На правах рукописи

Ляпин Александр Петрович

О РАЦИОНАЛЬНОСТИ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ АСИМПТОТИКЕ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск 2009

Работа выполнена в Институте математики Сибирского федерального университета.

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор
Лейнартас Евгений Константинович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Майергойз Лев Сергеевич

доктор физико-математических наук, профессор
Чуешев Виктор Васильевич

Ведущая организация:

Сибирский государственный аэрокосмический
университет имени академика М.Ф. Решетнева

Защита диссертации состоится 13 ноября 2009 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан 12 октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н. А. Бушуева

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория конечно-разностных уравнений развивалась параллельно с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и в случае линейных уравнений имеет вполне законченный вид. Она нашла широкое применение как в теории дискретных динамических систем, так и в перечислительном комбинаторном анализе.

В многомерном случае ситуация значительно сложнее и сколько-нибудь законченной общей теории конечно-разностных уравнений не создано. Отметим работу H. Levy, F. Lessman[1], в которой для двумерного случая рассмотрены способы построения общих решений для некоторых видов разностных уравнений.

В монографии Д. Даджиона и О. Мерсеро[2] двумерные разностные уравнения использовались в теории цифровой обработки многомерных сигналов для конструирования цифровых рекурсивных фильтров. В случае двух переменных задача об устойчивости цифрового рекурсивного фильтра решена в работе А.К. Циха[3].

В работе M. Bousquet-Melou, M. Petkovšek[4] многомерные разностные уравнения изучались с точки зрения применения к задачам перечислительного комбинаторного анализа. В ней сформулирована задача Коши для многомерного линейного разностного уравнения и доказана теорема существования и единственности решения этой задачи.

В работе Е.К. Лейнартаса[5] приведена формула для решения задачи Коши с использованием понятия фундаментального решения.

Метод z-преобразования (метод производящих функций) является мощным средством исследования разностных уравнений как в теории дискретных динамических систем, так и в перечислительном комбинаторном анализе. Важный и естественный с точки зрения комбинаторики вопрос, решаемый в работе M. Bousquet-Melou и M. Petkovšek, состоит в том, как

[1] Levy H., Lessman F. Finite difference equations. London. Pitman LTD. 1959.

[2] Даджион Д., Мерсеро О. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988. 488 с.

[3] Цих А.К. Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных // Мат. сб. 1981. Т. 182. № 11. С. 1588-1612.

[4] Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Mathematics. 2000. V. 225. P. 51-75.

[5] Лейнартас Е.К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений // Сиб. мат. журнал. 2007. Т. 48. № 2. С. 335-340.

z-преобразование решения разностного уравнения зависит от z-преобразования начальных данных.

Последовательности Риордана впервые появились в работе L.W. Shapiro, S. Getu, W.-J. Woan, L. Woodson[6] в связи с изучением групп Риордана и были определены с помощью z-преобразования. В работах D. Baccherini, D. Merlini, R. Sprugnoli[7] показано, что такими последовательностями $\{r(x,y)\}$ описывается число путей на целочисленной решетке, количество узлов деревьев с помеченными вершинами на некотором уровне («level generating trees»), количество последовательностей Блума[8] длины x, имеющих y изолированных элементов. Также последовательность Риордана возникает в задаче о расстановке фигур на шахматной доске, изучавшейся в работах M. Abramson, W. Moser[9] и Г.П. Егорычева[10]. За последние годы появилось значительное число работ по данной тематике.

В одномерном случае известно, что z-преобразование числовой последовательности является рациональной функцией тогда и только тогда, когда эта последовательность удовлетворяет линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами. В многомерной ситуации это утверждение, вообще говоря, неверно. С другой стороны, рациональные функции являются простейшим из «наиболее полезных» классов производящих функций, согласно иерархии, предложенной Р. Стенли[11]: {рациональные производящие функции} $\subset$ {алгебраические производящие функции} $\subset$ {D-конечные производящие функции}.

Класс D-конечных производящих рядов представляется наиболее естественным с точки зрения перечислительного комбинаторного анализа, потому что, в частности, он замкнут относительно таких операций (преобразований) над кратными рядами, как нахождение сечения ряда и его диагонали, композиции Адамара и композиции Гурвица степенных рядов[12]. Отметим,

[6] Shapiro L.W., Getu S., Woan W.-J., Woodson L. The Riordan group // Discrete Applied Mathematics. 1991. V. 34. P. 229-239.

