На правах рукописи

Пушкарева Татьяна Алексеевна

ПЕРИОДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НА ПЕРЕМЕННОЙ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

г. Красноярск, 2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО "Горно-Алтайском государственном университете"

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Чуешев Виктор Васильевич

Официальные оппоненты: **Сафонов Константин Владимирович**
доктор физико-математических наук, профессор
Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М.Ф. Решетнёва, Красноярск
кафедра прикладной математики, заведующий кафедрой;

Абросимов Николай Владимирович
кандидат физико–математических наук
Институт Математики
им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск
лаборатория "Теория функций", научный сотрудник

Ведущая организация: Национальный исследовательский Томский государственный университет

Защита состоится "10" октября 2014 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском Федеральном университете по адресу 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан "_____" _______________ 2014 г.

Ученый секретарь диссертационного совета — Федченко Дмитрий Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Мультипликативные функции и дифференциалы Прима появились в классических работах Ф. Прима, Г. Роста[1] и П. Аппеля[2], как естественное обобщение абелевых дифференциалов и их периодов. Для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности они нашли приложения в геометрической теории функций, аналитической теории чисел (Х.Фаркаш, И. Кра), теории векторных расслоений над комплексными многообразиями (Р. Ганнинг, И. Ергенссон, Дж.Фау, Г. Кемпф, Э. Джеблоу).

В работе В.В. Чуешева[3] начато построение основ теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеров. Проведенные в работе исследования берут начало в основной работе Р. Ганнинга (1980 г.)[4], который возродил интерес к периодам дифференциалов Прима для любых характеров и вместо пространства периодов предложил так называемое когомологическое расслоение Ганнинга для фиксированной поверхности и для любых характеров. В работе В.В. Чуешева предложено обобщить понятие когомологического расслоения Ганнинга над произведением пространства Тейхмюллера и группы характеров.

Известно, что абелевы дифференциалы и их периоды нашли многочисленные приложения в уравнениях математической физики, при ал-

[1]Prym F., Rost G. Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann‘s. Leipzig: Teubner, 1911.

[2]Appell, P. Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application an developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques. Acta Math. – 1890. – Vol. 13, n. 3/4. P. 1–174.

[3]Чуешев В.В. Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2 – Кемерово, КемГУ, 2003.

[4]Gunning R.C. On the period classes of Prym differentials. J. Reine Angew. Math. 1980. V. 319. P. 153 – 171.

гебро-геометрическом интегрировании ряда нелинейных уравнений в работах С.П. Новикова[5], И.М. Кричевера[6], и в теоретической физике (Р. Дик, С. Климек), а также в теории пространств Тейхмюллера в работах Л.В. Альфорса, Л. Берса[7], С.Л. Крушкаля и К. Эрла[8].

Построенные в диссертационной работе основы теории мероморфных и гармонических дифференциалов Прима и их периодов на переменной римановой поверхности с переменными характерами существенно отличаются от имеющихся классических результатов по теории абелевых дифференциалов и их периодов, приведенных в книгах Дж. Спрингера[9], Фаркаша-Кра[10] по классической геометрической теории функций на компактной римановой поверхности. Сначала заметим, что все объекты рассматриваются на переменной компактной римановой поверхности F_μ. Для построения теории однозначных дифференциалов большую роль играют, так называемые, элементарные дифференциалы любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов: либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса (Дж. Спрингер и Фаркаш - Кра), и голоморфно зависящие от модулей $[\mu]$ компактных римановых поверхностей F_μ. В нашей работе дано построение и конструктивное описание дивизоров элементарных дифференциалов Прима трех родов любых целых порядков.

Всё вышесказанное говорит об актуальности темы диссертации.

---

[5]Кричевер И.М., Новиков С.П. Алгебра типа Вирасоро, тензор энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях. Функцион. анализ и его приложения. 1989. Т.23. В.1. С. 24 – 40.

[6]Кричевер И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. Успехи матем. наук. 1977. Т. 32, Вып. 6. С. 180–208.

[7]Альфорс Л. В., Берс, Л. Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. – М., ИЛ, 1961.

