УДК 517.55

На правах рукописи

Шестаков Иван Вениаминович

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ КОГОМОЛОГИЙ ДОЛЬБО

01.01.01 – математический анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2009

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Шлапунов Александр Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник Киселев Олег Михайлович
	доктор физико-математических наук, профессор Кытманов Александр Мечиславович
Ведущая организация:	Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск

Защита диссертации состоится 10 сентября 2009 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан 4 августа 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н. А. Бушуева

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Комплекс Дольбо являлся предметом изучения математиков на протяжении двадцатого века и продолжает по сей день притягивать внимание исследователей. Задача о разрешимости $\overline{\partial}$-уравнения часто воспринималась как «основная задача комплексного анализа»[1].

Ее изучали такие известные ученые, как Дольбо, Грауэрт, Морри, Кон, Хермандер, Либ, Андреотти, Хилл, Хенкин.

Как и общая задача аналитического продолжения, многие задачи, связанные с комплексом Дольбо, оказались некорректными[2], в том числе задача Коши. Развитие специальных методов, позволяющих работать с некорректными задачами Коши, стимулировалось запросами жизни. Такие задачи вставали в гидродинамике, в теории передачи сигнала, в томографии, в геологоразведке[3]. А. Н. Тихоновым, М. М. Лаврентьевым и др. была разработана концепция условно-корректных задач.

Типичным примером некорректной задачи является задача аналитического продолжения голоморфной функции с куска границы области в $\mathbb{C}^n$ во всю область, которую можно толковать как однородную задачу Коши на первом шаге комплекса Дольбо. Исследования этой задачи протекали в двух основных руслах: поиск разумных условий разрешимости и вывод формул для решений. Первые результаты в направлении построения решений в середине прошлого века были получены Карлеманом[4], дальнейшие продвижения сделаны Голузиным и Крыловым[5], Лаврентьевым[6]. Моногра-

[1]Хенкин Г. М. *Метод интегральных представлений в комплексном анализе*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, М.:ВИНИТИ, Т. 7., 1985, С. 23–124.

[2]Hadamard J. *Le problème de Cauchy et les equations aux derivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris, Gauthier - Villars, 1932.

[3]Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* М.: Наука, 1980.

[4]Carleman T. *Les Fonctions Quasianalytiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1926.

[5]Голузин Г. М., Крылов В. И. *Обобщенная формула Carleman'a и ее приложение к аналитическому продолжению функций*// Матем. Сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.

[6]Лаврентьев М. М. *О задаче Коши для уравнения Лапласа*// Известия АН СССР. Сер. Мат. 1956. Т. 20. С. 819–842.

фия Айзенберга[7] представляет собой достаточно полный на начало девяностых годов обзор по формулам Карлемана.

За последние годы опубликован ряд работ, обобщающих идеи Айзенберга и Кытманова[8], реализованные ими для голоморфных функций (об этом, а также о других подходах к решению некорректной задачи Коши см. фундаментальный труд Тарханова об однородной задаче Коши для эллиптических уравнений[9]). Именно, результаты об условиях разрешимости неоднородной задачи Коши в терминах продолжимости некоторых потенциалов из меньшей области в большую получены для операторов с инъективным символом. Также движение шло в направлении расширения функциональных пространств: исследования этой задачи проводились в пространствах Соболева положительной гладкости, в пространстве Лебега и в пространствах Соболева отрицательной гладкости, что позволило существенно расширить класс правых частей и данных Коши ([2], [3], [4], [5]).

Обобщения задачи аналитического продолжения голоморфной функции с куска границы области как однородной задачи Коши на первом шаге комплекса Дольбо возможны не только в направлениях неоднородности задачи, рассмотрения класса операторов с инъективным символом и использования более широких пространств, но и путем ее постановки на других шагах, т.е. рассмотрения задачи восстановления $\overline{\partial}$-замкнутой (p,q)-дифференциальной формы в области по ее значениям на части границы этой области. Для достижения единственности разумно искать решение по модулю точной формы, другими словами, ставить задачу Коши для когомологий Дольбо. Голоморфные функции есть не что иное, как когомологии комплекса Дольбо на нулевом шаге. Рассмотрение таких задач восходит к работе Андреотти и Хилла[10], в которой вопросы существования

[7] Айзенберг Л. А. *Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения.* Новосибирск: Наука, 1990.