[7] Baccherini D., Merlini D., Sprugnoli R., Level generation trees and proper Riordan arrays // Applicable Analysis and Discrete Mathemamatics. 2008. № 2. P. 69-91 ; Merlini D. Generating functions for the area below some lattice paths // Disc. Math. and Th. Comp. S, AC. 2003. P. 217-228.

[8] Bloom D.M., Singles in a Sequence of Coin Tosses // The College Mathematics Journal. 1998. P. 307-344.

[9] Abramson M., Moser W. Combinations, successions and the n-kings problem // Math. Mag. 1966. V. 39. № 5. P. 269-273.

[10] Егорычев Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1977. 288 с.

[11] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990. 440 с. ; Его же. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2005. 767 с.

[12] Lipshits L. D-finite power series // J. Algebra. 1989. V. 122. P. 353-373.

что вопрос о рациональности (и алгебраичности) z-преобразования для диагональных многомерных последовательной (многомерных аналогов композиции Адамара и Гурвица) рассматривался в работах А.К. Циха, К.В. Сафонова, Е.К. Лейнартаса, М.М. Елина, Т.М. Садыкова.

Исследование асимптотики решений многомерных разностных уравнений имеет большое значение не только в комбинаторном анализе, но и в теории обработки многомерных цифровых сигналов, в частности, при исследовании устойчивости цифровых рекурсивных фильтров[13]. В многомерном случае возникает ряд трудностей принципиального характера, одной из которых считается отсутствие понятия кратного асимптотического ряда. Один из способов исследования асимптотического поведения кратной последовательности $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n_+$ – это изучение асимптотики на «диагоналях» $x = kp$, где p – фиксированная точка из $\mathbb{Z}^n_+$, а $k = 0, 1, 2, \ldots$.

В работе А.Г. Орлова[14] методы, предложенные А.К. Цихом, применялись для получения асимптотических оценок коэффициентов Тейлора алгебраических и мероморфных функций двух переменных. В случае функций с полюсами на объединении конечного числа гиперплоскостей оценки на коэффициенты Тейлора типа «O-большое» впервые приведены для $n = 2$ в заметке А.И. Макосия[15], а для $n > 2$ рассмотрены в упомянутых работах А.Г. Орлова. Этот случай представляет большой интерес с точки зрения перечислительного комбинаторного анализа. Например, в задачах о числе решеточных путей и задаче о покрытии костями домино соответствующая производящая функция представляет собой, как показано в работах R. Pemantle, M. Wilson[16], рациональную функцию двух переменных, знаменатель которой представляет собой произведение линейных множителей. Получившая существенное развитие в работах M. Forsberg, M. Passare и А.К. Циха[17] теория амеб была применена в работах Е.К. Лейнартаса, M. Passare и А.К. Циха[18] к исследо-

[13] Цих А.К. Цит. выше.

[14] Орлов А.Г. Об асимптотике коэффициентов Тейлора рациональных функций двух переменных // Изв. вузов. Матем. 1993. № 6. С. 26-33.

[15] Макосий А.И. К вопросу об асимптотике коэффициентов ряда Тейлора // Многомерный комплексный анализ. Красноярск: ИФ СО АН СССР. 1985. С. 224-227.

[16] Pemantle R., Wilson M. Asymptotics for multivariate sequences, part I: smooth points of the singular variety // J. Comb. Th. Series A97. P. 129-161.

[17] Forsberg M., Passare M., Tsikh A.. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas // Advances in Math. 2000. V. 151. P. 45-70.

[18] Лейнартас Е.К., Пассаре М., Цих А.К. Асимптотика многомерных разностных уравнений // УМН. 2005. Т. 60. № 5. С. 171-172 ; Их же. Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений // Мат. сборник. 2008. Т. 199. № 10. С. 87-104.

ванию асимптотики решений многомерных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Таким образом, рассматриваемые вопросы теории многомерных разностных уравнений являются актуальными.

Цель диссертации

Цель настоящей диссертационной работы – исследовать z-преобразование и асимптотику некоторых типов линейных разностных уравнений, возникающих в перечислительном комбинаторном анализе.