[8]Earle C.J. Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties. Annals of Mathematics. 1978. V. 107. P. 255–286.

[9]Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей.– М. ИЛ.: 1960.

[10]Farkas, H. M., Kra, I. Riemann surfaces. – Grad. Text's Math.. – V. 71. – New-York, Springer, 1992.

Цель диссертации

Целями диссертационной работы является:

1) получение теоремы о полной сумме вычетов для $(\rho, q)-$дифференциалов Прима любого целого порядка на переменной компактной римановой поверхности;

2) построение четырех основных типов элементарных дифференциалов Прима $\tau_{\rho;Q}, \tau^{(m)}_{\rho;Q}(m > 1), \tau_{\rho;P_1^2,P_2^2}$, и $\tau^{(2)}_{\rho;Q_1}$, где $df_0(Q_1) = 0$ и f_0 – мультипликативная единица для ρ, локально голоморфно зависящих от характера ρ и модулей $[\mu]$ компактной римановой поверхности;

3) классификация основных соотношений на периоды и видов билинейных соотношений между периодами элементарных дифференциалов Прима трёх родов на переменной компактной римановой поверхности для любых характеров;

4) доказательство того, что голоморфное векторное расслоение Прима будет вещественно-аналитически изоморфно когомологическому расслоению Ганнинга над произведением пространств Тейхмюллера и нетривиальных нормированных характеров;

5) построение канонических базисов голоморфных дифференциалов Прима локально голоморфно зависящих от существенных характеров и модулей римановых поверхностей;

6) построение канонических базисов гармонических дифференциалов Прима, которые вещественно-аналитически зависят от нормированных характеров и комплексно-аналитически от модулей римановых поверхностей.

Методы исследования

В работе использовались следующие методы:

1) универсальное расслоение Якоби над пространством Тейхмюллера;

2) метод построения базисов голоморфных дифференциалов, и различных видов мероморфных дифференциалов Прима, которые голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ римановой поверхности и характеров ρ;
3) сложную технику работы с классами дивизоров и голоморфными сечениями К. Эрла в пространствах целых дивизоров на переменной римановой поверхности;
4) когомологическое векторное расслоение Ганнинга над пространством Тейхмюллера.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и представляют научный интерес.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты представляют теоретический интерес и могут быть применены в многомерном комплексном анализе, геометрической теории функций на компактной римановой поверхности, аналитической теории чисел, уравнениях математической физики и комплексной алгебраической геометрии. Практическое применение полученных результатов состоит в их включении в учебные программы специальных курсов по геометрической теории функций и многомерному комплексному анализу для магистрантов и аспирантов кафедры математического анализа Кемеровского и Горно-Алтайского государственных университетов.

Степень достоверности и апробация работы

Все утверждения диссертации снабжены строгими математическими доказательствами. Результаты работы обсуждались и докладывались на следующих международных и всероссийских конференциях :

международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" / Новосибирск, НГУ, 2010, 2011, 2012 г.;

всесибирском конгрессе женщин-математиков / Красноярск, СФУ, 2010 г.:

на школе-конференции по геометрическому анализу / Горно-Алтайск, ГАГУ 2010, 2011, 2012 г.;

международной школе-конференции по геометрии и анализу / Кемерово, КемГУ, 2011 г.;

на совместном заседании семинаров "Геометрическая теория функций" и "Инварианты трехмерных многообразий" в Новосибирском Институте Математики (СО РАН) под руководством член-корр. РАН А.Ю. Веснина, профессора НГУ А.Д. Медных и профессора НГУ В.В. Асеева в 2013 г.;

в Сибирском Федеральном университете на семинаре по многомерному комплексному анализу под руководством проф. А.К. Циха и проф. А.М. Кытманова (Красноярск), 2013 г.;

на семинаре по "Геометрической теории функций комплексного переменного" в Томском государственном университете под руководством профессора д.ф.-м.н. И.А. Александрова, 2014 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-16], из них 3 работы [1-3] в ведущих рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК, 2 публикации [4-5] в материалах конференций, 11 публикаций [6-16] являются тезисами конференций.

