории групп (Челябинск, 2008) и на международных конференциях «Алгебра, логика и приложения» (Красноярск, 2010), «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009, 2012), «Алгебра и линейная оптимизация» (Екатеринбург, 2012).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [18]-[22]; статьи [20], [21] и [22] входят в издания из перечня ВАК.

Структура диссертации. Диссертация изложена на 59 страницах. Она состоит из введения, двух глав и списка литературы, состоящего из 50 наименований. Номер леммы, теоремы, и др. включает последовательно номер главы, параграфа и порядковый номер в параграфе.

Содержание диссертации.

Основные результаты диссертации направлены на исследование известных функций на группах лиева типа ранга 1 и на исследование вопросов об автоморфизмах свободных алгебр. К основным результатам диссертации относятся следующие:

- найдены оценки n-й функции Эйлера-Холла d_n на группах лиева типа ранга 1, которые при $n = 2$ подтверждают гипотезу Уайголда, и для тех же групп подтверждена гипотеза Пыбера;

- вычисление функции d_2 на группах завершено на группах Ри, а для оставшихся (унитарных) групп лиева типа ранга 1 редуцировано к перечислению пар элементов из подгрупп с неединичным разрешимым радикалом;

- вопрос о диких автоморфизмах свободной ассоциативной алгебры редуцирован к аналогичным вопросам для идеала R многочленов с нулевым свободным членом и фактор-алгебр R/R^k; автоморфизмы изучены по модулю R^k, $k \leq 4$.

В первой главе приводится постановка основных задач диссертации. Прежде всего, они связаны с вопросами из Коуровской тетради [1]: вопросы 12.86, 14.76 и 17.116 о функциях на конечных группах и вопрос 3.3 об автоморфизмах свободной алгебры (с единицей) над полем.

Вопрос 3.3 сводится к вопросу о существовании и выявлению диких автоморфизмов алгебры многочленов над полем от некоммутативных переменных. В § 1.1 исследуется его редукция к аналогичным вопросам для идеала R многочленов с нулевым свободным членом и нильпотентных фактор-алгебр R/R^k, $k = 2, 3, \dots$.

Каждый автоморфизм φ алгебры A_n однозначно определяет константы $c_i \in F$ такие, что

$$\varphi(x_i) = c_i \mod R, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

С другой стороны, константы $c_i \in F$ определяют автоморфизм

$$(x_1 - c_1,\ x_2 - c_2,\ \dots x_n - c_n). \tag{1}$$

Умножая на него φ, получаем автоморфизм, индуцирующий автоморфизм $\overline{\varphi}$ идеала R.

Осноными в § 1.1 являются следующие две теоремы.

Теорема 1.1.1 *а) Автоморфизм φ алгебры A_n является диким тогда и только тогда, когда диким является автоморфизм $\overline{\varphi}$ идеала R, причем*

$$\overline{\operatorname{Aut} A_n} = \operatorname{Aut} R, \qquad \bigcap_{k=1}^{\infty} R^k = 0.$$

б) Если автоморфизм идеала R индуцирует дикий автоморфизм какой-либо фактор-алгебры R/R^k $(k > 1)$, то он является диким.
в) Каждый автоморфизм алгебры A_n с точностью до умножения на ручной действует тождественно по модулю R^2.

Для произвольных констант

$$\alpha_{ij}, \alpha_i, \alpha'_i, \beta_{ij}, \beta_i, \beta'_i, \gamma_{ij}, \gamma_i, \gamma'_i, \delta_i, \alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma' \in F$$