[8] Айзенберг Л. А., Кытманов А. М. *О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на куске ее границы*// Матем. Сб. 1991. Т. 182, № 4. С. 490–507.

[9] Tarkhanov N. N. *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations.* Berlin, Akademie Verlag, 1995.

[10] Andreotti A., Hill C. D. *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part 1: Reduction to vanishing*

и единственности сводились к тривиальности некоторых специальных когомологий комплекса Дольбо. Также был разработан абстрактный метод построения формул Карлемана для решения задачи Коши для когомологий Дольбо[11]. Появление свежей работы, один из соавторов которой, Хилл[12], является экспертом в этой области, свидетельствует о неугасающем интересе к такого рода задачам.

Цель работы. Целью настоящей диссертации является изучение условий разрешимости задачи Коши для когомологий комплекса Дольбо в областях определенного вида в пространствах распределений и построение формул Карлемана для ее решения. Под задачей Коши в широком смысле понимается задача восстановления функции u в области по значениям $\overline{\partial} u$ в области и ее значениям на кусочке границы области.

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

— найдены условия разрешимости системы Коши-Римана в шаровом слое в $\mathbb{C}^n$ в терминах гармонического пространства;

— охарактеризованы первые L^2-когомологии комплекса Дольбо в шаровом слое: при $n = 2$ в них построен ортогональный бесконечный базис, при $n > 2$ установлена их тривиальность;

— построена формула Карлемана для решения задачи Коши для когомологий Дольбо в областях, у которых дополнение к куску границы с данными Коши линейно вогнуто;

— доказана теорема единственности для задачи Коши для когомологий Дольбо в специальных областях;

— подобраны подходящие пространства Соболева отрицательной гладкости для постановки неоднородной задачи Коши для системы Коши-Римана и сформулированы условия разрешимости этой задачи;

---

theorems// Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. 1972. V. 26, № 3. P. 325–363.

[11]Nacinovich M., Schulze B.-W., Tarkhanov N. *On Carleman formulas for the Dolbeault cohomology*// Ann. Univ. Ferrara, Sez.VII, Sc. Mat. 1999. Suppl. Vol. XLV. P. 253–262.

[12]Brinkschulte J., Hill C. D. *On the Cauchy problem for the $\overline{\partial}$ operator*// Ark. Mat. 2008.

— выведена формула Карлемана для восстановления функции u, принадлежащей одному из отрицательных пространств Соболева в области, по значениям $\overline{\partial} u$ в области и по ее значениям на части границы области.

Точные формулировки основных результатов работы приведены ниже.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит, в основном, теоретический характер, однако просматривается и ее практическое применение. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании нелинейных задач Коши, линеаризация которых как раз приводит к неоднородной линейной задаче. Поскольку комплекс Дольбо является одним из модельных примеров эллиптического комплекса, то некоторые заключения могут быть перенесены на более общие комплексы. Кроме того, задача Коши для системы Коши-Римана естественно возникает на практике: в гидродинамике, в теории передачи сигнала и т.д. Принципиальным моментом является то, что выведены не только условия разрешимости, но и формулы для решения в виде ряда. Это позволяет строить удовлетворительные приближенные решения путем суммирования конечного числа членов ряда. Таким образом, представленные достижения могут быть полезными при решении конкретных физических задач. Более того, материал диссертации может служить основой для спецкурсов, предназначенных для специализирующихся в области анализа студентов и аспирантов.