Исследования по теме диссертации были поддержаны грантами: 1) Аналитическая ведомственная целевая программа, 2.1.1.3707; 2) Федеральная целевая программа, №-02.740.11.0457; 12-01-90800-моб-рф-нр; 3)

РФФИ No. 14-01-31109 мол.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка цитируемой литературы, насчитывающей 23 наименования. Компьютерный набор выполнен с использованием пакета LaTeX. Объем работы – 111 страниц.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность и изложена история исследуемых задач и кратко охарактеризовано содержание диссертации.

Напомним основные определения, используемые в нашей работе. Пусть F – фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 – риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0 и Γ изоморфна $\pi_1(F)$. Любая другая комплексно-аналитическая структура на F может быть отождествлена с некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, где $\mu(z)$ – комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Элементами пространства Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$ являются классы конформной эквивалентности отмеченных компактных римановых поверхностей F_μ рода $g \geq 2$. Модули таких классов для краткости будем обозначать через $[\mu]$.

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to$
$\to (\mathbf{C}^*, \cdot),\ \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Определение. (ρ, q)–дифференциалом называется дифференциал $\phi =$
$= \phi(z)dz^q$ такой, что $\phi(Tz)(T'z)^q = \rho(T)\phi(z), z \in U, T \in \Gamma,\ \rho : \Gamma \to \mathbf{C}^*$. В частности, при $q = 0$, это мультипликативная функция относительно Γ для ρ.

Если f_0 – мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то ее характер ρ будем называть несущественным, а f_0 – единицей. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть существенными на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ группу всех характеров на Γ. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$.

Обозначим через $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ для $\rho \in Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma_\mu \to \mathbf{C}$ таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T), S, T \in \Gamma_\mu$. Пусть $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$, порожденное элементом σ. Тогда $H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – комплексное векторное $(2g - 2)-$мерное пространство для $\rho \neq 1$. Будем называть множество $G = \bigcup\limits_{\rho\neq 1, [\mu]} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ когомологическим расслоением Ганнинга над $\mathbf{T}_g \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)\setminus\{1\})$.

В первой главе диссертации в §1.2 доказана теорема о полной сумме вычетов для $(\rho, q)-$дифференциалов Прима при любых характерах ρ на переменной компактной римановой поверхности.

Теорема 1.2.2. *Для любого* $(\rho,\ q)-$*дифференциала* τ *с любым характером* ρ *и дивизором* $(\tau) \geq \frac{1}{Q_1^{\alpha_1} \ldots Q_s^{\alpha_s}}, \alpha_j \in \mathbf{N}, j = 1, \ldots, s$, *с попарно различными точками* $Q_1, ..., Q_s, s \geq 2$, *и любого целого числа* $q \neq 0, 1$ *на переменной компактной римановой поверхности* F_μ *рода* $g \geq 2$ *существует мультипликативная функция* f *для* ρ^{-1} *такая, что верно* *равенство*

$$\sum_{j=1}^{s} \operatorname*{res}_{Q_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}} + \sum_{j=1}^{g+1} \operatorname*{res}_{S_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}} = 0,$$

причем

1) f - единица на F_μ, если ρ - несущественный характер;

2) f - единственная, с точностью до умножения на ненулевую константу, функция с единственным простым полюсом Q_1 на F_μ, если ρ - существенный характер.

В каждом из этих случаев ω_0 - голоморфный абелев дифференциал с дивизором $(\omega_0) = S_1 ... S_g S_{g+1}^{g-2}$, $\varphi_{S_{g+1}}(S_1 ... S_g) = -2K$ в многообразии Якоби $J(F_\mu)$ и $\{S_1, ..., S_g, S_{g+1}\} \cap \{Q_1, ..., Q_s\} = \emptyset$ на F_μ.

Как следствие в §1.3 доказываются законы взаимности для однозначных мероморфных функций и дифференциалов Прима, и находятся необходимые и достаточные условия существования $(\rho, q)-$дифференциалов с заданными полюсами и вычетами в них.

