УДК 512.542+512.544 На правах рукописи

ЛЕВЧУК Денис Владимирович

ПОРОЖДАЮЩИЕ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКЦИИ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2009

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и математической логики Сибирского федерального университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор НУЖИН Яков Нифантьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор БАРДАКОВ Валерий Георгиевич
	доктор физико-математических наук, профессор ЕГОРЫЧЕВ Георгий Петрович
Ведущая организация:	Институт математики и механики УрО РАН, г.Екатеринбург

Защита состоится 6 марта 2009 года в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный,79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан   февраля 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного совета   Бушуева Н.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы. Многие задачи теории групп и смежных разделов математики редуцируются к нахождению порождающих элементов, с заданными свойствам. Хорошо известно, что классические группы порождаются своими простейшими элементами. Так, например, симметрические группы порождаются транспозициями, а простые классические линейные группы или более обобщенно — простые группы лиева типа — порождаются корневыми элементами; в обоих случаях мощность порождающего множества растет вместе с ростом мощности самой группы. Особый интерес вызывают порождающие множества минимальной мощности относительно некоторых свойств.

Группы, порожденные тремя инволюциями, две из которых перестановочны, будем называть $(2{\times}2{,}2)$-порожденными, причем не исключаются случаи, когда какие-то две или даже все три инволюции совпадают. Ясно, что если какая-то группа допускает нетривиальный гомоморфный образ, который не является $(2{\times}2{,}2)$-порожденной группой, то она также не будет $(2{\times}2{,}2)$-порождена. В 1980 г. В.Д.Мазуров поставил следующий вопрос: Какие конечные простые группы являются $(2{\times}2{,}2)$-порожденными? Ответ на этот вопрос известен и для основного массива конечных простых групп он положителен, но существуют и бесконечные серии линейных

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00824a).

групп небольших размерностей над конечными полями которые не являются (2×2,2)-порожденными. Для знакопеременных групп и групп лиева типа над конечными полями ответ на вопрос Мазурова дал Я.Н.Нужин (позднее вопрос был решен и для оставшихся 26 спорадических групп). Он же записал в "Коуровской тетради" следующий вопрос [3, вопрос 15.67]:

Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ являются (2×2,2)-порожденными?

К настоящему времени этот вопрос полностью решен только для групп Шевалле типа A_l, [5]: *Группа* $PSL_n(\mathbb{Z})$, $n \geq 2$, *над кольцом целых чисел* $\mathbb{Z}$ *тогда и только тогда является* $(2 \times 2, 2)$-*порожденной, когда* $n \geq 5$.

Отметим, что М.К.Тамбурини и П.Цукка [2] установили (2×2,2)-порождаемость группы $SL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 14$. Также, как и кольцо целых чисел, кольцо целых Гауссовых чисел $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$, $i^2 = -1$, является 1-порожденным, то есть порождается одним элементом, в данном случае элементом i, относительно операций сложения и умножения. Поэтому естественно рассматривать вопрос:

(A) *Какие группы* $PSL_n(Z + iZ)$ *над кольцом целых Гауссовых чисел являются* $(2 \times 2, 2)$-*порожденными ?*

В этом случае, как и для кольца целых чисел ответ не является единообразным. Из [4] следует, что группы $PSL_2(9)$ и $PSL_3(9)$ не являются (2×2,2)-порожденными. Поэтому в силу гомоморфизма $PSL_n(Z + iZ) \to PSL_n(9)$ группа $PSL_n(Z + iZ)$ не является

(2×2,2)-порожденной при $n = 2, 3$.

В Коуровской тетради С.А. Сыскин записал вопрос:

(B) *Для каждой известной простой конечной группы G найти такое максимальное число n, что прямое произведение n экземпляров группы G порождается двумя элементами* [3, вопрос 12.86].

