На правах рукописи

Бабанская Олеся Мирославовна

БОЛЬШИЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2008

Работа выполнена в ГОУ ВПО «Томский государственный университет» на кафедре алгебры

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Крылов Пётр Андреевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Сучков Николай Михайлович

кандидат физико-математических наук, профессор
Ларин Сергей Васильевич

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Московский педагогический государственный университет»

Защита диссертации состоится 28 ноября 2008 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, проспект Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан «____» октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Н.А. Бушуева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Теория абелевых групп является одной из важных ветвей алгебры. Абелевы группы тесно связаны с модулями, кольцами, топологическими группами, теорией множеств. Изучение абелевых групп и ряда связанных с ними объектов (например, группы Hom) представляет значительный интерес как для алгебры, так и для ее приложений.

В теориях абелевых групп и модулей исключительно важно понятие прямой суммы. Почти все структурные теоремы об абелевых группах включают в себя, явно или неявно, некоторое прямое разложение.

Хорошо также известна важная роль отображений различных алгебраических систем, среди которых особое значение имеют гомоморфизмы. Одной из исключительных особенностей абелевых групп является то, что множество всех гомоморфизмов Hom(A, B) из группы A в группу B является группой относительно поточечного сложения гомоморфизмов. Изучение строения этой группы представляет большой интерес для теории абелевых групп, теории колец и модулей.

Между группами гомоморфизмов с одной стороны, прямыми суммами и произведениями абелевых групп с другой стороны, имеются разнообразные соотношения. Например, часто используются естественные изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}\left(A, \prod_{i\in I} B_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i),$$

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{i\in I} B_i, A\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(B_i, A).$$

Если же существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}\left(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\right) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i),$$

то говорят, что группа A обладает некоторым свойством малости.

Наличие изоморфизма

$$\mathrm{Hom}\left(\prod_{i\in I} B_i, A\right) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(B_i, A)$$

связано с понятием узкой группы. Теория узких групп представлена в [9, §94, §95]. Малые абелевы группы и модули и различные их обобщения активно изучаются в последнее время (см., например, [5], [12]). Отметим, что малые модули называют также дуально узкими.

В диссертации рассматривается ситуация, когда

$$\mathrm{Hom}\left(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\right) = \mathrm{Hom}\left(A, \prod_{i\in I} B_i\right),$$

т.е. для всякого гомоморфизма $\varphi : A \to \prod_{i\in I} B_i$ выполняется включение $\varphi A \subseteq \bigoplus_{i\in I} B_i$. Это эквивалентно также существованию естественного изоморфизма

$$\mathrm{Hom}\left(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i).$$

Пусть K – какое-то множество абелевых групп. Абелева группа A называется K-большой, если для любых групп B_i из K ($i\in I$) справедливо равенство

$$\mathrm{Hom}\left(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\right) = \mathrm{Hom}\left(A, \prod_{i\in I} B_i\right).$$

В некоторых исследованиях, связанных с гомоморфизмами абелевых групп, K-большие и близкие к ним группы играют определенную роль. Например, при изучении группы Hom(A, B) как инъективного модуля над кольцом эндоморфизмов группы A или B важную роль играет свойство, похожее на основное свойство K-больших групп (см. [6] и [14, глава 4]). Отметим, что это свойство служит аналогом того факта, что $\bigoplus_{p\in T} Z(p)$ есть вполне инвариантная (по-другому, вполне характеристическая) подгруппа в $\prod_{p\in T} Z(p)$, где T – некоторое бесконечное множество простых чисел.

Исследование K-больших групп представляет интерес для теории абелевых групп и их групп гомоморфизмов.

Цель диссертационной работы состоит в изучении абелевых групп, больших относительно некоторых множеств групп K. Основное внимание уделяется случаям, когда K состоит из циклических групп простых порядков и групп целых p-адических чисел для различных простых p. Замечательно, что первый случай тесно связан со свойствами подгруппы Фраттини. Подгруппа Фраттини произвольной (некоммутативной) группы была введена в [13]. Различные результаты об этой подгруппе содержатся в [1], [4], [7], [10]. Она часто привлекает внимание специалистов (см., например, [2], [3]).