В §1.4 построены четыре основных типа элементарных дифференциалов Прима, локально голоморфно зависящие от характера ρ и модулей компактной римановой поверхности. Дано полное описание дивизоров элементарных дифференциалов Прима на поверхности.

Теорема 1.4.1. *Для любого существенного характера ρ, точки $Q \in \in F_\mu$ существует некоторая ветвь элементарного дифференциала $\tau_{\rho;Q}$ третьего рода с единственным простым полюсом в точке Q на F_μ рода $g \geq 2$, локально голоморфно зависящего от $[\mu]$ и ρ.*

Теорема 1.4.2. *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любой точки Q, любого характера ρ и $m \geq 2$, $m \in \mathbf{N}$, существует дифференциал Прима $\tau_{\rho;Q}^{(m)}$ с полюсом Q точно порядка m, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ. Причем для существенного характера он имеет асимптотику $(\frac{1}{z^m} + O(1))dz, \quad z(Q) = 0$.*

Теорема 1.4.3. *Для любых различных точек Q_1 и Q_2 на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любого несущественного характера ρ существует дифференциал $\tau_{\rho;Q_1^2Q_2^2}$ второго рода с полюсами второго порядка в точках Q_1 и Q_2, голоморфно зависящий от $[\mu]$ и ρ, и имеющий нулевые вычеты в точках Q_1 и Q_2.*

Любой мероморфный дифференциал можно представить в виде конечной суммы элементарных дифференциалов трех родов. С помощью таких элементарных дифференциалов Прима можно построить базисы локально голоморфных сечений всех основных типов векторных расслоений, со слоями состоящими из дифференциалов Прима, над произведением пространства Тейхмюллера и группы характеров (М.И. Головина[11], М.И. Тулина[12]).

В §1.5 получены новые свойства пространств мероморфных мультипликативных функций с заданными полюсами на переменной компактной римановой поверхности и для переменных характеров. Кроме того, в §1.6 доказаны аналоги формулы разложения П. Аппеля для мультипликативных функций на переменной компактной римановой поверхности.

Во второй главе диссертации найдены основные соотношения на периоды и виды билинейных соотношений между периодами элементарных дифференциалов Прима трёх родов на переменной компактной римановой поверхности для любых характеров.

Теорема 2.1.1. *Для периодов голоморфного дифференциала Прима ϕ с характером $\rho \neq 1$ на переменной компактной римановой поверхности*

[11] Головина М.И. Дивизоры дифференциалов Прима на римановой поверхности. Вестник КемГУ, N 3/1, 2011. С. 193–198.

[12] Тулина М.И. Однозначные дифференциалы и специальные дивизоры дифференциалов Прима. Сибирский матем. ж., 2013, т. 54, N 4, С. 914 – 931.

F_μ рода $g \geq 2$, верно равенство

$$\sum_{k=1}^{g} \frac{\phi(b_k)\sigma(a_k) - \phi(a_k)\sigma(b_k)}{\rho(a_k)} \rho(b_1)\cdots\rho(b_{k-1}) = 0.$$

В §2.2 – §2.4 найдены билинейные соотношения на периоды дифференциалов Прима трех родов для существенного и несущественного характера.

Теорема 2.3.1. *Для дифференциалов Прима $\tau_{\rho;Q}$ и ϕ_1 третьего и первого родов со взаимно обратными существенными характерами ρ и ρ_1 на F_μ верно билинейное соотношение (равенство) между их периодами*

$$\sum_{k=1}^{g} \left[\frac{\Pi(a_k)}{\rho(a_k)} \left(-\rho(b_k)\phi_1(b_k) + \frac{1}{\rho_1(a_k)\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k)\right) + \frac{\Pi(b_k)}{\rho(a_k)} \left(\rho(a_k)\phi_1(a_k) + \right.\right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i ... b_{k-1})}\phi_1(C_i)\right) +$$

$$\left. + \rho(b_k)\phi_1(b_k) \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\Pi(b_i)\sigma(a_i) - \Pi(a_i)\sigma(b_i)}{\rho(b_i)\rho(b_{i+1})...\rho(b_k)\rho(a_i)} + \frac{2\pi i}{\rho(b_1)...\rho(b_i)} \right) \right] = 2\pi i f_1(z_0).$$