Методы исследования достаточно разнообразны. При работе с областями типа шарового слоя основным приемом является разложение элементов подходящего пространства в ряд по однородным гармоническим функциям, образующим базис на сфере. При этом важна специфичность области, гарантирующая наличие упомянутого базиса. Лежащим в основе построения формул Карлемана в главе 2 можно назвать метод Мергеляна и Лаврентьева, состоящий в приближении ядра интегрального представления на части границы, если необходимо восстановить функцию в области по ее значениям на дополнении этого множества границы. В основе главы 3 лежат идеи и методы, разработанные Айзенбергом и Кытмановым[8] для задачи аналитического продолжения голоморфной функции в область с кусочка ее границы. При работе на произвольных шагах комплекса Дольбо неоценимой оказалась формула Коппельмана, которая в частном случае также превращается в формулу Мартинелли-Бохнера. Таким образом, в данном исследовании на сцену выходит метод интегральных представлений. Более того, привлечен мощный аппарат функционального анализа, в частности, теория гильбертовых пространств, а также техника базисов со свойством двойной ортогональности для построения формул для решения.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на студенческой конференции (Красноярск, апрель 2005), на конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, апрель 2006), на Международной конференции «Анализ и геометрия на комплексных многообразиях» (Красноярск, август 2007), на Международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященной 75-летию академика М. М. Лаврентьева (Новосибирск, август 2007), на Международной конференции «Анализ, уравнения в частных производных и приложения», посвященной семидесятилетию В. Г. Мазьи (Рим, Италия, июль 2008), на Международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященной 100-летию со дня рождения С. Л. Соболева (Новосибирск, октябрь 2008), на семинаре профессора Н. Тарханова «Нелинейный анализ» (Потсдам, Германия, 2008-2009), на городском семинаре по многомерному комплексному анализу под руководством А. М. Кытманова и А. К. Циха (Красноярск, 2005-2009).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти статьях и в пяти тезисах международных конференций. Их список приведен в конце автореферата. Работы [1], [4], [5] входят в перечень ведущих научных изданий, определенный Высшей аттестационной комиссией, а статья [4] написана без соавторов. Все совместные работы написаны в нераздельном соавторстве; вклад соавторов в них равноценен.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, разделенных на параграфы, и заключения. Она снабжена оглавлением и списком литературы из 60 наименований. Общий объем диссертации составляет 99 страниц.

Содержание диссертации

Во введении дается краткое изложение содержания диссертации, формулируются ее основные результаты, а также определяется и оценивается их место среди уже известных фактов.

В главе 1 исследуется разрешимость $\overline{\partial}$-уравнения на первом шаге комплекса Дольбо в шаровом слое, причем правая часть берется из пространства Лебега L^2. Как уже отмечено, в двадцатом столетии основная деятельность вокруг этого уравнения была направлена на выделение условий, при которых когомологии Дольбо тривиальны (или, по крайней мере, конечномерны).

Один из способов исследования $\overline{\partial}$-уравнения принадлежит специалистам по дифференциальным уравнениям Морри[13], Кону[14,15], Хермандеру[16]. Путем получения априорных L^2-оценок они доказали существование решения $\overline{\partial}$-уравнения, ортогонального подпространству $\overline{\partial}$-замкнутых форм, в классе L^2 в произвольной ограниченной псевдовыпуклой области, если правая часть также из L^2. Для строго псевдовыпуклых областей имеются явные формулы для решения этих уравнений, позволяющие получить оценки ре-

[13] Morrey C. B., Jr. *The analytic embedding of abstract reanalytic manifolds*// Ann. Math. 1958. V. 68, № 1. P. 159–201.

[14] Kohn J. J. *Harmonics integrals on strongly pseudo-convex manifolds. I*// Ann. Math. 1963. V. 78, № 1. P. 112–148.

[15] Kohn J. J. *Harmonics integrals on strongly pseudo-convex manifolds. II*// Ann. Math. 1964. V. 79, № 3. P. 450–472.

[16] Hörmander L. *L^2-estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*// Acta Math. 1965. V. 113, № 1-2. P. 89–152.

шения в равномерной и некоторых других метриках[17,18].

