УДК 510.67+512.54+512.55 На правах рукописи

МИНАКОВА Елизавета Викторовна

ТЕОРЕТИКО-МОДЕЛЬНЫЕ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ КОЛЕЦ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОЛЬЦОМ НИЛЬТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2008

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и математической логики Сибирского федерального университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ЛЕВЧУК Владимир Михайлович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор ПЕРЯЗЕВ Николай Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент БУНИНА Елена Игоревна
Ведущая организация:	Институт математики СО РАН

Защита состоится 28 ноября 2008 года в 15.30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан " " октября 2008 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Бушуева Н.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы. В диссертации взаимосвязано исследуются элементарная эквивалентность, автоморфизмы и изоморфизмы нильпотентных матричных колец и групп.

Зависимость элементарной эквивалентности и других модельных свойств линейных групп от свойств полей или колец коэффициентов, по-видимому, впервые стал изучать А.И. Мальцев. Соответствие между элементарными свойствами унитреугольной группы $UT(3, K)$ степени 3 с выделенными параметрами и кольца коэффициентов K с единицей (не обязательно ассоциативного) установлено в статье [1]. Согласно [2], элементарная эквивалентность групп G_n, $G = GL$, PGL, SL или PSL, степеней $n \geq 3$ над полями нулевой характеристики переносится на поля коэффициентов.

Аналог теоремы А.И. Мальцева из [2] устанавливался для случая первичных ассоциативных колец коэффициентов с $1/2$ в [3], а для групп Шевалле и их унипотентных подгрупп над полями характеристики $\neq 2, 3$ – в работах А.В. Михалева, Е.И. Буниной, К. Видэла и др., см. обзор [4] и [5]. Методы А.И. Мальцева развивали Ю.Л. Ершов, Б. Роуз, О.В. Белеградек и др., [6] – [10]. Исследования теоретико-модельных свойств линейных групп и колец развивались с 70-х годов в тесной связи с теорией изоморфизмов.

Пусть K и S – произвольные ассоциативные кольца с единицей. Унитреугольная группа $UT(n, K)$ представляется присоеди-

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00824a).

ненной группой кольца $R = NT(n, K)$ (нижних) нильтреугольных $n \times n$ матриц над K; изоморфизм дает отображение $\alpha \to e + \alpha$ с единичной матрицей e. Зависимость элементарной эквивалентности унитреугольных групп и колец нильтреугольных матриц $NT(n, K) \equiv NT(m, S)$ от элементарных свойств колец коэффициентов вызывала интерес с 70-х годов. Группу автоморфизмов $Aut\ R$ описал В.М. Левчук в 1975 году. Пользуясь этим описанием и мальцевским соответствием, К. Видэла интерпретировал в кольце $NT(n, K)$ кольцо коэффициентов K и перенес элементарную эквивалентность: $NT(n, K) \equiv NT(m, S) \quad (n \geq 3) \Leftrightarrow n = m, K \equiv S$, [11]. (Частный случай полей коэффициентов исследовали Роуз [7] и Велер [12].)

Аналогичные вопросы естественно возникают для ассоциированных кольца Ли $\Lambda(R)$ и Йордана $J(R)$. Свойство группы или кольца иметь ступень нильпотентности n сохраняется при элементарной эквивалентности. В диссертации исследуются вопросы:

(А) *Описать зависимость элементарной эквивалентности* $UT(n, K) \equiv UT(n, S)$ *от элементарных свойств колец коэффициентов;*

(Б) *Описать связь элементарной эквивалентности колец Ли* $\Lambda(NT(n, K)) \equiv \Lambda(NT(n, S))$ *и элементарных свойств колец коэффициентов;*

(В) *Найти изоморфизмы йордановых колец и условия их элементарной эквивалентности* $J(NT(n, K)) \equiv J(NT(n, S))$.

О.В. Белеградек [13] решил вопрос (A), когда одно из колец коэффициентов коммутативно или без делителей нуля. Изоморфизмы колец $NT(n, K)$, ассоциированных колец Ли и унитреугольных групп исследованы (с некоторыми ограничениями на K для $n = 3, 4$) в [14] – [16]. Йордановы изоморфизмы мало изучены.

Цель диссертации. Основные результаты диссертации направлены на решение вопросов (A) – (B).

Методы исследования. Используются классические методы теории групп и колец, теории моделей, методы ультрапроизведений и насыщенных систем.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Диссертация носит теоретический характер.