Основные задачи

В соответствии с целью работы выделены следующие задачи исследования:

1) Получить общие результаты для K-больших абелевых групп относительно некоторого множества K абелевых групп.
2) Изучить группы, большие относительно множества M циклических групп простых порядков, и найти связь подгруппы Фраттини абелевой группы с данными большими группами.
3) Исследовать группы большие относительно множества групп целых p-адических чисел для различных простых p.
4) Найти связи между группами большими относительно некоторых множеств групп без кручения.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основными результатами работы можно считать следующие.

1. Получены общие результаты о больших группах относительно некоторого множества K абелевых групп. Введено более широкое понятие обобщенно K-большой группы, установлены ее свойства, изучены группы большие относительно некоторых множеств групп без кручения, а также рассмотрена связь K-больших и обобщенно K-больших групп. Доказано, что только ограниченные группы являются обобщенно K-большими относительно любого множества групп K.
2. Дано описание периодических групп, групп без кручения, больших относительно бесконечного фиксированного множества циклических групп простых порядков, т.е. $M=\{Z(p) \mid p \in T, T$ – бесконечное множество простых чисел$\}$. Получен критерий того, чтобы группа без кручения была большой

относительно указанного множества групп, этот критерий применен к некоторым известным группам без кручения. Для смешанных групп найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы произвольная смешанная группа была M-большой.

3. Исследованы ситуации, когда подгруппа Фраттини $\Phi(A)$ равна нулю для периодической, группы без кручения и смешанной группы A. Получен критерий, когда $\Phi(A)=0$ для произвольной абелевой группы A .
4. Установлена связь подгруппы Фраттини произвольной группы A с M-большими группами, причем $M=\{Z(p) \mid p \in P$, P – множество всех простых чисел$\}$. Даны применения к группам без кручения и смешанным группам, а также уточнено строение фактор-группы $A/\Phi(A)$.
5. Получено полное описание групп, больших относительно произвольного бесконечного множества групп целых p-адических чисел для различных p, т.е. $K=\{J_p| \ p \in T\}$. Показано, что в отличие от M-больших групп, для данного множества K случай смешанной группы сводится к группам без кручения. Также заметное отличие наблюдается и с группами без кручения.
6. Найдены различные связи между группами большими относительно некоторых множеств групп без кручения.

Методы исследования

В диссертации используются методы теории абелевых групп.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты данной работы имеют теоретическое значение и могут быть использованы в дальнейших исследованиях групп гомоморфизмов абелевых групп и модулей. Кроме того, они могут найти применение в качестве материала для специальных курсов по теории абелевых групп в госуниверситетах.

Апробация работы

Основные результаты настоящей диссертации докладывались и обсуждались на алгебраическом семинаре ТГУ (руководитель – доктор физико–математических наук, профессор Крылов П.А.); на Всероссийских симпозиумах «Абелевы группы» (г. Бийск, 2005 г., 2006 г.); на конференции, посвященной 300-летию со дня рождения Л. Эйлера (г. Томск, ТГУ, 2007 г.). Они были представлены на VI Международной конференции, посвященной 100-летию Н.Г. Чудакова (г. Саратов, 2004 г.); на XLIII Международной научной студенческой конференции «Студент и научно-технический прогресс» (г. Новосибирск, 2005 г.); на Международной конференции «Алгебра и ее приложения» (г. Красноярск, 2007 г.); на Международном российско-китайском семинаре «Алгебра и логика» (г. Иркутск, 2007 г.); на Всероссийской конференции по математике и механике с международным участием (г. Томск, 2008 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в одиннадцати работах, из которых три статьи. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, списка основных обозначений, трёх глав, списка использованной литературы. Главы I и III содержат по два параграфа, глава II – четыре параграфа. Работа изложена на 74 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Введение

Введение содержит обоснование актуальности решаемых в работе задач, а также изложение основных полученных результатов.

Далее везде под словом «группа» понимается «абелева группа».

Глава 1. Общие результаты для *K*-больших групп

В данной главе вводится понятие группы большой относительно некоторого множества K абелевых групп.