Еще одним подходом к исследованию разрешимости $\overline{\partial}$-уравнения можно назвать использование вспомогательной $\overline{\partial}$-задачи Неймана-Спенсера. Реализуя эту идею, Кон в семидесятых годах прошлого века получил результаты о разрешимости $\overline{\partial}$-уравнения в строго псевдовыпуклых областях с гладкой границей и в слабо псевдовыпуклых областях с вещественно аналитической границей в n-мерном комплексном пространстве[19,20].

Таким образом, успешное изучение когомологий Дольбо, как правило, достигалось наложением некоторых геометрических требований на выпуклость области. Разрешимость $\overline{\partial}$-уравнения в более общих областях при этом практически не исследовалась, поскольку их рассмотрение открывало дорогу для появления бесконечномерных и даже неотделимых когомологий. Так как шаровой слой не является псевдовыпуклой областью, то результаты первой главы можно интерпретировать как продвижение в данном направлении.

Как известно, комплекс Дольбо субэллиптичен, поэтому не приходится надеяться на разрешимость системы Коши-Римана в пространстве Соболева $H^1(D)$ для всех лебеговских правых частей[21]. Мы определяем пространство $D(\overline{\partial})$ для решений как пополнение $H^1(D)$ по норме графика (ср. с работой Хермандера[22]). В качестве убедительных аргументов, объясняющих такой выбор, можно назвать возможность его характеризации и непрерывность оператора $\overline{\partial}$ в таких пространствах, что немаловажно при

[17]Хенкин Г. М. *Интегральное представление функций в строго псевдовыпуклых областях и приложения $\overline{\partial}$-задаче*// Матем. Сб. 1970. Т. 82, № 2. С. 300–308.

[18]Grauert H., Lieb I. *Das Ramirersche Integral und die Lösung der Gleichung $\overline{\partial}f = \alpha$ im Bereich der beschränkten Formen*// Rice Univ. Stad. 1970. V. 56, № 2. P. 29–50.

[19]Folland G. B., Kohn J. J. *The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex.* Princeton, Princeton University Press, 1972.

[20]Kohn J. J. *Subellipticity of the $\overline{\partial}$-Neuman problem on pseudoconvex domains: sufficient conditions*// Acta Math. 1979. V. 142, № 1-2. P. 79–122.

[21]Kerzman N. *Hölder and L^p-estimates for solutions of $\overline{\partial}u = f$*// Comm.Pure and Appl. Math. 1971. V. 24, № 3. P. 301–379.

[22]Hörmander L. *L^2-estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*// Acta Math. 1965. V. 113. № 1-2. P. 89–152.

исследовании[23]. Пусть $\Lambda^{p,q}$ – расслоение дифференциальных форм бистепени (p,q), а $\mathfrak{S}(D,\Lambda^{p,q})$ – пространство дифференциальных форм бистепени (p,q) с коэффициентами класса $\mathfrak{S}$ в области $D \subset\subset \mathbb{C}^n$. Итак, основная задача первой главы такова.

Задача 1.2.1. *Пусть $f \in L^2(D,\Lambda^{0,1})$. Найти решение уравнения $\overline{\partial}u = f$ в классе $D(\overline{\partial})$.*

Обозначим через $\overline{\partial}^*$ формально сопряженный к $\overline{\partial}$ оператор. Введем гармоническое пространство $\mathcal{H}^1(D)$, состоящее из всех дифференциальных форм $g \in L^2(D,\Lambda^{0,1})$, для которых $\overline{\partial}_1 g = 0$ в D, $\overline{\partial}^* g = 0$ в D (в смысле распределений) и комплексная нормальная часть g равна нулю на ∂D. Фактически это пространство характеризует ортогональное дополнение образа оператора $\overline{\partial}$, представляя первые когомологии комплекса Дольбо. Сформулируем условие разрешимости задачи 1.2.1, полученное в главе 1.

Теорема 1.5.1. *Пусть D – шаровой слой в $\mathbb{C}^n$. Задача* 1.2.1 *разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

1) $\overline{\partial}_1 f = 0$;

2) $f \perp \mathcal{H}^1(D)$.