Методы исследования

В исследовании наряду с общими методами комплексного анализа использовалась также понятия, как многогранник Ньютона характеристического многочлена разностного уравнения, амеба многочлена и ее связь с разложениями рациональной функции в ряды Лорана. Доказательство алгебраичности преобразования Гурвица кратного ряда существенно опирается на понятие параметрического вычета Гротендика[19]. В основе исследований асимптотики решений многомерных разностных уравнений лежит многомерная версия теоремы Пуанкаре, полученная в совместной работе Е.К. Лейнартаса, М. Пассаре и А.К. Циха. В теореме об асимптотике фундаментальных решений используется теорема Е.К. Лейнартаса[20] о разложении рациональной функции на простейшие дроби.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и снабжены строгими доказательствами.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты диссертации представляют теоретический и практический интерес и могут быть применены в многомерном комплексном анализе, в теории многомерных разностных уравнений и перечислительной комбинаторике.

[19] Сафонов К.В., Цих А.К. Об особенностях параметрического вычета Гротендика и диагонали двойного степенного ряда // Изв. вузов. Матем. 1984. № 4. С. 51-58.

[20] Лейнартас Е.К. О разложении рациональных функций многих переменных на простейшие дроби // Изв. вузов. Математика. 1978. № 10. С. 47-52.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались: на Красноярском городском семинаре по многомерному комплексному анализу под руководством профессоров А.М. Кытманова и А.К. Циха (2002-2009 гг.), на Международных научных студенческих конференциях в Новосибирском государственном университете (Новосибирск, 2001, 2002, 2004 гг.), на Международной школе-конференции по анализу и геометрии, посвященной 75-летию Ю.Г. Решетняка (Новосибирск, 2004 г.), на Международной школе-конференции, посвященной памяти И.П. Митюка (Краснодар, 2005 г.), на летней школе-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу при Ярославском государственном педагогическом университете им. К.Д. Ушинского (Ярославль, 2009 г.), на Международной конференции «Аналитические функции многих комплексных переменных» (Красноярск, 2009 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[6].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав основного содержания, заключения и списка литературы из 52 наименований. Работа изложена на 78 страницах.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) и Государственного фонда естественных наук Китая (ГФЕН) в рамках совместного проекта «Комплексный анализ и его приложения» (проект №08-01-92208_ГФЕН) и гранта Сибирского федерального университета.

Содержание работы

Перейдем к изложению основных результатов диссертации.

Во введении приводится общая характеристика диссертации, а также кратко излагается содержание диссертации, указывается ее актуальность и научная новизна.

Первая глава диссертации посвящена описанию рациональных последовательностей Риордана как решений двумерных разностных уравнений специального вида.

В первом параграфе приведены общие сведения из теории многомерных разностных уравнений с постоянными коэффициентами, а также формулы для отыскания решений таких уравнений, полученные в работах Е.К. Лейнартаса, М. Пассаре и А.К. Циха, необходимые для изложения дальнейших результатов.

Обозначим через $x = (x_1, \ldots, x_n)$ точки n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, и $A = \{\alpha\}$ — конечное подмножество точек из $\mathbb{Z}^n$.

Разностным уравнением относительно неизвестной функции $f(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с постоянными коэффициентами c_α называется соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0, \qquad (1)$$

где c_α — некоторые постоянные коэффициенты из поля $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}^n_+$ – положительный октант в $\mathbb{Z}^n$

Характеристическим многочленом для разностного уравнения (1) назовем многочлен $P(z) := \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha$, где $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \ldots z_n^{\alpha_n}$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. *Многогранником Ньютона* $\mathcal{N}_P$ многочлена P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества A. Зафиксируем $m = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathcal{N}_P \cap \mathbb{Z}^n$ и обозначим $X_m = \mathbb{Z}^n_+ \setminus (m + \mathbb{Z}^n_+)$. Далее, пусть $\varphi : X_m \to \mathbb{C}$ — некоторая заданная функция.