Апробация диссертации. Результаты диссертации были представлены на V Всесибирском конгрессе женщин-математиков (г. Красноярск, 2008), на международных алгебраических конференциях в Красноярске (2007) и Москве (2008), Мальцевких чтениях (г. Новосибирск, 2007), на международном Российско-Китайском семинаре (г.Иркутск, 2007) и на 7-й международной школе-конференции по теории групп (г. Челябинск, 2008), на семинарах НГУ – ИМ "Алгебра и логика" и "Теория вычислимости" (г. Новосибирск, 2008) и на алгебраическом семинаре Сибирского федерального университета (г. Красноярск).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [19]—[28], в том числе, и в изданиях из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает введение, три главы и список литературы. Номер теоремы, леммы и др. включает последовательно номер главы, параграфа и порядковый номер в параграфе.

Содержание диссертации

Пусть K и S – произвольные ассоциативные кольца с единицей, $R = NT(n, K)$ – кольцо нильтреугольных матриц степени $n \geq 3$ над K и $R' = NT(n, S)$. Основными в диссертации являются следующие результаты:

- доказано, что элементарная эквивалентность $\Lambda(R) \equiv \Lambda(R')$ ассоциированных колец Ли переносится на кольца коэффициентов при условии их коммутативности;
- получают решение для степеней $n > 4$ вопросы (A), (Б) об элементарной эквивалентности унитреугольных групп $UT(n, K) \equiv UT(n, S)$ и ассоциированных колец Ли;
- построена интерпретация с параметрами кольца коэффициентов в ассоциированные кольца Ли $\Lambda(R)$ и Йордана $J(R)$;
- доказано, что каждый автоморфизм кольца Йордана $J(R)$ при $n > 4$ есть произведение его идемпотентно-кольцевого и гиперцентрального высоты ≤ 3 автоморфизмов на автоморфизм кольца R.

Напомним, что кольцо Ли $\Lambda(R) := (R, +, *)$ с лиевым умножением $\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha$ и кольцо Йордана $J(R) := (R, +, \circ)$ с умножением $\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha$ ассоциируют с каждым ассоциативным кольцом R.

Параграф 1.1 первой главы посвящен постановке задач. В параграфах 1.2 и 1.3 единообразно усиливаются теорема об изоморфизмах финитарных колец нильтреугольных матриц из [16] и теорема Видэла [11] об элементарной эквивалентности $NT(n, K) \equiv NT(m, S)$. Так, теорему Видэла усиливает

Теорема 1.3.1. *Пусть K, S – кольца с единицами, кольцо K ассоциативное и $n > 2$. Тогда:*

$$NT(m, S) \equiv NT(n, K) \ \Leftrightarrow n = m, \ S \equiv K.$$

Теоремы 1.3.1 и 1.2.1 опубликованы в [20]. Доказательство теоремы 1.3.1, как и в статье Видэла [11], основано на применении насыщенных алгебраических систем. Её более короткое доказательство в § 2.1 главы 2 использует аппарат ультрапроизведений.

В главе 2 дано решение вопроса (Б) об условиях элементарной эквивалентности колец Ли, ассоциированных с кольцами $NT(n, K)$ и $NT(n, S)$ $(n \geq 3)$ в случаях, когда кольца коэффициентов коммутативны или $n > 4$. При тех же ограничениях, в развитие теоремы О.В. Белеградека, решение получает также вопрос (А).

Центральными в главе 2 и диссертации являются следующие теоремы.

Теорема 2.2.1. *Пусть K, S – ассоциативные кольца с единицами и $n > 4$. Тогда каждая из элементарных эквивалентностей*

$$\Lambda(NT(n,K)) \equiv \Lambda(NT(n,S)), \quad UT(n,K) \equiv UT(n,S)$$

равносильна существованию центральных идемпотентов f в K и g в S таких, что

$$fK \equiv gS, \quad (1-f)K \equiv [(1-g)S]^{op}.$$

Теорема 2.3.1. *Пусть K, S – ассоциативно-коммутативные кольца с единицами и $n > 2$. Тогда*

$$\Lambda(NT(m,S)) \equiv \Lambda(NT(n,K)) \Leftrightarrow n = m, \ S \equiv K.$$

Теоремы опубликованы в [21] (соавтор В.М. Левчук) и [19]. Их доказательство проводится методом ультрапроизведений, обоснование которого приведено в § 2.1.

В связи с теоремами 1.2.1 и 1.3.1 отметим, что остается открытым вопрос О.В. Белеградека [13]: *Существуют ли ассоциативное кольцо K и неассоциативное S такие, что $UT(3,K) \simeq UT(3,S)$?*

Для колец $\Lambda(R)$ и $J(R)$, как и для унитреугольных групп, существенно различаются случаи коммутативных и некоммутативных (ассоциативных) колец коэффициентов. Интерпретация с определимыми параметрами подходящего некоммутативного кольца коэффициентов в кольца $\Lambda(R)$ и $J(R)$ не существует, по аналогии с примером О.В. Белеградека [13], см. § 2.1.