Эрмитова структура используемых пространств позволяет применять методы теории гильбертовых пространств, а специфика области дает возможность работать с разложениями в ряды Лорана по однородным гармоническим функциям. Полученный результат на самом деле означает нормальную разрешимость задачи 1.2.1. Отметим, что при доказательстве упомянутой теоремы также построено решение $\overline{\partial}$-уравнения в виде ряда, что может быть использовано для получения приближенного решения в прикладных задачах.

Исходя из теоремы 1.5.1, для овладения исчерпывающей информацией о разрешимости $\overline{\partial}$-уравнения в шаровом слое остается охарактеризовать гар-

[23]Friedrichs K. *The identity of weak and strong extensions of differential operators*// Trans. Amer. Math. Soc. 1944. V. 55, № 1. P. 132–151.

моническое пространство $\mathcal{H}^1(D)$. Пусть $z_1, ..., z_n$ – координаты в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. В данной работе получен следующий результат.

Теорема 1.6.1. *Пусть $D = B_R \setminus \overline{B}_r$ – шаровой слой в $\mathbb{C}^2$. Тогда гармоническое пространство $\mathcal{H}^1(D)$ бесконечномерно и дифференциальные формы вида*

$$\frac{-\overline{z}_2 d\overline{z}_1 + \overline{z}_1 d\overline{z}_2}{|z|^2} \frac{\overline{z}_1^{\beta_1} \overline{z}_2^{\beta_2}}{|z|^{2|\beta|+2}}, \quad \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{Z}_+,$$

образуют в нем L^2-ортогональный базис.

Отметим, что первые когомологии комплекса де Рама в области с выколотым нулем одномерны, их базис образует известная форма Пуанкаре. Можно усмотреть также сходство обсуждаемых комплексов: размерность первых когомологий и пространства решений исходного оператора совпадают для каждого из этих комплексов. Для комплекса де Рама она одномерна, а для комплекса Дольбо – бесконечномерна. Комплекс Дольбо не такой простой, как комплекс де Рама, на нем можно проследить некоторые интересные эффекты, в то же время он не так сложен, как общие системы.

Используемые нами методы также помогают извлечь тривиальность рассматриваемых когомологий при $n \geq 3$.

Теорема 1.6.2. *Пусть D – шаровой слой в $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$. Тогда гармоническое пространство $\mathcal{H}^1(D)$ тривиально.*

Подобные результаты о тривиальности когомологий Дольбо в областях, полученных удалением из выпуклой области выпуклой подобласти, в пространстве функций, бесконечно гладких вплоть до границы, представлены Ранге[24].

Глава 2 посвящена формулам Карлемана для когомологий Дольбо в областях с вогнутой частью границы. Как упоминалось, формулы Карлемана позволяют восстанавливать значения функции в области по ее значениям на части границы. При этом важную роль часто играет геометрия обла-

[24] Range R. M. *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables.* New York, Springer-Verlag, 1986.

сти и выбор части границы, на которой заданы данные Коши. Поскольку формулы Карлемана имеют также прикладное значение, то необходимо стремиться к их конструктивности и простоте.

Итак, обсуждается задача восстановления класса когомологий $\overline{\partial}$-замкнутой (p,q)-формы в области по определяемому ей классу когомологий на части границы области. Абстрактная схема построения формулы Карлемана для этого случая предложена Начиновичем и др.[11] Хотелось получить конкретные примеры таких формул. Далеко не всегда наличие общей теории в том или ином направлении закрывает все вопросы. Часто рассмотрение примеров требует больших усилий и преодоления многих деталей, а теория может лишь подсказать направление дальнейшего пути, затмевая все тонкости.

Основным итогом главы 2 является формула Карлемана, восстанавливающая по модулю точной формы значения $\overline{\partial}$-замкнутой (p,q)-формы в области по ее классу когомологий на части границы области, дополнение к которой линейно вогнуто. Приведем полученный результат в несколько частном случае, тем не менее отражающим суть этой формулы. Обозначим через Γ открытое связное подмножество границы области $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей.