Сформулируем задачу: найти решение уравнения (1), совпадающее на X_m с функцией φ:

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_m. \qquad (2)$$

Во втором параграфе приведено решение многомерного разностного уравнения вида

$$f(x + I) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(x + e_1 + \ldots [j] \ldots + e_n) = 0,$$

где $x \in \mathbb{Z}^n_+, I = (1, 1, \ldots, 1), c_j \in \mathbb{C}$, а e_j — это n-мерный единичный вектор, у которого только j-ая координата равна 1, а остальные координаты равны нулю, $j = 1, \ldots, n$.

В третьем параграфе рассматривается понятие последовательности Риордана, введенное в работе L.W. Shapiro и др. в связи с изучением групп Риордана, которое в дальнейшем нашло широкое применение в различных задачах перечислительного комбинаторного анализа.

Пусть $d_k, h_k \in \mathbb{C}$ и $d(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k-1}$ и $h(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k-1}$ – ряды Лорана, вообще говоря, формальные.

Определение 1.1. *Последовательностью Риордана, ассоциированной с парой $d(z), h(z)$, называется последовательность $\{r(x,y),(x,y) \in \mathbb{Z}_+^2\}$, производящая функция $\mathcal{D}(z,w)$ которой имеет вид*

$$\mathcal{D}(z,w) = \frac{d(z)}{w-h(z)} := \sum_{y=0}^{\infty} \frac{d(z)h^y(z)}{w^{y+1}}.$$

Определение 1.2. *Последовательность Риордана называется рациональной, если ряд $h(z)$ является разложением в окрестности бесконечно удаленной точки рациональной функции $h(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$, где $P(z) = \sum\limits_{\alpha=0}^{m} c_{\alpha 1} z^{\alpha}, Q(z) = \sum\limits_{\alpha} c_{\alpha 0} z^{\alpha}$ — многочлены от $z \in \mathbb{C}$ и $c_{m,1} \neq 0$.*

В четвертом параграфе приведен один из основных результатов диссертации: дано описание рациональных последовательностей Риордана как решений задачи Коши для двумерных разностных уравнений.

Теорема 1.2. *Двойная последовательность $\{r(x,y)\}_{(x,y)\in\mathbb{Z}_+^2}$, является рациональной последовательностью Риордана, определяемой парой $d(z)$ и $h(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, тогда и только тогда, когда она является решением задачи Коши для разностного уравнения*

$$[P(\delta_1)\cdot\delta_2 - Q(\delta_1)]\, r(x,y) = 0,$$

$$r(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in X_{m,1},$$

где функция $\varphi(x,y)$ задана на множестве $X_{m,1}$ следующим образом:

$$\varphi(x,y) := \operatorname{Res}\left\{ d(\xi)\left(\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\right)^y \xi^x \right\}.$$

В пятом параграфе приведены некоторые многомерные разностные уравнения и связанные с ними рациональные последовательности Риордана, возникающие в ряде задач перечислительного комбинаторного анализа.

Вторая глава посвящена изучию z-преобразования некоторых кратных последовательностей.

Производящая функция (z-преобразование) функции $f(x)$ целочисленных аргументов $x \in \mathbb{Z}_+^n$ определяется следующим образом:

$$F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{f(x)}{z^{x+I}}, \text{ где } I = (1, 1, \ldots, 1),$$

В первом параграфе приведен многомерный аналог теоремы Муавра для возвратных степенных рядов. А. Муавр рассмотрел под названием возвратных рядов степенные ряды $a_0 + a_1 z + \ldots + a_k z^k + \ldots$ с коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, образующими возвратную последовательность, т.е. удовлетворяющими соотношению вида

$$c_0 a_{m+p} + c_1 a_{m+p+1} + \ldots + c_m a_p = 0, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

где c_j — некоторые постоянные. Оказалось, что такие ряды всегда сходятся к рациональным функциям.

Для формулировки многомерного варианта теоремы Муавра о рациональности z-преобразования решения разностного уравнения нам потребуются следующие обозначения.

Рассмотрим всевозможные наборы $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, где $j_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$. Каждому такому набору J сопоставим «грань» Γ_J целочисленного прямоугольника $\Pi_m = \{x \in \mathbb{Z}^n : 0 \leqslant x_k \leqslant m_k, k = 1, \ldots, n\}$ следующим образом: $\Gamma_J = \{x \in \Pi_m : x_k = m_k, \text{ если } j_k = 1, \text{ и } x_k < m_k, \text{ если } j_k = 0\}$.