Теорема 2.3.2. *Для периодов голоморфного дифференциала Прима ϕ_1 и элементарного интеграла Прима $\Pi(z; z_0, z_1)$ третьего рода со взаимно обратными несущественными характерами ρ_1 и ρ на F_μ верно билинейное соотношение (равенство) между их периодами*

$$\sum_{k=1}^{g} \left\{ \Pi(a_k) \left[-\frac{\rho_1(a_k)}{\rho_1(b_k)}\phi_1(b_k) + \frac{1}{\rho_1(b_k)}\phi_1(C_k) - \frac{\sigma(b_k)}{\rho(a_k)} \sum_{j=k}^{g} \frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k...b_j)} \right] + \right.$$

$$+ \Pi(b_k) \left[\rho_1(a_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_1(a_i)\rho_1(b_i...b_{k-1})}\phi_1(C_i) + \phi_1(a_k) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\sigma(a_k)}{\rho(a_k)} \sum_{j=k}^{g} \frac{\phi_1(b_j)}{\rho_1(b_j)\rho(b_k...b_j)} \right] + \rho(b_k)\phi_1(b_k) \sum_{i=1}^{k} \frac{2\pi i}{\rho(b_1)...\rho(b_i)} \right\} =$$

$$= 2\pi i[f_1(z_0)f_0(z_0) - f_1(z_1)f_0(z_1)].$$

Таким образом в этой главе получена классификация билинейных соотношений для периодов дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$. Отметим, что частные случаи билинейных соотношений в работах П. Аппеля, Р. Ганнинга[13], В.В. Чуешева, Дж. Кемпфа[15], Э. Джеблоу[16] рассматривались только на фиксированной поверхности и для специальных характеров. В §2.1 доказана эквивалентность основных соотношений П.Аппеля и Р.Ганнинга на периоды голоморфных дифференциалов Прима.

В третьей главе рассматриваются абелевы дифференциалы и дифференциалы Прима на специальных римановых поверхностях. В. М. Бухштабер и А. К. Цих обратили наше внимание на важность изучения теории функций на специальных римановых поверхностях, т. е. заданных конкретными полиномиальными уравнениями. В этой главе получены явные базисы в пространствах голоморфных $(\rho, q)-$дифференциалов для несущественных характеров на четырех специальных римановых поверхностях и на всех кривых Ферма $F_n : y^n = x^n - 1, n \geq 3$.

Теорема 3.2.1. *Для любого $n \geq 3$ набор голоморфных дифференциалов $\frac{z^i \omega^j dz}{n\omega^{n-1}}$, $0 \leq i+j \leq n-3$, на кривой Ферма $F_n : \ \omega^n = z^n - 1$ является базисом в пространстве голоморфных абелевых дифференциалов на кривой F_n.*

В четвертой главе изучаются периоды гармонических дифферен-

[13]Gunning R.C. Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press., 1967.

Gunning R. C. Riemann surfaces and generalized theta functions. Ergebnisse Math. Bd. 91. Berlin 1976.

[15]Kempf G. A property of the periods of a Prym differential. Proc. of the Amer. Math. Soc. 1976. V.54. P. 181 – 184.

[16]Jablow E. An analogue of the Rauch variational formula for Prym differentials. Israel J. of Math. 1989. V. 65. N 3. P. 323 – 355.

циалов Прима для существенных и несущественных характеров на переменной компактной римановой поверхности.

Гармоническим дифференциалом Прима на F для $\rho \in Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма $\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(z)d\overline{z}$ на U такая, что

$$\phi_1(Tz)dTz + \phi_2(Tz)d\overline{Tz} = \rho(T)(\phi_1(z)dz + \phi_2(z)d\overline{z}),$$

где $T \in \Gamma, z \in U$. Множество всех гармонических дифференциалов Прима ϕ для $\rho \in Hom(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$ образует комплексное $(2g-2)-$мерное векторное пространство $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ при $\rho \notin L_g \cup \overline{L_g}$, так как

$$\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho)),$$

где $\overline{L_g}$ - образ L_g при отображении комплексного сопряжения $\rho \to \overline{\rho}$.