Пусть K – некоторое множество абелевых групп. Группу A назовем *большой относительно* K или, кратко K-*большой*, если для любых групп $B_i \in K$ ($i \in I$, I – некоторое индексное множество, мощность которого не превосходит мощности K) выполняется равенство

$$\operatorname{Hom}\left(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\right) = \operatorname{Hom}\left(A, \prod_{i\in I} B_i\right). \quad (1)$$

Равенство (1) равносильно тому, что для всякого гомоморфизма $\omega : A \to \prod_{i\in I} B_i$ выполняется включение $\omega A \subseteq \bigoplus_{i\in I} B_i$, то есть $\omega : A \to \bigoplus_{i\in I} B_i$.

В ***первом параграфе*** главы устанавливаются некоторые первичные свойства K-больших групп.

1) *Если A – K-большая группа и* $A = C \oplus B$, *то C тоже будет K-большой группой.*

2) *Если $A_1,\ldots,A_n$ – K-большие группы и* $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, *то A – K-большая группа.*

3) *Если A – K-большая группа, X – подгруппа в A, то фактор-группа A/X – K-большая группа.*

Предложение 1.1.1. *Не существует групп больших относительно любого множества групп.*

Предложение 1.1.2. *В определении K-большой группы можно ограничиться счетным множеством групп B_i .*

Во ***втором параграфе*** обобщается понятие K-большой группы.

Назовем группу A *обобщенно K-большой*, если для любых групп $B_i \in K$ ($i \in I$) и любого гомоморфизма $\omega : A \to \prod\limits_{i \in I} B_i$ существует $n \in N$ такое, что $\omega(nA) \subseteq \bigoplus\limits_{i \in I} B_i$. Ясно, что K–большая группа является обобщенно K-большой. Обратное не всегда верно, что видно из предложения 1.1.1 и теоремы 1.2.1.

В данном параграфе получаются свойства обобщенно K-больших групп, подобные свойствам K-больших групп.

Основным результатом главы является

Теорема 1.2.1. *Группа является обобщенно большой относительно каждого множества групп тогда и только тогда, когда она ограниченная.*

Доказаны также следующие предложения.

Предложение 1.2.2. *Любая периодическая группа будет обобщенно K-большой (K-большой), если K – произвольное множество групп без кручения.*

Предложение 1.2.3. *Любая группа без кручения не является K-большой (обобщенно K-большой) группой, если K содержит счетное число копий группы Q .*

Предложение 1.2.4. *Смешанная группа не является обобщенно K-большой (K-большой), если K – такое множество как в предложении 1.2.3.*

Глава 2. Группы, большие относительно множества M={ $Z(p)$ | $p \in T$ }

В данной главе изучаются группы, большие относительно бесконечного фиксированного множества циклических групп простых порядков. Пусть T – произвольное, но фиксированное, бесконечное множество простых чисел. Положим $V = \bigoplus_{p\in T} Z(p)$ и $\overline{V} = \prod_{p\in T} Z(p)$. Существенным для дальнейшего является то, что $\overline{V}$ – сервантно инъективная группа [8, §38].

В ***первом параграфе*** исследуются периодические группы и группы без кручения, большие относительно M. Показано, что всякая периодическая группа является большой относительно данного множества групп.

Для ненулевого элемента x группы без кручения X определим множество простых чисел $\theta(x) = \{ p \in P \mid h_p(x) = 0 \}$, где $h_p(x)$ – p-высота элемента x в группе X.

Замечание. *Если X – группа без кручения и ненулевые элементы $x, y \in X$ линейно зависимы (т.е. существуют ненулевые числа $s,t \in Z$ такие, что $sx = ty$), то $\theta(x) \cap T$ – конечное множество тогда и только тогда, когда $\theta(y) \cap T$ – конечное множество.*

На основании замечания получается, что при рассмотрении вопросов о M-больших группах можно заменять элементы на линейно зависимые от них элементы.

Получен следующий критерий.

Теорема 2.1.3. *Группа A без кручения является M-большой тогда и только тогда, когда для каждого ненулевого элемента $x \in A$ множество $\theta(x) \cap T$ является конечным.*

Теорема 2.1.4. *Пусть A – M-большая группа. Тогда любая сервантная подгруппа B группы A также M-большая группа.*

Теорема 2.1.3 применяется к некоторым известным группам без кручения.