выделим следующие эндоморфизмы алгебры A_n:

$$(x_1 + \sum_{i,j=2}^{n}(\alpha_{ij}x_1x_ix_j + \beta_{ij}x_ix_1x_j + \gamma_{ij}x_ix_jx_1), x_2 +$$

$$\sum_{i=3}^{n}(\alpha_i x_1x_2x_i + \alpha'_i x_2x_1x_i + \beta_i x_1x_ix_2 + \beta'_i x_2x_ix_1 + \gamma_i x_ix_1x_2 + \gamma'_i x_ix_2x_1)$$
$$+\delta_1 x_1^2x_2 + \delta_2 x_1x_2x_1 + \delta_3 x_2x_1^2, x_3 + \alpha x_1x_2x_3 + \alpha' x_1x_3x_2 + \beta x_2x_1x_3$$
$$+\beta' x_2x_3x_1 + \gamma x_3x_1x_2 + \gamma' x_3x_2x_1, x_4, \ldots, x_n), \tag{2}$$

$$(x_1 + \sum_{i=2}^{n}(\alpha_i x_1x_i + \beta_i x_ix_1), x_2 + \alpha x_2x_1 + \beta x_1x_2, x_3, \ldots, x_n). \tag{3}$$

Теорема 1.1.2 *Всякий автоморфизм φ алгебры A_n над алгебраически замкнутым полем, с точностью до умножения на ручной автоморфизм, совпадает по модулю R^3 с эндоморфизмом* (3)*. Если φ единичен по модулю R^3, то он совпадает по модулю R^4 с эндоморфизмом* (2)*, с точностью до умножения на ручной автоморфизм.*

Теоремы 1.1.1 и 1.1.2 опубликованы в совместной работе [19] и доказаны в нераздельном соавторстве.

В § 1.3 подтверждается на конечных группах лиева типа ранга 1 гипотеза Л. Пыбера [1, Вопрос 14.76]. Он ввёл функцию $k(G)$ числа классов сопряженных элементов конечной группы G и высказал оценку $k(G) \leq k(P_1)k(P_2)\dots k(P_r)$ при $|G| = |P_1||P_2|\dots|P_r|$, где P_i — силовские подгруппы.

Обозначим $kp(G) = k(P_1)k(P_2)\dots k(P_r)$. В § 1.3 доказана

Теорема 1.3.1. *Имеют место неравенства:*

$$k(PSL_2(q)) \leq q(1 + 1/2d) \leq |PSL_2(q)|/2 \leq kp(PSL_2(q));$$

$$k(Sz(q)) \leq q^2 + 3q + 1 \leq \frac{|Sz(q)|}{q} \leq kp(Sz(q));$$

$$k(Re(q)) \leq q^3 + \frac{33}{8}q + \frac{9}{8} \leq \frac{|Re(q)|}{q^2} \leq kp(Re(q));$$

$$k(PSU_3(q^2)) \leq q^4 + 5q^3 + 2q^2 - 3q + 1 \leq \frac{|PSU_3(q^2)|}{36q^2} \leq kp(PSU_3(q^2)).$$

В § 1.2 приводится теорема Холла, показывающая существование наибольшего числа $d = d_n(G)$ для конечной простой неабелевой группы G такого, что d-я прямая степень группы G порождается n элементами. Теорема 1.4.1 в § 1.4 даёт оценку функции d_n на группах G лиева типа ранга 1, подтверждающую при $n = 2$ на них гипотезу Уайголда [1, вопрос 17.116].

Теорема 1.4.1 *Пусть G есть простая конечная группа лиева типа ранга 1. Тогда*

$$d_n(G) \geq |G|^{n-\frac{3}{2}} \qquad (n \geq 2).$$

Теоремы 1.3.1 и 1.4.1 опубликованы автором в [18] и [20].

Вопрос о вычислении второй функции Эйлера-Холла d_2 на простых конечных неабелевых группах ([1], вопрос 12.86 С. А. Сыскина) изучается в этой главе в классе групп лиева типа ранга 1. Ранее он был полностью изучен в статье Н. М. Сучкова и Д. М. Приходько [5] для групп Судзуки ${}^2B_2(q)$ и групп $PSL_2(q)$ с четным q. Для групп $PSL_2(q)$ с нечётным q его изучал Д. М. Приходько.