Теорема 2.4.1. *Пусть часть границы $\partial D \setminus \Gamma$ области $D \subset\subset \mathbb{C}^n$ является частью сферы $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| = R\}$, причем сама D не заходит внутрь шара $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R\}$. Тогда для $\overline{\partial}$-замкнутой в D дифференциальной формы $u \in C^1(\overline{D}, \Lambda^{p,q})$ справедлива формула*

$$\begin{aligned} u(z) \;=\; & -\int\limits_{\partial\Gamma} \tau(u) \wedge I^{(p)}_{q+2}((1-t)v_0 + tv_1) \\ & - \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Gamma} u \wedge \left(K^{(p)}_{q+1}(v_1) - \frac{(-1)^n}{|z|^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\langle \overline{z}, \zeta \rangle}{|z|^2} \right)^k \right)^n K^{(p)}_{q+1}(\overline{z}) \right) \\ & + \overline{\partial}_z \left(-\int\limits_{\partial D\setminus\Gamma} u \wedge I^{(p)}_{q+1}((1-t)v_0 + tv_1) + \int\limits_{D} u \wedge K^{(p)}_q(v_1) \right), \quad z \in D. \end{aligned}$$

В этой формулировке

$$v_0 = \frac{\overline{z}}{\langle \overline{z}, \zeta - z \rangle},\ v_1 = \frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2},$$

$K_q^p(v_1)$ – ядро Коппельмана, $K_q^p(v)$ – ядро, определяемое над кольцом функций аналогично ядру Коппельмана[11], а $I_q^{(p)}(v) = (-1)^{p+q-1} \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \rfloor K_{q-1}^{(p)}(v) dt$.

В фундаментальной книге Айзенберга[7] по формулам Карлемана не нашлось настолько простой формулы для рассматриваемого случая.

Кроме того, доказана теорема единственности для когомологий Дольбо, которая может быть сформулирована следующим образом.

Теорема 2.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.4.1. *Если $\overline{\partial}$-замкнутая в D дифференциальная форма $u \in C^1(\overline{D}, \Lambda^{p,q})$ является $\overline{\partial}_b$-точной на* Γ*, то она $\overline{\partial}$-точна в D.*

Из полученной формулы Карлемана можно извлечь интересные сведения. При $q \neq n-1$ предел в формуле исчезает и изучаемая задача Коши становится устойчивой. Этот факт немного неожиданный. Как правило, если данные Коши заданы на всей границе, то задача нормально разрешима, если же данные заданы лишь на части границы, то приходит неустойчивость. Возникновение устойчивости в нашем случае обусловлено переопределенностью системы Коши-Римана и наложенными геометрическими условиями на область.

В заключительной главе 3 рассматривается неоднородная задача Коши для оператора Коши-Римана в отрицательных пространствах Соболева. В то время как изложение второй главы было направлено на получение формул решения задачи Коши для когомологий Дольбо на произвольном шаге комплекса, содержание последней главы нацелено на работу в более общих пространствах на первом шаге комплекса. При этом сложности, возникавшие при изучении форм произвольной бистепени, сполна замещаются проблемами, появляющимися при привлечении пространств отрицательной гладкости. Как известно, функции из пространства Соболева

$H^1(D)$ обладают следами класса Лебега $L^2(\partial D)$ (и даже более узкого класса $H^{\frac{1}{2}}(\partial D)$) на границе. При использовании более широких пространств трудность возникает уже при определении значений на границе области функций, заданных в области. В этом случае приходится задействовать технику слабых предельных значений и концепцию слабого решения. Поэтому даже выбор подходящих пространств является достижением и надеждой на успешное дальнейшее исследование. Отметим, что привлечение более общих пространств существенно увеличивает класс правых частей и данных Коши рассматриваемой задачи.