Пусть $\Phi(z) = \sum\limits_{\tau \in X_m} \dfrac{\varphi(\tau)}{z^{\tau+I}}$ – производящая функция начальных данных задачи (1)-(2). Для $\tau \in \Gamma_J$ обозначим суммы

$$\Phi_{\tau,J}(z) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\varphi(\tau + Jy)}{z^{\tau+Jy+I}} \text{ и } \Phi_J(z) = \sum_{\tau \in \Gamma_J} \Phi_{\tau,J}(z).$$

Если функцию $\varphi(x)$ начальных данных продолжить из множества X_0 на $\mathbb{Z}_+^n$ нулем, тогда $\Phi(z) = \sum\limits_J \Phi_J(z)$.

Теорема 2.2. *Производящая функция* $F(z)$ *решения задачи* (1)-(2) *и производящая функция начальных данных* $\Phi(z)$ *связаны соотношением*

$$P(z)F(z) = \sum_J \sum_{\tau \in \Gamma_J} \Phi_{\tau,J}(z) P_\tau(z),$$

где многочлены $P_\tau(z)$ *имеют вид* $P_\tau(z) = \sum\limits_{\substack{\alpha\in A \\ \alpha\nleqslant\tau}} c_\alpha z^\alpha$, *а запись* $\alpha \nleqslant \tau$ означает, что $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2_+ \setminus \{\alpha \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leqslant \alpha_j \leqslant \tau_j, j = 1, 2\}$.

Из этой теоремы легко получается

Теорема 2.3. *Производящая функция* $F(z)$ *решения задачи* (1)-(2) *рациональна тогда и только тогда, когда рациональна производящая функция* $\Phi(z)$ *начальных данных.*

Во втором параграфе приведены некоторые результаты, связанные с композицией Гурвица степенных рядов, а также вариант обобщения композиции Гурвцица для многомерных степенных рядов, полученный М.М. Елиным[21]. Теорема Гурвица о сложении особенностей относится к числу значимых результатов в теории распределения особенностей голоморфных функций одного переменного.

Будем рассматривать кратные ряды Лорана вида

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{a(\alpha)}{z^{\alpha+I}}, \quad a(\alpha) \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

которые сходятся в некоторой окрестности $\{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| > R_j, j = 1, \ldots, n\}$ бесконечно удаленной точки. Ряду (3) поставим в соответствие кратный степенной ряд

$$F(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_+} \frac{a(\alpha)}{\alpha!} z^\alpha,$$

который называется *преобразованием Бореля* ряда (3), при этом сами функции f и F называются *ассоциированными по Борелю.*

Композиция Гурвица для двух однократных рядов вида

$$f(z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{a(\alpha)}{z^{\alpha+1}} \quad \text{и} \quad g(z) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{b(\beta)}{z^{\beta+1}} \tag{4}$$

определяется, например, в работе Л. Бибербаха[22] следующим образом:

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha+\beta=m} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} a(\alpha) b(\beta) \right) \frac{1}{z^{m+1}}, \tag{5}$$

[21] Елин М.М. Многомерный аналог композиции Гурвица // Изв. вузов. Матем. 1985. №2. С. 22-27.
[22] Бибербах Л. Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967. 240 с.

и задача состоит в том, чтобы по известным особым точкам функций $f(z)$ и $g(z)$, определенных рядами (4), найти особые точки композиции $h(z)$. Приведем теорему Гурвица о сложении особенностей, решающую эту задачу, в изложении Бибербаха. Но прежде нам понадобятся следующие определения.

Суммой множеств A_1 и A_2 назовем дополнение теоретико-множественной суммы $A_1' + A_2' = \{a_1' + a_2' : a_1' \in A_1', a_2' \in A_2'\}$ до всей комплексной плоскости:

$$A_1 \oplus A_2 := (A_1' + A_2')', \quad \text{где } A' = \mathbb{C} \setminus A.$$

Теорема (Гурвиц, 1899) *Если функция $f(z)$ голоморфна в области A, содержащей множество $\{|z| > r_1\}$, а функция $g(z)$ голоморфна в области B, содержащей множество $\{|z| > r_2\}$, то функция $h(z)$ голоморфна в связной части открытого множества $A \oplus B$, содержащей внешность круга $\{|z| > r_1 + r_2\}$.*

Отметим, что композиция Гурвица (5) тесно связана с имеющим важное значение в теории распределения особенностей голоморфных функций преобразованием Бореля степенных рядов. А именно, если $F(z)$ и $G(z)$ — верхние функции преобразования Бореля функций $f(z)$ и $g(z)$ соответственно, тогда их произведение

$$F(z)G(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\alpha+\beta=m} \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} a(\alpha) b(\beta) \right) \frac{z^m}{m!}$$

является верхней функцией преобразования Бореля композиции Гурвица (5) рядов $f(z)$ и $g(z)$.