Следствие 2.1.5. *Сепарабельная группа A без кручения является M-большой тогда и только тогда, когда любое ее прямое слагаемое ранга* 1 *является M-большой группой.*

Следствие 2.1.6. *Вполне разложимая группа* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ $(r(A_i) = 1$ *для всех* $i \in I)$ *является M-большой тогда и только тогда, когда в каждой группе* A_i *найдется ненулевой элемент* a_i *такой, что* $\theta(a_i) \cap T$ *– конечное множество.*

Следствие 2.1.7. *Группа* $A = \prod_{i \in I} A_i$ *(*A_i *– группы без кручения произвольного ранга для любого* $i \in I$*) является M-большой тогда и только тогда, когда для любого набора элементов* $a_i \in A_i$ $(i \in I)$ *множество* $\bigcup_{i \in I} (\theta(a_i) \cap T)$ *является конечным.*

Пусть $A = \prod_{i \in I} A_i$ $(r(A_i) = 1$ для всех $i \in I)$ – векторная группа (см. [9, §96]). Она является частным случаем группы $A = \prod_{i \in I} A_i$, где A_i – группы без кручения произвольного ранга для любого $i \in I$. Следствие 2.1.7 можно применить к векторной группе.

Следствие 2.1.8. *Группа A без кручения конечного ранга n является M-большой тогда и только тогда, когда существует максимальная линейно независимая система элементов* $a_1, \ldots, a_n$ *группы A, для которой множество* $\bigcup_{i=1}^{n} (\theta(a_i) \cap T)$ *является конечным.*

Во ***втором параграфе*** рассматриваются смешанные группы. Пусть A – смешанная группа. Это значит, что в A есть ненулевые элементы конечного порядка и элементы бесконечного порядка. Обозначим $T(A) = \{a \in A \mid o(a) < \infty\}$ – периодическая часть (или подгруппа) группы A. Тогда фактор-группа $A/T(A)$ является группой без кручения. Найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы произвольная смешанная группа A была M-большой. Что интересно, эти условия имеют вид условий расщепления некоторых смешанных групп, связанных с A.

Если A – смешанная M-большая группа, то $A/T(A)$ – также M-большая группа. Из дальнейшего будет видно, что обратное, вообще, не верно. Правда, в одном важном случае это так.

Простейшей ситуацией для смешанных групп является ситуация расщепляющейся группы. Пусть группа A расщепляется, т.е. $A = T(A) \oplus C$, где $T(A)$ – периодическая часть группы A и группа без кручения $C \cong A/T(A)$. Из равенства

$$\mathrm{Hom}(A,V) = \mathrm{Hom}(T(A),V) \oplus \mathrm{Hom}(C,V)$$

и аналогичного для $\overline{V}$, выводим с учетом того, что всякая периодическая группа является M-большой, такой факт.

Предложение 2.2.1. *Расщепляющаяся смешанная группа A является M-большой, если и только если часть без кручения C (т.е. $A/T(A)$) – M-большая группа.*

Для смешанной группы A введем еще одно множество простых чисел (кроме P и T). Для этого запишем $T(A) = \bigoplus_{p \in S} A_p$, где A_p – (ненулевая) p-компонента группы A. Буква S сохраняет этот смысл до конца главы.

Теорема 2.2.2. *Если для смешанной группы A множество $T \cap S$ конечно, то A является M-большой в точности тогда, когда $A/T(A)$ – M-большая группа.*

Периодическая группа G называется *элементарной*, если порядок каждого ее ненулевого элемента свободен от квадратов. Запишем элементарную группу G в виде $G = \bigoplus_{p \in S} G_p$, где G_p – p-компонента. Тогда G_p – элементарная p-группа. Это означает, что порядки ее ненулевых элементов равны p. Как хорошо известно, $G_p = \oplus Z(p)$.

Пусть A – некоторая смешанная группа. Сначала рассмотрим наиболее содержательный случай, когда $S \subseteq T$, где, по-прежнему, S есть множество простых чисел p с $A_p \neq 0$.

Теорема 2.2.3. *Предположим, что A – такая смешанная группа, что $T(A)$ – элементарная группа и $S \subseteq T$. Тогда, если A – M-большая, то A расщепляется.*

Рассмотрим теперь произвольную смешанную группу A. Напомним, что буква P обозначает множество всех простых чисел. Введем еще символ $Pt(A)$

для суммы $\underset{p\in S}{\oplus} pA_p$. Ясно, что любой гомоморфизм $A\to\overline{V}$ переводит $Pt(A)$ в ноль. Это дает равенства

$$\mathrm{Hom}(A,\overline{V})=\mathrm{Hom}(A/Pt(A),\overline{V}),\ \mathrm{Hom}(A,V)=\mathrm{Hom}(A/Pt(A),V),$$

понимаемые в естественном смысле.