Пусть $H(D, \|\cdot\|_{-s})$ обозначает пространство Соболева отрицательной гладкости[25], а $H^w_{\overline{\partial}}(D, \|\cdot\|_{-s})$ – множество всех функций u из пространства $H(D, \|\cdot\|_{-s})$ таких, что $\overline{\partial} u \in H(D, \Lambda^{0,1}, \|\cdot\|_{-s-1})$. Доказывается что, функции из $H^w_{\overline{\partial}}(D, \|\cdot\|_{-s})$ имеют слабые граничные значения на $\Gamma \subset \partial D$. Мы положим $H(D, \Lambda^{0,1}) = \cup_{s=1}^{\infty} H(D, \Lambda^{0,1}, \|\cdot\|_{-s})$. Обозначим объединение $\cup_{s=1}^{\infty} H^w_{\overline{\partial}}(D, \|\cdot\|_{-s})$ через $H_{\overline{\partial}}(D)$. Введем пространство $H^{-s}(\overline{\Gamma})$ как фактор-пространство пространства $H^{-s}(\partial D)$ по подпространству сечений, исчезающих в окрестности $\overline{\Gamma}$. Под $n(g)$ понимается комплексная нормальная часть $(0,1)$-формы g.

Теперь мы можем сформулировать задачу Коши, которая рассматривается в последней главе.

Задача 3.4.1. *По заданным $f \in H(D, \Lambda^{0,1})$ и $u_0 \in \cup_{s=1}^{\infty} H^{-s}(\overline{\Gamma})$ найти функцию $u \in H_{\overline{\partial}}(D)$ такую, что*

$$(u, \overline{\partial}^* \phi) = (f, \phi) - (u_0, n(\phi)) \text{ для всех } \phi \in C^{\infty}_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{0,1}).$$

Это есть не что иное, как слабая постановка задачи Коши на основе формулы Грина.

Пусть $F = M\tilde{u}_0 + T_D f$, где M есть преобразование Мартинелли-Бохнера[26], T_D – объемный потенциал, а $\tilde{u}_0 \in H^{-s-1/2}(\partial D)$ – некоторый пред-

[25] Schechter M. *Negative norms and boundary problems*// Ann. Math. 1960. V. 72, № 3. P. 581–593.

[26] Кытманов А. М. *Интеграл Мартинелли-Бохнера и его приложения.* Новосибирск: Наука, 1992.

ставитель класса эквивалентности, содержащего элемент $u_0 \in H^{-s-1/2}(\overline{\Gamma})$. Выберем область D^+ так, чтобы множество $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ было ограниченной областью с бесконечно гладкой границей. Основной результат завершающей главы дает условия разрешимости задачи Коши для неоднородной системы Коши-Римана в терминах гармонической продолжимости функции F из меньшей области D^+ в большую область Ω. В следующей теореме $C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma)$ обозначает пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $D \cup \Gamma$.

Теорема 3.4.2. *Задача Коши* 3.4.1 *разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие согласования*

$$(u_0, n(\overline{\partial}^* \beta)) = (f, \overline{\partial}^* \beta) \ \textit{для всех} \ \beta \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{0,2})$$

и существует гармоническая в Ω функция $\mathcal{F}$ конечного порядка роста вблизи $\partial\Omega$, совпадающая с F в D^+.

Используя касательный оператор Коши-Римана $\overline{\partial}_b$ на границе, можно переписать условие согласования в виде

$$\overline{\partial} f = 0 \text{ в } D, \qquad \overline{\partial}_b u_0 = \tau(f) \text{ на } \Gamma,$$

где $\tau(f)$ – касательная часть f на ∂D.

С помощью базисов с двойной ортогональностью $\{b_\nu\}$, представляющих собой систему функций, которые ортогональны на паре областей, одна из которых содержит замыкание другой, полученные условия разрешимости могут быть представлены в виде условия сходимости числового ряда. Кроме того, с применением этой методики построена формула Карлемана для решений задачи 3.4.1, позволяющая отыскивать приближенные решения, представляющие практический интерес. Пусть $\mathfrak{U}(\zeta, z)$ обозначает ядро Мартинелли-Бохнера в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим ядра Карлемана

$$\mathfrak{C}_N(\zeta, z) = \mathfrak{U}(\zeta, z) - \sum_{\nu=1}^{N} c_\nu(\mathfrak{U}(\zeta, \cdot)) b_\nu(z)$$

для $N \in \mathbb{N}, z \in \Omega, z \neq \zeta$.