При построении мальцевского соответствия в статьях Роуза [7] и Видэла [11] предварительно доказывалась определимость в кольце R матричных единиц $e_{21},\ e_{32}, \cdots, e_{n,n-1}$. Это позволило интерпретировать кольцо коэффициентов K в кольцо $R = NT(n, K)$ без параметров, а затем исследовать вопросы конечной аксиоматизируемости и разрешимости теории этого кольца. В главе 3 строится интерпретация с параметрами или мальцевское соответствие кольца коэффициентов в ассоциированные кольца Ли $\Lambda(R)$ и Йордана $J(R)$ степеней $n \geq 3$. Основной в § 3.1 является

Теорема 3.1.1. *Ассоциативное кольцо с единицей K интерпретируется в кольца $\Lambda(R)$ и $J(R)$ с параметрами.*

Как следствие, выявляется точная связь наследственной неразрешимости теорий колец $\Lambda(R)$, $J(R)$ и колец коэффициентов.

Следствие 3.1.5. *Теории колец Ли $\Lambda(R)$ и Йордана $J(R)$ наследственно неразрешимы тогда и только тогда, когда теория $Th(K)$ основного кольца наследственно неразрешима.*

Следствия 3.1.6 и 3.1.7 дают достаточные условия рекурсивной изоморфности вышеназванных теорий.

Для решения вопроса (В) требуется изучить условия изоморфности йордановых колец нильтреугольных матриц. Сложность в известных описаниях изоморфизмов ассоциированных колец Ли и, аналогично, присоединенных групп заключалась прежде всего в существовании нестандартных автоморфизмов. Автоморфизмы кольца Йордана $J(R)$ описывает (совместная с В.М. Левчуком)

Теорема 3.2.1. *Пусть K есть произвольное ассоциативное кольцо с единицей и $n > 4$. Тогда каждый автоморфизм кольца*

Йордана $J(R)$ есть произведение его идемпотентно-кольцевого и гиперцентрального высоты ≤ 3 автоморфизмов на автоморфизм кольца R.

Частные случаи этой теоремы доказываются в [17], [18] и др. Теоремы 3.1.1 и 3.2.1 опубликованы в [21].

Автор благодарна своему научному руководителю В.М. Левчуку за помощь при постановке задач и в подготовке работ.

Признательна сотрудникам кафедры алгебры и математической логики и института математики Сибирского федерального университета за хорошие условия для работы над диссертацией.

Список литературы

[1] *Мальцев, А.И.* Об одном соответствии между кольцами и группами / А.И. Мальцев // Матем. сборник. - 1960. - Т. 50. - С. 257–266.

[2] *Мальцев, А.И.* Элементарные свойства линейных групп / А.И. Мальцев // В кн.: Некоторые проблемы в Математике и механике. Новосибирск, Изд-во АН СССР. - 1961. - С. 110-132.

[3] *Beidar, C.I.* On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups / C.I. Beidar, A.V. Michalev // Contemp. math. - 1992. - Vol. 131. - P. 29-35.

[4] *Бунина, Е.И.* Элементарная эквивалентность линейных и алгебраических групп / Е.И. Бунина, А.В. Михалев // Фунд. и прикл. матем. - 2000. - Т. 6, № 3. - С. 707–722.

[5] *Videla, C.K.* On the Mal'cev correspondence / C.K. Videla // Proceed. AMS. - 1990. - Vol. 109 - P. 493-502.

[6] *Ершов, Ю.Л.* Элементарные теории групп / Ю.Л. Ершов // ДАН СССР. - 1972. - Т. 203. - С. 1240–1243.

[7] *Rose, B.I.* The χ_1-categoricity of Strictly Upper Triangular Matrix Rings over Algebraically Closed Fields / B.I. Rose // J. Symbolic Logic. - 1978. - Vol. 43, № 2. - P. 250–259.

[8] *Belegradek, O.V.* Elementary properties of algebraically closed groups / O.V. Belegradek // Fundam. Math. - 1978. - Vol. 98, № 2. - P. 83-101.

[9] *Ремесленников, В.Н.* Теоретико-модельные и алгоритмические вопросы теории групп / В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков // Итоги науки и техники. Серия: Алгебра, топология, геометрия. - 1983. - Т. 21. - С. 3–79.

[10] *Bunina, E.I.* Elementary properties of linear groups and related questions / E.I. Bunina, A.V. Mikhalev // Math. Sciences. - 2004. - Vol. 123, № 2. - P. 3921–3985.