Положим $\overline{A}=A/Pt(A)$. Из $T(\overline{A})=T(A)/Pt(A)$ заключаем, что $T(\overline{A})$ – элементарная группа. Справедливы также соотношения

$$\overline{A}/T(\overline{A})=(A/Pt(A))/(T(A)/Pt(A))\cong A/T(A).$$

Можно сформулировать следующий результат.

Теорема 2.2.4. *Пусть* A *– такая смешанная группа, что* $S\subseteq T$. *Записанные ниже утверждения эквивалентны:*

1) A *–* M*-большая;*

2) $\overline{A}$ *–* M*-большая;*

3) $A/T(A)$ *–* M*-большая и* $\overline{A}$ *расщепляется.*

Наконец, пусть A – смешанная группа без всяких добавочных предположений. Случай, когда множество $T\cap S$ конечно, разобран в теореме 2.2.2. Поэтому считаем это множество бесконечным. Поступим так. Запишем $T(A)=U\oplus W$, где $U=\underset{p\in S\setminus T}{\oplus} A_p$, W – дополнительное слагаемое. Тогда $\varphi U=0$ для всех $\varphi: A\to\overline{V}$. Значит, $\mathrm{Hom}(A,\overline{V})=\mathrm{Hom}(A/U,\overline{V})$ и $\mathrm{Hom}(A,V)=\mathrm{Hom}(A/U,V)$. Положим $A'=A/U$. Можно утверждать, что A – M-большая тогда и только тогда, когда A' – M-большая. Кроме того, A' удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и

$$A'/T(A')=(A/U)/(T(A)/U)\cong A/T(A).$$

Таким образом, мы располагаем необходимыми и достаточными условиями того, чтобы произвольная смешанная группа была M-большой.

Приведен пример, когда фактор-группа $A/T(A)$ является M-большой, но сама группа A M-большой не является; так, в качестве группы A можно взять произведение $\prod_{p\in T} Z(p)$.

Замечание. Зафиксируем для каждого $p \in T$ целое число $k_p \geq 0$. Образуем множество групп $M' = \left\{ Z(p^{k_p}) \mid p \in T \right\}$. В соответствии с §1.1 можно рассмотреть понятие M'-большой группы. Теория, развитая в параграфах 2.1, 2.2, непосредственно переносится на случай M'-больших групп.

В ***третьем параграфе*** изучаются подгруппы Фраттини.

Подгруппа Фраттини $\Phi(A)$ абелевой группы *A* по определению есть пересечение всех максимальных подгрупп группы *A*, если они существуют, в противном случае – это сама группа *A*.

Подгруппа M максимальна в группе *A* тогда и только тогда, когда фактор-группа *A/M* является простой, т.е. $A/M \cong Z(p)$ для некоторого $p \in P$, где P – множество всех простых чисел. Далее, $A/pA \cong \bigoplus_{r_p(A)} Z(p)$, где $r_p(A)$ – *p*-ранг группы *A*, т.е. ранг группы *A/pA*. Отсюда выводится, что для абелевой группы *A* $\Phi(A) = \bigcap_{p \in P} pA$. Для *p*-группы *A* ее подгруппа Фраттини равна *pA*.

В этом параграфе установлено, когда $\Phi(A) = 0$ для периодической, группы без кручения и смешанной группы *A*.

Предложение 2.3.3. *Подгруппа Фраттини периодической группы A равна нулю тогда и только тогда, когда A – элементарная группа.*

Предложение 2.3.4. *Пусть A – группа без кручения ранга 1. Тогда* $\Phi(A) \neq 0$ *в том и только в том случае, если тип* $\mathrm{t}(A) \geq [(1,...,1,...)]$. *Или, равносильно,* $\Phi(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{t}(A) < [(1,...,1,...)]$ *либо* $\mathrm{t}(A)$ *не сравним с* $[(1,...,1,...)]$.