В третьем параграфе приведен вариант обобщения конструкции Гурвица для $n > 1$, который естественным образом связан с преобразованием Бореля кратных степенных рядов и многомерными аналогами теоремы Полиа.

Определение 2.1. *Для фиксированного вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ назовем преобразованием Гурвица ряда* (3) *однократный ряд вида*

$$f_\lambda(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{\|\alpha\|=m} \frac{\|\alpha\|!\, \lambda^\alpha}{\alpha!} a(\alpha) \right) \frac{1}{\xi^{m+1}}, \quad \text{где } \|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n. \tag{6}$$

Данная конструкция является обобщением классической композиции Гурвица степенных рядов. Действительно, при $n = 2$, $f(z_1, z_2) = f(z_1)g(z_2)$ и $\lambda = (1, 1)$ из соотношения (6) получим (5).

Подмножество комплексной плоскости $A \subset \mathbb{C}$ назовем *козвездой*, если оно содержит некоторую окрестность бесконечно удаленной точки и его дополнение $\mathbb{C} \setminus A$ до комплексной плоскости является звездой. Отметим, что для любого набора козвезд $A_j, j = 1, \ldots, n$ и вектора $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ множество вида $\lambda_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n A_n := \mathbb{C} \setminus \{\lambda_1 A_1' + \ldots + \lambda_n A_n'\}$ также является козвездой.

Одним из основных результатов данного параграфа является следующая

Теорема 2.5. *Пусть $A_j, j = 1, \ldots, n$ – козвездные области. Если функция*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{a(\alpha)}{z^{\alpha+I}},$$

голоморфна в области вида $A_1 \times \ldots \times A_n \subset \mathbb{C}^n$, то ее преобразование Гурвица голоморфно в козвездной области $\lambda_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \lambda_n A_n \subset \mathbb{C}$.

Для $n = 1$ классическая композиция Гурвица (5) рациональных функций $f(z)$ и $g(z)$ является рациональной функцией (см. книгу Л. Бибербаха), причем ее особые точки получаются путем сложения особых точек функций (4). Для $n = 2$, вообще говоря, из рациональности функции не следует рациональность ее преобразования Гурвица. В четвертом параграфе показано, что преобразование Гурвица рациональной функции для $n = 2$ всегда является функцией алгебраической.

Теорема 2.6. *При $n = 2$ преобразование Гурвица (6) рациональной функции $P(z)/Q(z)$, голоморфной в бесконечно удаленной точке, является алгебраической функцией, особые точки которой содержатся в множестве точек $\xi \in \mathbb{C}$ вида*

$$\xi = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2,$$

где (z_1, z_2) — решения системы уравнений

$$Q^*(z_1, z_2) = \lambda_2 Q^*_{z_1}(z_1, z_2) - \lambda_1 Q^*_{z_2}(z_1, z_2) = 0.$$

В **третьей главе** описана асимптотика некоторых многомерных последовательностей.

В первом параграфе получена асимптотика рациональных последовательностей Риордана, причем доказательство существенно опирается на факт, что рациональные последовательности Риордана являются решениями двумерного разностного уравнения специального вида, и на результаты работ Лейнартаса Е.К., Пассаре М., Циха А.К.

Для дальнейшего изложения потребуется понятие амебы многочлена и некоторые её свойства.