Вопрос восходит к статье [1] Ф. Холла 1936 года. В ней он определил для произвольной группы G число $\varphi_n(G)$, как число всех n-баз группы G, то есть упорядоченных порождающих наборов из n ее элементов. Функция φ_n в [1] названа n-той функцией Эйлера. Для циклической группы G конечного порядка $|G|$ имеем $\varphi_1(G) = \varphi(|G|)$, где φ есть обычная арифметическая функция Эйлера. Как известно, любая конечная простая группа G порождается двумя элементами; для нее $\varphi_2(G) > 0$.

Другой инвариант Ф. Холла наиболее естественно определяется для конечной простой неабелевой группы G; это наибольшее число $d = d_n(G)$ такое, что прямое произведение d групп, изоморфных G, есть n-порожденная группа [1, 1.6]. Таким образом, вопрос С.А. Сыскина заключается в вычислении инварианта $d_2(G)$.

Ф. Холл [1] установил связь инвариантов и вычислил инварианты $d_2(G)$, $\varphi_2(G)$ явно для групп подстановок небольших степеней и для групп PSL_2 над полем простого порядка. Н. М. Сучков и Д. М. Приходько [7] решили вопрос С.А. Сыскина для групп Сузуки и групп $PSL_2(q)$ над полем четного порядка q.

Цель диссертации – исследование вопросов (А) и (Б).

Методы исследования. Используются как классические методы теории групп и колец, так и методы разработанные в Красноярской алгебраической школе.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Диссертация носит теоретический характер.

Апробация диссертации. Результаты диссертации были представлены на международных алгебраических конференциях в Санкт-Петербурге (2007), Красноярске (2007), Москве (2008), на V конгрессе женщин-математиков (г. Красноярск, 2008), на Красноярском алгебраическом семинаре.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [8]—[13], включая публикацию из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 52 страницах и включает введение, две главы, список литературы. Номер теоремы, леммы и др. включает последовательно номер главы и их порядковый номер. Список литературы включает 26 наименований.

Содержание диссертации

В диссертации получены следующие основные результаты:

— доказано, что проективная специальная линейная группа размерности $n \geq 7$ над кольцом целых Гауссовых чисел порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны;

— для функции Ф. Холла, обобщающей функцию Эйлера, вычисляются значения на группах Ри в характеристике 3 (частичное решение вопроса о двупорожденных декартовых степенях конечных простых групп).

В параграфе 1.1 устанавливаются вспомогательные результаты о порождающих множествах группы $PSL_n(R)$ над произвольным Евклидовым кольцом R, которые имеют и самостоятельный интерес. В параграфе 1.2 указываются тройки инволюций, две из которых перестановочны, а в следующих двух параграфах устанавливается, что они порождают группу $PSL_n(Z+iZ)$ при $n \geq 7$.

Основным результатом главы 1 является следующая теорема. Она опубликована для случаев $n \geq 8$ совместно с Я.Н.Нужиным в статьях [8] и [9]. Случай $n = 7$ опубликован автором в статьях [11], [13] и [14].

Теорема 1.1 *При $n \geq 7$ проективная специальная линейная группа $PSL_n(Z+iZ)$ над кольцом целых Гауссовых чисел $Z+iZ$ является (2×2,2)-порожденной.*

Во второй главе диссертации изучается вопрос (B) для групп лиева типа ранга 1. Параграф 2.1 второй главы посвящен постановке задач. В лемме 2.1 приводится установленная Ф. Холлом связь инвариантов: $\varphi_n(G) = d_n(G) \cdot |Aut\ G|$.

В параграфе 2.2 приводятся свойства групп лиева типа ранга

1, их основные подгруппы, известное семимерное матричное представление групп Ри над полем характеристики 3.

Далее, исследуются инварианты $\varphi_2(G)$ и $d_2(G)$, в первую очередь, для простых групп Ри; они обладают неразрешимой подгруппой M с неединичным разрешимым радикалом.