Следствие 2.3.5. *Пусть A – группа без кручения. Тогда* $\Phi(A) \neq 0$ *если и только если существует ненулевой элемент* $a \in A$ *с типом* $\mathrm{t}(a) \geq [(1,...,1,...)]$. *Или, равносильно,* $\Phi(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда для любого ненулевого элемента* $a \in A$ *тип* $\mathrm{t}(a) < [(1,...,1,...)]$ *или* $\mathrm{t}(a)$ *не сравним с* $[(1,...,1,...)]$.

Следствие 2.3.6. *Пусть A – группа без кручения. Тогда* $\Phi(A) = 0$ *в том и только в том случае, когда* $\Phi(B) = 0$ *для любой сервантной подгруппы B ранга* 1 *группы A.*

Предложение 2.3.7. *Для смешанной группы A подгруппа Фраттини* $\Phi(A)=0$*, если и только если выполняются условия:*

1) $T(A)$ *– элементарная группа;*
2) *для любого ненулевого элемента бесконечного порядка* $a\in A$ *существует* $p\in P$ *такое, что* $h_p(a)=0$.

Ситуация, когда $\Phi(A)=0$, появляется в различных исследованиях. Заметим еще, что $\Phi(A)$ есть радикал группы A, рассматриваемой как модуль над кольцом целых чисел. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 2.3.8. *Подгруппа Фраттини произвольной группы A равна нулю тогда и только тогда, когда A изоморфна некоторой слабо сервантной подгруппе прямого произведения элементарных p-групп.*

Следствие 2.3.9. *Пусть A – произвольная группа. Тогда фактор-группа* $A/\Phi(A)$ *изоморфна некоторой слабо сервантной подгруппе прямого произведения элементарных p-групп.*

Четвертый параграф данной главы является очень значимым для всей диссертации, так как в нем применены полученные результаты о подгруппе Фраттини группы A и о факторгруппе $A/\Phi(A)$ к проблеме описания M-больших групп. Одновременно для групп без кручения и смешанных групп делаются некоторые уточнения. M-большие группы рассматриваются здесь относительно множества T, совпадающего с множеством всех простых чисел P.

Теорема 2.4.1. *Произвольная группа A является M-большой тогда и только тогда, когда* $A/\Phi(A)$ *– элементарная группа.*

Эта теорема детализируется для групп без кручения и смешанных групп.

Пусть сначала A – группа без кручения конечного ранга. Из $\Phi(A)=\bigcap_{p\in P} pA$ получаем $\Phi(A)=\{a\in A \mid \chi(a)\geq(1,1,\ldots)\}$. Внутренний тип группы A по определению есть точная нижняя грань множества типов $\mathrm{t}(a_1),\ldots,\mathrm{t}(a_n)$, где $a_1, \ldots, a_n$ – какая-то максимальная линейно независимая система элементов группы A [11]. Обозначение: IT(A).

Следствие 2.4.3. *Пусть A – произвольная группа без кручения. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\Phi(C) \neq 0$ *для любой сервантной подгруппы C ранга* 1*;*

2) $\mathrm{t}(C) \geq [(1,1,\ldots)]$ *для любой сервантной подгруппы C ранга* 1*;*

3) $A/\Phi(A)$ *– элементарная группа;*

4) A – M*-большая группа.*

В случае группы A конечного ранга к условиям 1) – 4) можно добавить

5) $\mathrm{IT}(A) \geq [(1,1,\ldots)]$.

Теорема 2.4.7. *Пусть A – смешанная группа. Записанные ниже утверждения эквивалентны:*

1) A – M*-большая группа;*

2) $\overline{A}$ – M*-большая группа;*

3) $A/T(A)$ – M*-большая группа и* $\overline{A}$ *расщепляется;*

4) $A/\Phi(A)$ *– элементарная группа;*

5) $\overline{A}/\Phi(\overline{A})$ *– элементарная группа.*

Если $r(A/T(A)) < \infty$*, то можно добавить утверждение:*

3′) $\mathrm{IT}(A/T(A)) \geq [(1,1,\ldots)]$ *и* $\overline{A}$ *расщепляется.*

Замечание. Вернемся к произвольному бесконечному множеству T простых чисел. Можно ввести аналог подгруппы Фраттини, положив $\Phi_T(A) = \bigcap\limits_{p \in T} pA$ для каждой группы A. Тогда Φ_T будет радикалом абелевых групп и для него верны все основные свойства подгруппы Фраттини. Такие радикалы встречаются в теории радикалов. В частности, имеют место аналоги всех результатов параграфа 2.3. Справедливы также аналоги утверждений параграфа 2.4 для M-больших групп относительно множества T. Все доказательства также переносятся без изменений лишь с соответствующими поправками.