Амебой $\mathcal{A}_R$ многочлена $R(z)$ называется образ множества $\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C}^n : R(z) = 0\}$ при логарифмическом проектировании

$$\mathrm{Log} : (z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|).$$

Дополнение к амебе состоит из конечного числа связных компонент, ограниченного снизу числом вершин многогранника Ньютона, а сверху — числом целых точек пересечения $\mathcal{A}_Q \cap \mathbb{Z}^n$. Кроме того[23], каждой вершине ν многогранника Ньютона можно сопоставить непустую связную компоненту E_ν дополнения амебы $\mathcal{A}_Q$ и разложение в ряд Лорана функции $1/Q(z)$, сходящееся в $\mathrm{Log}^{-1} E_\nu$.

Отметим лишь, что $E_{m,1}$ — это компонента дополнения амебы, соответствующая вершине многогранника Ньютона $(m, 1)$, для которой сформулирована задача Коши, а через $\Omega_{m,1}$ обозначен конус, порожденный векторами $\{(m,1) - (\tau_1, \tau_2)\}$, где $(\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{N}_R$.

Теорема 3.1. *Пусть функция $d(z)$ голоморфна вне особых точек функции $h(z) = \dfrac{Q(z)}{P(z)}$. Если все корни многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ простые и различные по модулю (каждого многочлена в отдельности) и граница амебы характеристического многочлена $R(z,w) = P(z)\cdot w - Q(z)$ гладкая, тогда для всякого направления $(p,q) \in \mathrm{Int}\,\Omega_{m,1}$ существует единственная точка $(z_0(p/q), w_0(p/q))$, такая, что ее логарифмический образ $\mathrm{Log}(z_0, w_0) \in \partial E_{m,1}$, и*

$$r(x,y) \sim \frac{d(z_0)}{\sqrt{2\pi\lambda q H(z_0)}} \left[z_0^p w_0^q\right]^\lambda, \; x = \lambda p,\; y = \lambda q,\; \lambda \to \infty,$$

где $H(z) = \dfrac{Q''(z)}{Q(z)} - \dfrac{P''(z)}{P(z)} + 2\,\dfrac{p}{q}\,\dfrac{1}{z}\dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{p}{q}\left(1 + \dfrac{p}{q}\right)\dfrac{1}{z^2}.$

[23] Forsberg M., Passare M., Tsikh A. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas // Advances in Math. 2000. V. 151. P. 45-70.

Отметим, что точка (z_0, w_0) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} P(z)w - Q(z) = 0, \\ z\left(\dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{Q'(z)}{Q(z)}\right) = \dfrac{p}{q}. \end{cases}$$

Во втором и третьем параграфах найдена асимптотика фундаментальных решений многомерных разностных уравнений.

Пусть $P(z,w) = P_1(z,w)\cdot\ldots\cdot P_m(z,w)$ – произведение многочленов от переменных $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ вида $P_i(z,w) = zw - b_i z - a_i w, a_i > 0, b_i > 0, i = 1, \ldots, m.$

Вершине $\nu = (m,m)$ многогранника Ньютона $\mathcal{N}_P$ соответствует непустая компонента E_ν, в которой рациональная функция $\dfrac{1}{P(z,w)}$ разлагается в ряд Лорана:

$$\frac{1}{P(z,w)} = \sum_{(x,y)\in K_\nu+\nu} \frac{f(x,y)}{z^x w^y},$$

где K_ν — конус, построенный на векторах $\nu - \alpha$, где $\alpha \in \mathcal{N}_P$.

После замены переменных $z \to \dfrac{1}{z}, w \to \dfrac{1}{w}$ получим разложение в начале координат в ряд Тейлора рациональной функции

$$F(z,w) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m}(1 - a_i z - b_i w)} = \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_+^2} f(x,y) z^x w^y. \tag{7}$$

Таким образом, задача об отыскании асимптотики фундаментальных решений разностных уравнений вида $P(\delta_1, \delta_2) f(x,y) = 0$ сводится к отысканию асимптотики коэффициентов Тейлора рациональной функции $F(z,w)$ с линейными особенностями.

Рассмотрим ситуацию при дополнительном ограничении: система прямых $\mathcal{V}_i = \{1 - a_i z - b_i w = 0\}_{i=1}^m$ находится в общем положении в том смысле, что любые две из них пересекаются, а любые три – не пересекаются.