Напомним, что *разрешимый радикал* $S(M)$ *произвольной группы* M есть, по определению, ее наибольшая разрешимая нормальная подгруппа. В исследованных в [1] и [7] простых группах каждая неразрешимая подгруппа имеет единичный разрешимый радикал.

Множество всех пар элементов группы $G(q)$ лиева типа, лежащих в какой-либо подгруппе с неединичным разрешимым радикалом, далее обозначаем через $W(G)$ или, кратко, W. Совокупность всех пар из W с первым элементом порядка t обозначаем через W_t.

В § 2.3 доказывается основное рекуррентное соотношение.

Теорема 2.2. *Если* $G(q)$ *– простая группа Ри* $Re(q)$, *то*

$$\varphi_2(G(q)) = |G(q)|^2 - |G(q)| \sum_{GF(m)\subset GF(q)} \varphi_2(G(m))/|G(m)|$$
$$-|W| - \varphi_2(SL_2(8)) \cdot (|G(q)|/|G(3)|). \qquad (1)$$

Вычислениям чисел $|W_t|$ и $|W|$ посвящен заключительный параграф 2.4.

Основные результаты главы 2 опубликованы в [10] и [12].

Автор благодарен своему научному руководителю Я.Н. Нужину за помощь при постановке задач и в подготовке работ.

Признателен сотрудникам кафедры алгебры и математической логики и института математики Сибирского федерального университета за хорошие условия для работы над диссертацией.

Список литературы

[1] *Hall Ph.,* The Eulerian functions of a group // Qurt. J. Math. -1936. -Vol.7. -P.134-151.

[2] *Tamburini M.C., Zucca P.,* Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // J. of Algebra. -1997. -Vol.195. -P. 650-661.

[3] Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). // 15-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН. -2002.

[4] *Нужин Я.Н.* Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики II // Алгебра и логика. -Т.36. -1997. -№ 4. -С. 422-440.

[5] *Нужин Я.Н.* О порождаемости группы $PSL_n(Z)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавказский матем. журнал. -2008. -№ 1. -С. 42-49

[6] *Приходько Д.М.,* О числе пар порождающих элементов некоторых групп $L_2(q)$ // Материалы XXXIV научной студенческой конференции. Красноярск: КрасГУ. -2001. -С. 91-102.

[7] *Сучков Н.М., Приходько Д.М.* О числе пар порождающих групп $L_2(2^m)$ и $Sz(2^{2k+1})$ // Сиб. мат. журн. -2001. -Т.42. -N 5. -С. 1162-1167.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[8] *D.V.Levchuk, Ya.N.Nuzhin* On the (2x2,2) - generation of the groop $PSL_n(Z + iZ)$ // Intern. Algebr. Conf, dedicated to the 100th anniversary of D.K.Faddeev. St-Peterburg: MI RAN. -2007. -P.134.

[9] *D.V.Levchuk, Ya.N.Nuzhin* On generation of the groop $PSL_n(Z+iZ)$ by three involutions, two of which commute // Journal of Siberian Federal University, Math and Physics. -2008. -1(2). -P.133-139.

[10] *Д.В.Левчук* Функции Ф.Холла на группах лиева типа ранга 1 // Владикавказский математический журнал. -2008. -Т.10. -Выпуск 1. -С.37-39.

[11] *Д.В.Левчук* Порождаемость группы $PSL_7(Z+iZ)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // V Всесибирский конгресс женщин-математиков, СФУ. -2008г. -С.258.

[12] *Д.В.Левчук* О двупорожденных декартовых степенях простых групп Ри // Межд.алгеб.конф посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша, тезисы докладов. Москва: МГУ. -2008. -С.155-156.

[13] *Д.В.Левчук* О порождаемости группы $PSL_7(Z+iZ)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Препринт №4. -Красноярск: ИВМ СО РАН. -2008. -9 с.

[14] *Д.В.Левчук* Порождаемость группы $PSL_7(Z+iZ)$ тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Вестник НГУ. -2009. -Выпуск 1. -С.35-38.