Глава 3. *K*-большие группы, где *K* ={J_p | *p* ∈ *T*}

Последняя глава является дополнением к предыдущим главам.

По-прежнему T – некоторое бесконечное множество простых чисел, P – множество всех простых чисел. Возьмем в качестве множества K множество групп целых p-адических чисел J_p, где $p \in T$. Для группы X положим $\pi(X) = \{p \in P \mid pX \neq X\}$.

В ***первом параграфе*** изучаются периодические группы, группы без кручения и смешанные группы большие относительно множества K. Показано, что всякая периодическая группа является большой относительно множества K.

Существенным отличием от M-больших групп является то, что для данного множества K групп целых p-адических чисел случай смешанной группы сводится к группам без кручения.

Предложение 3.1.2. *Смешанная группа A является K-большой тогда и только тогда, когда фактор-группа без кручения A/T(A) является K-большой.*

Также заметное отличие наблюдается и с группами без кручения.

Теорема 3.1.4. *Группа A без кручения является K-большой тогда и только тогда, когда для любой сервантной подгруппы X ранга* 1 *группы A множество* $\pi(X)\bigcap T$ *является конечным.*

Теорема 3.1.4 применена к некоторым известным группам без кручения: сепарабельным, вполне разложимым, векторным, группам $A=\prod_{i\in I} A_i$ (A_i – группы без кручения произвольного ранга для любого $i\in I$), группам конечного ранга.

Во ***втором параграфе*** найдены различные связи между группами большими относительно некоторых множеств групп без кручения. Кроме рассмотренных ранее множеств K и M групп введены еще два множества. Именно, $P=\{B_p \mid B_p$ – редуцированная неограниченная p-группа для каждого $p\in T\}$ и $L=\{Q_p \mid Q_p$ – группа рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, $p\in T\}$.

Теорема 3.2.1. *Группа A без кручения является P-большой тогда и только тогда, когда A – K-большая группа.*

Предложение 3.2.2. *Всякая периодическая группа A является L-большой.*

Предложение 3.2.3. *Если произвольная группа A K-большая, то она является L-большой.*

Предложение 3.2.4. *Если группа A без кручения является K-большой, то она является M-большой.*

Обратное не всегда выполнимо. Например, если в качестве группы A взять группу без кручения ранга 1 типа $t(A)=[(1,1,\ldots)]$, и считать, что $T=P$ – множество всех простых чисел.

Предложение 3.2.5. *Если группа А без кручения M-большая, то она является L–большой.*

Из примера, предложений 3.2.4 и 3.2.5 следует, что существуют L–большие группы, но не K-большие.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора Петра Андреевича Крылова за постановку задач, постоянное внимание и поддержку, а также сотрудников кафедры алгебры механико-математического факультета Томского государственного университета.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоногов, В.А Задачник по теории групп / В.А. Белоногов. – М. : Наука, 2000. – 239 с.
2. Бородич, Е.Н. Обобщенная подгруппа Фраттини конечных разрешимых групп / Е.Н. Бородич, Р.В Бородич // Алгебра и ее приложения : тезисы докладов Международной конференции. – Красноярск, 2007. – С. 19-20.
3. Ведерников, В.А., Локально почти разрешимые группы с системами дополняемых подгрупп / В.А. Ведерников, Г.В. Савичева // Алгебра и ее приложения : тезисы докладов Международной конференции. – Красноярск, 2007. – С. 28-29.
4. Каргаполов, М.И. Основы теории групп / М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков. – М. : Наука, 1972. – 240 с.
5. Крылов, П.А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов / П.А. Крылов, А.В. Михалев, А.А. Туганбаев. – М. : Факториал Пресс, 2006. – 512 с.
6. Крылов, П.А. Абелевы группы как инъективные модули над кольцами эндоморфизмов / П.А. Крылов, Е.Г. Пахомова // Фундаментальная и прикладная математика. – 1998. – Т. 4, вып. 4. – С. 1365-1384.
7. Курош, А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – М. : Наука, 1967. – 648 с.