[11] *Videla, C.R.* On the Model Theory of the Ring $NT(n, R)$ / C.R. Videla // Pure and Appl. Algebra. - 1988. - Vol. 55. - P. 289–302.

[12] *Wheeler, W.H.* Model Theory of strictly upper triangular matrix ring / W.H. Wheeler // J. Symbolic Logic. - 1980. - Vol. 45. - P. 455–463.

[13] *Belegradek, O.V.* Model Theory of Unitriangular Groups / O.V. Belegradek // Amer. Math. Soc. Transl. - 1999. - Vol. 195, № 2.

[14] *Левчук, В.М.* Автоморфизмы некоторых нильпотентных матричных групп и колец / В.М. Левчук // ДАН СССР. - 1975. - Т. 222, № 6. - С. 1279–1282.

[15] *Левчук, В.М.* Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами. Ч. II. Группы автоморфизмов / В.М. Левчук // Сиб. матем. ж. - 1983. - Т. 24, № 4. - С. 543–557.

[16] *Kuzucuoglu, F.* Isomorphisms of Certain Locally Nilpotent Finitary Groups and Associated Rings / F. Kuzucuoglu, V.M. Levchuk // Acta Appl. Math. - 2004. - Vol. 82, № 2. - P. 169–181.

[17] *Wang, X.T.* Decomposition of Jordan automorphisms of strictly triangular matrix algebra over local rings / X.T. Wang, H. You // Linear Algebra Appl. - 2004. - Vol. 392. - P. 183–193.

[18] *Wang, X. T.* Decomposition of Jordan automorphisms of strictly triangular matrix algebra over commutative rings / X.T. Wang // Commun. Algebra. - 2007. - Vol. 35. - P. 1133–1140.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[19] *Минакова, Е.В.* Элементарно эквивалентные кольца Ли нильтреугольных матриц над коммутативными кольцами коэффициентов / Е.В. Минакова // Вестник НГУ. - 2008. - Т. 8, вып. 3. - С. 100-104.

[20] *Минакова, Е.В.* К теории моделей колец нильтреугольных матриц / Е.В. Минакова // Журнал Сибирского федерального университета. Математика&физика. - 2008. - № 2. - С. 221-227.

[21] *Левчук, В.М.* Вопросы об автоморфизмах и теории моделей колец Ли и Йордана нильтреугольных матриц и смежные вопросы / В.М. Левчук, Е.В. Минакова // Препринт №2. - Красноярск: ИВМ СО РАН. - 2008. - 19 с.

[22] *Минакова, Е.В.* О теории модели присоединённой группы кольца $NT_n(K)$ и ассоциированного с ним кольца Ли /Е.В. Минакова // Материалы XLIV Международной конфер. "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск: НГУ. - 2006. - С. 36.

[23] *Minakova, E.V.* The isomorphisms of the niltriangular matrix rings and related questions / E.V. Minakova // Algebra & logics: Intern. Russian-Chinese Sem., Irkutsk: IGPU. - 2007. - P. 127-129.

[24] *Минакова, Е.В.* Изоморфизмы колец нильтреугольных матриц и смежные вопросы / Е.В. Минакова // Конф. "Алгебра и её приложения", Красноярск: ИВМ СО РАН. - 2007. - С. 94-95.

[25] *Минакова, Е.В.* Кольцо нильтреугольных матриц и ассоциированные с ним кольца: автоморфизмы и изоморфизмы / Е.В. Минакова // Межд. конф. "Мальцевские чтения - 2007", Новосибирск: ИМ СО РАН. - 2007. - С. 75.

[26] *Минакова, Е.В.* Кольцо нильтреугольных матриц и ассоциированные с ним кольца: автоморфизмы и изоморфизмы / Е.В. Минакова // Материалы V Всесибир. конгресса женщин-математиков, Красноярск: СФУ. - 2008. - С. 303-305.

[27] *Минакова, Е.В.* К теории моделей колец нильтреугольных матриц / Е.В. Минакова // Межд. алгебраическая конф., Москва: МГУ. - 2008. - С. 75-76.

[28] *Минакова, Е.В.* Некоторые числовые и теоретико-модельные характеристики классических линейных групп и ассоциированных колец / Е.В. Минакова, О.В. Радченко // Материалы VII школы-конф. по теории групп, Челябинск: ЮУрГУ. - 2008. - С. 86-87.

[29] *Левчук, В.М.* Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально нильпотентных матричных групп и колец / В.М. Левчук, Е.В. Минакова // Доклады академии наук (в печати).