Следствие 3.5.2. *Для всякой функции* $v \in H_{\overline{\partial}}(D, \| \cdot \|_{-s})$ *справедлива формула Карлемана*

$$\lim_{N\to\infty} \|v - v^{(N)}\|_{H_{\overline{\partial}}(D,\|\cdot\|_{-s})} = 0,$$

где

$$v^{(N)}(z) = -\int_{\partial D} \tilde{v}_0(\zeta)\mathfrak{C}_N(.,z)ds(\zeta) + \int_D \overline{\partial}v(\zeta) \wedge \mathfrak{C}_N(.,z)d\zeta,$$

а $\tilde{v}_0$ *– какое-нибудь продолжение* v *с* $\overline{\Gamma}$ *на* ∂D *в классе* $H^{-s-1/2}(\partial D)$.

При работе над диссертацией автор поддержан грантом Краевого фонда науки для молодых ученых 17G-102, грантом Сибирского федерального университета по научно-методическому проекту № 45.2007, грантом Президента РФ НШ-2427.2008.1, стипендией Президента Российской Федерации для обучения за рубежом, Deutsche Forschungsgemeinschaft в рамках проекта «Нелинейные дифференциальные уравнения с малым параметром» (GZ TA 289/4-1).

Автор глубоко признателен научному руководителю Шлапунову Александру Анатольевичу за грамотное руководство работой, за помощь и содействие в блуждании моего разума по лабиринтам математики. Также выражаю сердечную благодарность Николаю Тарханову, подарившему мне упоительные минуты, проведенные в плодотворных дискуссиях на математические и общечеловеческие темы, безгранично отдающемуся работе и разделившему со мной долю своего бесценного педагогического и научного опыта.

Работы автора по теме диссертации

1. Шестаков И. В., Шлапунов А. А. *О разрешимости неоднородной системы Коши-Римана в шаровом слое*// Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2006. № 1. С. 102–111.

2. Shestakov I. V., Shlapunov A. A. *On the Cauchy problem for operators with injective symbols in Sobolev spaces*// Журнал СФУ. Математика и физика. 2008. № 1. С. 52–62.

3. Shestakov I. V., Shlapunov A. A. *Negative Sobolev Spaces in the Cauchy Problem for the Cauchy-Riemann Operator*// Журнал СФУ. Математика и физика. 2009. № 1. С. 17–30.

4. Шестаков И. В. *О задаче Коши в пространствах Соболева для операторов Дирака*// Изв. вузов. Математика. 2009. № 7. С. 51–64.

5. Шестаков И. В., Шлапунов А. А. *О задаче Коши для операторов с инъективным символом в пространстве Лебега L^2 в области*// Сиб. Мат. Журн. 2009. Т. 50, № 3. С. 687–702.

Тезисы конференций

6. Шестаков И. В. *О разрешимости неоднородной системы Коши-Римана в шаровом слое*// Материалы XLIV Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс». Новосибирск, НГУ, 2006. С. 31.

7. Shestakov I. V. *On the solvability of the Cauchy problem for Dirac operators in Sobolev spaces*// Тезисы докладов международной конференции «Геометрия и анализ на комплексных многообразиях», Красноярск, СФУ, 2007.

8. Шестаков И. В., Шлапунов А. А. *О разрешимости задачи Коши для операторов с инъективным символом в пространствах Соболева*//

Тезисы докладов международной конференции «Обратные и некорректные задачи», Новосибирск, ИМ СО РАН, 2007.

9. Shestakov I. *Asymptotic behaviour of solutions to elliptic equations on manifolds with cuspidal points*// Analysis, PDEs and Applications, Rom, 2008. P. 44.

10. Шестаков И. В. *A uniqueness theorem for the Dolbeault cohomology*// Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», Новосибирск, ИМ СО РАН, 2008. С. 405.