Теорема 4.2.1. *Гармоническое расслоение Прима* $\mathbf{HP} = \bigcup_{([\mu],\rho)} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ *является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга* $2g-2$ *над* $\mathbf{T}_g \times Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash (L_g \cup \overline{L_g})$ *при любом* $g \geq 2$. *Кроме того,* $\mathbf{HP}$ *является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных* $*-$*инвариантных векторных подрасслоений* $\mathbf{P}_{1,0}$ *и* $\mathbf{P}_{0,1}$ *ранга* $g-1$ *над этой базой.*

Теорема 4.2.2. *Когомологическое расслоение Ганнинга* G *является голоморфным векторным расслоением ранга* $2g-2$ *над* $\mathbf{T}_g(F) \times (Hom(\Gamma, \mathbf{C}^*) \backslash 1)$.

В теореме 4.2.3 доказано, что гармоническое векторное расслоение Прима вещественно-аналитически изоморфно когомологическому расслоению Ганнинга над произведением пространства Тейхмюллера и группы нормированных нетривиальных характеров. Этот изоморфизм задается отображением периодов, которое сопоставляет гармоническому дифференциалу Прима ϕ на F_μ его класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$.

Первая группа $H^1_{DR}(F_\mu, \rho)$ когомологий де Рама на F_μ для ρ определяется как фактор-пространство пространства $\Lambda^1(F_\mu, \rho)$ (всех замкнутых дифференциалов Прима на F_μ класса C^∞ для ρ) по подпространству $dC^\infty(F_\mu, \rho)$ (образ пространства $C^\infty(F_\mu, \rho)$, которое состоит из всех мультипликативных функций на F_μ класса C^∞ для ρ, по оператору дифференцирования d).

Предложение 4.4.1. (Аналоги теорем де Рама и Ходжа) *Для $\rho \in [S^1]^{2g}$ верно $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1_{DR}(F_\mu, \rho) \cong H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ и для любого замкнутого дифференциала Прима ϕ на F_μ класса C^∞ для ρ существует единственное разложение Ходжа $\phi = \phi_0 + df(z)$, где $\phi_0 \in \Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$, $f(z) \in C^\infty(F_\mu, \rho)$, а также для любого класса периодов $[\psi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ существует замкнутый дифференциал Прима ϕ на F_μ класса C^∞ для ρ такой, что $[\phi] = [\psi]$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$.*

Отметим, что эти результаты для частного случая фиксированной поверхности были получены Р. Ганнингом и Э. Джеблоу с помощью когомологий с коэффициентами в пучках. В нашем случае это получается элементарными способами используя классы периодов Ганнинга сразу для переменной компактной римановой поверхности.

В теореме 4.4.1 строятся канонические базисы гармонических дифференциалов Прима, которые вещественно-аналитически зависят от нормированных характеров и комплексно-аналитически зависят от модулей компактных римановых поверхностей.

В §4.5 в теореме 4.5.1 изучены периоды голоморфных дифференциалов для существенных характеров. В следствии 4.5.1 построены канонические базисы голоморфных дифференциалов Прима, локально голоморфно зависящие от существенных характеров и модулей компактных римановых поверхностей.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору Чуешеву Виктору Васильевичу за постоянное внимание и всестороннюю поддержку.