Полностью этот вопрос для групп Ри ${}^2G_2(q)$ завершает доказываемая в § 2.3

Теорема 2.3.1 *Пусть $Re(q)$ ($q = 3^n,\ n > 1$) — конечная простая группа Ри типа ${}^2G_2$. Тогда для простых чисел n имеем $d_2(Re(q)) = (1/n) \cdot \rho(q)$, где*

$$\rho(q) = (q-3)\left(q^6 + 2q^5 + 6q^4 + 18q^3 + 53q^2 + 160q + 464\right).$$

Если число n – составное, то

$$d_2(Re(q)) = \frac{1}{n}[\rho(q) - \sum_{t|n,\ n>t>1} t \cdot d_2(Re(3^t))].$$

Теорему получили в нераздельном соавторстве автор и Д. В. Левчук [21].

В § 2.1 приводятся известные подгрупповые описания групп Ри ${}^2G_2(q)$ и проективных специальных унитарных групп $PSU_3(q^2)$, необходимые для рассмотрения вопроса Сыскина для этих групп. Отметим, что в отличие от групп Судзуки и $PSL_2(q)$, группы Ри и группы $PSU_3(q^2)$ обладают неразрешимыми подгруппами с неединичным разрешимым радикалом.

По аналогии с группами Ри, в § 2.2 для унитарных групп устанавливается редукционная теорема. Пусть W — множество пар элементов группы $G(q) = PSU_3(q^2)$ (аналогично, $\widehat{W}$ в $\widehat{G}(q) = PU_3(q^2)$), лежащих в подгруппе из $G(q)$ (соответственно, из $\widehat{G}(q)$) с неединичным разрешимым радикалом. Положим

$$\delta = \text{НОД}(q+1, 3), \qquad \varepsilon = 2 - \text{НОД}(q, 2),$$

$$s(q) = 38\delta_1 + 212\delta_2 + 2406\delta_3 + 114\delta_4,$$

где $\delta_i = 1$ или 0, соответственно, когда верно или не верно i-е условие:

1) $q = \pm 1 \mod 10$; 2) $q = 11, 29 \mod 30$;

3) $p = 5$ и n нечетно; 4) $q = 3, 5, 13 \mod 14$.

Теорема 2.2.1 *Пусть $G(q) = PSU_3(q^2)$, $\widehat{G}(q) = PU_3(q^2)$. Верны рекуррентные соотношения:*

$$\varphi_2(G(q)) = |G(q)|^2 - |W| - |G(q)|\Bigg(\delta\varepsilon \cdot \sum_{GF(m)\subset GF(q)} \frac{\varphi_2(PGL_2(m)) + \varphi_2(PSL_2(m))}{|PGL_2(m)|} +$$
$$+ \sum_{(GF(q):GF(m))|r} \frac{\varphi_2(G(m))}{|G(m)|} + \frac{\delta-1}{2} \cdot \sum_{3(GF(q):GF(m))|r} \frac{\varphi_2(\widehat{G}(m))}{|\widehat{G}(m)|} + \delta \cdot s(q)\Bigg),$$

$$\varphi_2(\widehat{G}(q)) = |\widehat{G}(q)|^2 - |\widehat{W}| - |\widehat{G}(q)|\Big(\varepsilon \sum_{GF(m)\subset GF(q)} \frac{\varphi_2(PGL_2(m)) + \varphi_2(PSL_2(m))}{|PGL_2(m)|} + \\ + \sum_{(GF(q):GF(m))|r} \frac{\varphi_2(G(m)) + \varphi_2(\widehat{G}(m))}{|\widehat{G}(m)|} + s(q)\Big).$$

Теорема опубликована автором в [22].

Автор благодарен научному руководителю профессору Левчуку Владимиру Михайловичу за постановку задачи и внимание к работе. Признателен сотрудникам кафедры алгебры и математической логики и Института математики СФУ за хорошие условия работы над диссертацией.

Список литературы

[1] Нерешенные задачи теории групп. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск:НГУ, 2010. 219 с.

[2] *Левчук Д.В.* Функции Ф. Холла на группах лиева типа ранга 1 // Владикавказский математический журнал, 2008. Т. 10. №1. С. 37-39.

[3] *Приходько Д.М.* О числе пар порождающих простой конечной группы // V Международная конф. "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения 2003. Тула: ТГПУ. С. 185-186.