8. Фукс, Л. Бесконечные абелевы группы : в 2 т. / Л. Фукс. – М. : Мир, 1974. – Т. 1. – 335 с.
9. Фукс, Л. Бесконечные абелевы группы : в 2 т. / Л. Фукс. – М. : Мир, 1977. – Т. 2. – 417 с.
10. Чехлов, А.Р. Упражнения по основам теории групп : учеб. пособие / А.Р. Чехлов. – Томск : РИО Том. гос. ун-та, 2004. – 278 с.
11. Arnold, D.M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings / D.M. Arnold. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1987. – 189 p.
12. Eklof, P.C. Dually slender modules and steady rings / P.C. Eklof, K.R. Gooderl, J. Trlifaj // Forum. Math. – 1997. – Vol. 9. – P. 61-74.
13. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281-285.
14. Grinshpon, S.Y. Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups / S.Y. Grinshpon, P.A. Krylov // J. Math. Sci. – 2005. – Vol. 128. – № 3. – P. 2894-2997.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

15. Катеринчук (Бабанская), О.М. K-большие и обобщенно K-большие абелевы группы / О.М. Катеринчук (Бабанская) // Вестник Томского гос. ун-та. – 2006. – Вып. 290. – С. 48-55.
16. Катеринчук (Бабанская), О.М. О K-больших и обобщенно K-больших абелевых группах / О.М. Катеринчук (Бабанская) // Фундаментальная и прикладная математика. – 2007. – Т. 13. – № 3. – С. 51-60.
17. Бабанская, О.М. Связь циклических групп простых порядков с группами гомоморфизмов / О.М. Бабанская // Вестник Томского гос. ун-та. – 2007. – № 298. – С. 107-111.

Другие публикации:

18. Катеринчук (Бабанская), О.М. Характеризация K-больших абелевых групп без кручения / О.М. Катеринчук (Бабанская), П.А. Крылов // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения : тезисы докладов VI Международной конференции, посвященной 100-летию Н.Г. Чудакова. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2004. – С. 64-65.

19. Катеринчук (Бабанская), О.М. О K-больших абелевых группах без кручения / О.М. Катеринчук (Бабанская) // Студент и научно-технический прогресс. Математика : материалы XLIII Международной научной студенческой конференции. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2005. – С. 7-8.
20. Катеринчук (Бабанская), О.М. Некоторые свойства K-больших абелевых групп / О.М. Катеринчук (Бабанская) // Абелевы группы : труды Всероссийского симпозиума. – Бийск : РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2005. – С. 22-24.
21. Катеринчук (Бабанская), О.М. Характеризации больших абелевых групп без кручения для некоторых классов K / О.М. Катеринчук (Бабанская) // Абелевы группы: Материалы Всероссийского симпозиума. – Бийск : РИО БПГУ им. В.М. Шукшина, 2006. – С. 24-26.
22. Бабанская, О.М. О больших смешанных абелевых группах относительно класса циклических групп простых порядков / О.М. Бабанская // Научная конференция молодых ученых, аспирантов и студентов ММФ, посвященная трёхсотлетию со дня рождения Л. Эйлера : сб. материалов. – Томск : РИО Том. гос. ун-та, 2007. – С. 45-48.
23. Бабанская, О.М. Когда подгруппа Фраттини абелевой группы равна нулю? / О.М. Бабанская // Алгебра и логика : материалы международного российско-китайского семинара. – Иркутск : Изд-во Иркут. гос. пед. ун-та, 2007. – С. 15-19.
24. Бабанская, О.М. Связь M-больших абелевых групп с подгруппами Фраттини / О.М. Бабанская // Алгебра и ее приложения : тезисы докладов Международной конференции. – Красноярск, 2007. – С. 12-13.
25. Бабанская, О.М. О равенстве нулю подгруппы Фраттини абелевой группы / О.М. Бабанская. // Всероссийская конференция по математике и механике, посвященная 130-летию Томского государственного университета и 60-летию механико-математического факультета : сб. тезисов. – Томск : РИО Том. гос. ун-та, 2008. – С. 33-34.

Тираж 100 экз.
Отпечатано в КЦ «Позитив»
634050 г. Томск, пр. Ленина 34а