Основные результаты :

1) Получены теоремы о полной сумме вычетов для $(\rho, q)-$дифференциалов Прима любого целого порядка на переменной компактной римановой поверхности;

2) Построены четыре основных типа элементарных дифференциалов Прима $\tau_{\rho;Q}, \tau_{\rho;Q}^{(m)}(m > 1), \tau_{\rho;P_1^2,P_2^2}$, и $\tau_{\rho;Q_1}^{(2)}$, где $df_0(Q_1) = 0$ и f_0 – мультипликативная единица для ρ, локально голоморфно зависящих от характера ρ и модулей $[\mu]$ компактной римановой поверхности;

3) Получена классификация: основных соотношений на периоды и видов билинейных соотношений между периодами элементарных дифференциалов Прима трёх родов на переменной компактной римановой поверхности для любых характеров. Как частные случаи из них получаются билинейные соотношения П.Аппеля, Р.Ганнинга, Г.Кемпфа;

4) Доказывается, что голоморфное векторное расслоение Прима будет вещественно-аналитически изоморфно когомологическому расслоению Ганнинга над произведением пространств Тейхмюллера и нетривиальных нормированных характеров;

5) Построены канонические базисы голоморфных дифференциалов Прима локально голоморфно зависящих от существенных характеров и модулей римановых поверхностей;

6) Построены канонические базисы гармонических дифференциалов Прима, которые вещественно-аналитически зависят от нормированных характеров и комплексно-аналитически зависят от модулей римановых поверхностей.

Публикации по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК

1. Пушкарева Т.А. *Вычеты и элементарные дифференциалы Прима на компактной римановой поверхности* // Вестник НГУ / Новосибирск, т. 13, № 2, 2013, С.99–118

2. Пушкарева Т.А. *Билинейные соотношения для периодов дифференциалов Прима на римановой поверхности* // Вестник НГУ / Новосибирск, т. 14, № 1, 2014, С. 66 – 83.

3. Пушкарева Т.А., Чуешев В.В. *Пространство гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности* // Сиб. мат. журнал. Новосибирск. т.55, N 2 ,2014, с. 379 – 395

Материалы конференций

4. Пушкарева Т.А. *Базис голоморфных дифференциалов на некоторых специальных римановых поверхностях* // Сборник научных трудов кафедры математического анализа Г-АГУ / Горно-Алтайск. N 2, 2010, С. 65-78.

5. Пушкарева Т.А., Чуешев В.В. *Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на переменной компактной римановой поверхности* // Вестник КемГУ / Кемерово, 2011, т. 3/1, С.211-216.

Тезисы конференций

6. Пушкарева Т.А. *Голоморфные дифференциалы на специальных римановых поверхностях* // XLVIII Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс"/ Новосибирск, 2010, С. 105.

7. Пушкарева Т.А. *Голоморфные дифференциалы на специальных римановых поверхностях* // VI Всесибирский конгресс женщин - математиков / Красноярск, 2010, С. 362-364.

8. Пушкарева Т.А. *Базисы голоморфных дифференциалов на специальных римановых поверхностях* // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу / Горно-Алтайск, 2010, С. 59.

9. Пушкарева Т.А. *Классы периодов гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности* // Международная школа-конференция по геометрии и анализу / Кемерово, КемГУ, 2011, С. 1-2.

10. Пушкарева Т.А. *Periods of harmonic Prym differentials on a variable Rietann surface* // 8-й Международный конгресс ISAAK 2011 / Москва, 2011, С. 60.

11. Пушкарева Т.А. *Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на переменной компактной римановой поверхности* // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу / Горно-Алтайск, 2011, С. 40-41.

12. Пушкарева Т.А. *Голоморфные дифференциалы на специальных римановых поверхностях.* // Материалы десятой международной Казанской летней научной школы-конференции / Казань, 2011, С. 293-294.

13. Пушкарева Т.А. *Вычеты дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности* // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу / Горно-Алтайск, 2012, С. 42-43.

14. Пушкарева Т.А. *Теоремы о вычетах для дифференциалов Прима любого порядка* // IV российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам / СФУ, Красноярск, 2012, С. 58-59.

15. Пушкарева Т.А. *Гармонические дифференциалы Прима для нормированных характеров* // 4-я международная конференция (90-лет Л.Д. Кудрявцеву) / РУДН, Москва, 2013, С. 354-355.

16. Пушкарева Т.А. *Гармонические дифференциалы Прима и расслоение Ганнинга* // Дни геометрии в Новосибирске, 2013 / Новосибирск, 2013, С. 70.