[4] *Романьков В.А.* Теорема об обратной функции для свободных ассоциативных алгебр // Сиб. мат. журн., 2004. Т. 45. №5. С. 1178-1183.

[5] *Сучков Н.М., Приходько Д.М.* О числе пар порождающих групп $L_2(2^m)$ и $Sz(2^{2k+1})$ // Сиб. мат. журн., 2001. Т. 42. №5. С. 1162-1167.

[6] *Умирбаев У.У.* Определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов алгебры многочленов и дикие автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр // Докл. Академии Наук, 2006. Т. 407. №3. С. 319-324.

[7] *Cohn P. M.* Free rings and their relations, 2nd Ed. London: Academic Press, 1985, 608 p.

[8] *Erfanian A., Rezaei R.* On the growth sequence of PSp(2m,q) // Intern. J. Algebra, 2007. Vol. 1. Issue 2. P. 51-62.

[9] *Erfanian A.* A note on growth sequences of alternating groups // Arch. Math., 2002. Vol. 78. Issue 4. P. 257-262.

[10] *Erfanian A.* A note on growth sequences of PSL(m,q) // Southeast Asian Bull. Math., 2005. Vol. 29. Issue 4. P. 697-713.

[11] *Hall Ph.* The Eulerian functions of a group // Quart. J. Math., 1936. Vol. 7. P. 134–151.

[12] *Maroti A., Tamburini M.C.* A solution to a problem of Wiegold // Comm. in Algebra, 2013. Vol. 41. Issue 1. P. 34-49.

[13] *Shestakov I. P., Umirbaev U. U.* The Nagata automorphism is wild // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 2003. Vol. 100. Issue 22. P. 12561-12563.

[14] *Wiegold J.*. Growth sequence of finite groups // J. Austral. Math. Soc., 1974. Vol. 17. P. 133-141.

[15] *Wiegold J.*. Growth sequence of finite groups // J. Austral. Math. Soc., 1975. Vol. 20. P. 225-229.

[16] *Wiegold J.*. Growth sequence of finite groups // J. Austral. Math. Soc., 1978. Vol. 25. P. 142-144.

[17] *Wiegold J.*. Growth sequence of finite groups // J. Austral. Math. Soc., 1980. Vol. 29. P. 14-16.

Список публикаций по теме диссертации

[18] *Ю.Ю. Ушаков.* Оценка числа классов сопряженных элементов в группах лиева типа ранга 1. // Алгебра и теория моделей., Новосибирск: НГТУ, 2005, Т. 5. С. 229-236.

[19] *C.K. Gupta, V.M. Levchuk, Yu.Yu. Ushakov.* Hypercentral and monic automorphisms of classical algebras, rings and groups. // Journal of SFU., Phys&Maths., 2008. Vol. 4. Issue 1. P. 380-390.

[20] *Ю.Ю. Ушаков.* Оценка функций Ф. Холла на группах лиева типа ранга 1 // Владикавказский мат. журн., 2011. Т. 14. №2. С. 50-56.

[21] *Д.В. Левчук, Ю.Ю. Ушаков.* Функции Эйлера-Холла на группах Ри // Сиб. мат. журн., 2013. Т. 54. №2. С. 420-431.

[22] *Ю.Ю. Ушаков* Функции Эйлера-Холла на группах лиева типа ранга 1 // Известия Иркутского государственного университета, 2013. Т. 6. №1. С. 78-84.

[23] *Ю.Ю. Ушаков* Гипотеза Уайголда для групп лиева типа ранга 1 // Тезисы международной конференци «Алгебра, логика и приложения». Красноярск: СФУ, 2010. С. 101-102.

[24] *Ю.Ю. Ушаков* Функции Эйлера-Холла на группах лиева типа ранга 1 // Тезисы международной конферении «Алгебра и линейная оптимизация». Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 2012. С. 162.

[25] *Ю.Ю. Ушаков* Функции Эйлера-Холла на группах лиева типа ранга 1 // Тезисы международной конференции «Мальцевские чтения». ИМ СО РАН, Новосибирск, 2012. С. 84.