Обозначим $P_0 = z$ и $P_{m+1} = w$. Пусть многоугольник $M \subset \mathbb{R}_+^2$ определен системой линейных неравенств $P_i(z,w) > 0$, $i = 0, \ldots, m+1$. Пусть (z_i, w_i) – решение системы уравнений $P_i(z,w) = qzP_z(z,w) - pwP_w(z,w) = 0$ для $i = 1, \ldots, m$, а (z_{ij}, w_{ij}) – это решение системы линейных уравнений $P_i(z,w) = P_j(z,w) = 0$ с определителем $\Delta_{ij} = a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, $i \neq j$, и $i, j = 1, \ldots, m$, а через P_z, P_w обозначены производные от $P(z,w)$ по переменным z и w соответственно.

Определим в положительном октанте $\mathbb{R}^2_+$ конусы двух видов:

$$K_i = \{(p,q) \in \mathbb{R}^2_+ : \max_M z^p w^q = \max_{\mathcal{V}_i} z^p w^q = z_i^p w_i^q\},$$
$$\Omega_{ij} = \{(p,q) \in \mathbb{R}^2_+ : \max_M z^p w^q = z_{ij}^p w_{ij}^q\}.$$

Асимптотику коэффициентов Тейлора $f(x,y)$ функции $F(z,w)$ описывает

Теорема 3.3. *Для рациональной функции вида* (7) *почти для любой* (p,q)*-диагонали* $x = kp, y = kq, k \to +\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$f(x,y) \sim \begin{cases} \dfrac{c_i}{\sqrt{k}} \dfrac{1}{z_i^{x+1} w_i^{y+1}}, & \text{если } (p,q) \in K_i \\ \dfrac{A_{i,i+1}}{\Delta_{i,i+1}} \dfrac{1}{z_{i,i+1}^{x+1} w_{i,i+1}^{y+1}}, & \text{если } (p,q) \in \Omega_{i,i+1} \end{cases},$$

где $z_i = \dfrac{1}{a_i}\dfrac{p}{p+q}, w_i = \dfrac{1}{b_i}\dfrac{q}{p+q}$ *– решение системы* $Q_i = qzQ_z - pwQ_w = 0$*,* $\Delta_{i,i+1}$ *– определитель системы линейных уравнений* $Q_i = Q_{i+1} = 0$*, пара* $(z_{i,i+1}, w_{i,i+1})$ *– решение этой системы, а* c_i *– некоторая константа.*

Основные результаты

Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1) приведено описание рациональных последовательностей Риордана как решений задачи Коши для некоторого класса двумерных разностных уравнений,

2) найдена формула для z-преобразования решения задачи Коши для многомерного разностного уравнения (при некоторых ограничениях на многогранник Ньютона) и приведено необходимое и достаточное условие рациональности данного z-преобразования,

3) для многомерного аналога композиции Гурвица получена оценка на область, в которую эта композиция аналитически продолжается и для случая двух переменных доказана алгебраичность данной композиции,

4) найден главный член асимптотики рациональных последовательностей Риордана и исследована асимптотика фундаментального решения некоторого класса двумерных линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

Работы автора по теме диссертации

[1] Ляпин А.П. Об асимптотике числа расстановок фигур на шахматной доске // Международная школа конференция по анализу и геометрии, посвященная 75-летию ак. Ю.Г. Решетняка: тез. докладов. Новосибирск, 2004. С. 171-172.

[2] Ляпин А.П. Обобщенная композиция Гурвица диагонального вида // Комплексный анализ и его приложения: Тез. докладов Международной школы-конференции, посвященной памяти профессора И.П. Митюка. Краснодар, 2005. С. 71-72.

[3] Ляпин А.П. О рациональности многомерных возвратных рядов // Тезисы международной конференции «Аналитические функции многих комплексных переменных». Красноярск, 2009. С. 24-25.

[4] Ляпин А.П. Об одном варианте многомерной композиции Гурвица // Вопросы математического анализа: сб. научных статей. Вып. 9. Красноярск, КГТУ, 2006, с. 26-34.

[5] Ляпин А.П. Асимптотика коэффициентов Тейлора рациональной функции двух переменных с линейным множеством особенностей // Вестник КрасГУ. Физико-математические науки. 2006. №1. С. 93-97.

[6] Ляпин А.П. Последовательности Риордана и двумерные разностные уравнения // Журнал СФУ. Математика и физика. 2009. Т. 2. № 2. С. 210-220.