

На правах рукописи



ВАРУГИНА МАРИЯ ПЕТРОВНА

**ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ
МОМЕНТНОГО КОНТИНУУМА КОССЕРА**

05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2010 г.

Работа выполнена в Учреждении Российской академии наук
Институте вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН
(г. Красноярск)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Садовский Владимир Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Добронев Борис Станиславович

доктор физико-математических наук,
профессор Кургузов Владимир Дмитриевич

Ведущая организация: Институт механики сплошных сред УрО РАН
(г. Пермь)

Защита состоится 5 марта 2010 г. в 14 часов на заседании диссертационного
совета ДМ 212.099.06 при Сибирском федеральном университете по адресу:
660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, УЛК 115.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федераль-
ного университета по адресу: г. Красноярск, ул. Киренского, 26, ауд. Г 274.

Автореферат разослан 5 февраля 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета



Р. Ю. Царев

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В 2009 году исполнилось 100 лет со дня опубликования работы братьев Коссера, в которой была предложена новая математическая модель сплошной среды. В отличие от классической теории упругости, в этой модели каждая материальная точка наделяется свойствами твердого тела – для нее учитываются вращательные степени свободы. Математическая модель Коссера служит для описания напряженно-деформированного состояния структурно неоднородных материалов: композитов, гранулированных, порошкообразных, сыпучих, микроразрушенных и микрополярных сред. Структура – один из важнейших показателей качества материалов, непосредственно влияющий на их прочностные характеристики. В зависимости от типа материала и масштаба исследований в практических задачах требуется учитывать структуру нано-, микро- или мезоуровня. Особую актуальность математические модели материалов со структурой получили в последнее время в связи с развитием нанотехнологий.

При численном решении задач деформирования в рамках теории Коссера необходимо согласовывать размер ячеек используемых сеток с характерным размером неоднородности, представляющим собой малую величину. В результате дискретизации получаются задачи большой размерности, для реализации которых недостаточно вычислительных ресурсов персонального компьютера или рабочей станции с последовательной архитектурой. Методы моделирования с использованием высокопроизводительных распределенных вычислений оказываются едва ли не единственным способом получения информации об исследуемых процессах.

Целью исследования является разработка и реализация вычислительного алгоритма для решения динамических задач моментной теории упругости, описывающей процессы распространения волн напряжений и деформаций в средах с микроструктурой, на многопроцессорных вычислительных системах.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Приведение полной системы уравнений моментной теории упругости к симметрической t – гиперболической форме, позволяющей применить к решению задач эффективные вычислительные алгоритмы.
2. Разработка параллельной версии алгоритмов, ориентированных на использование многопроцессорных вычислительных систем.
3. Создание комплекса прикладных программ для исследования процессов распространения упругих волн в средах с микроструктурой на кластерных системах с распределенной памятью.

В качестве **метода исследования** используется вычислительный эксперимент, включающий в себя следующие этапы: математическая формулировка задачи, построение численного алгоритма решения, программная реализация алгоритма, проведение расчетов, анализ полученных результатов.

Новые научные результаты, выносимые на защиту:

1. Разработан параллельный вычислительный алгоритм для решения динамических задач моментной теории упругости, основанный на расщеплении пространственной задачи на серию одномерных задач.
2. Алгоритм реализован на языке программирования Fortran-90 с использованием библиотеки передачи сообщений MPI в виде комплекса программ для многопроцессорных вычислительных систем.
3. На основании серии расчетов показано, что в моментной упругой среде существует собственная резонансная частота, зависящая только от инерционных свойств частиц микроструктуры и от параметров упругости материала.

Личный вклад. Результаты, составляющие основное содержание диссертации, получены автором самостоятельно. В совместных работах соавторам принадлежит постановка задачи, автором диссертации проведены необходимые численные расчеты и обработка полученных результатов.

Достоверность и обоснованность результатов обеспечивается применением строгих математических методов исследования; использованием при

компьютерном моделировании тестовых задач, допускающих точное аналитическое решение.

Научная новизна работы заключается в том, что в ней впервые выполнена численная реализация модели моментной среды Коссера на многопроцессорных вычислительных системах в пространственной постановке и показано, что в такой среде существует собственная резонансная частота.

Практическая ценность работы состоит в создании комплекса прикладных программ, который может быть использован для численного исследования волновых процессов в средах с микроструктурой в задачах сейсмологии и акустики, а также в учебном процессе при подготовке специалистов по математической обработке геофизической информации.

Апробация работы. Основные результаты исследований были представлены на научных конференциях: XLIII международная научная студенческая конференция «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2005); VI школа-семинар «Распределенные и кластерные вычисления» (Красноярск, 2006); VII, VIII, IX Всероссийские конференции молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (Красноярск, 2006, Новосибирск, 2007, Кемерово, 2008); XV, XVI зимние школы по механике сплошных сред (Пермь, 2007, 2009); Конкурс-конференция молодых ученых Красноярского научного центра (Красноярск, 2007); II международная научная конференция «Параллельные вычислительные технологии» (Санкт-Петербург, 2008); V Российско-германская школа по параллельным вычислениям (Новосибирск, 2008); Всероссийская молодежная школа по параллельному программированию (Новосибирск, 2009); Международная конференция «Математические и информационные технологии» (Будва, Черногория, 2009); Первая Всероссийская конференция «Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой» (Нижний Новгород, 2009).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 печатных работ, из них 2 статьи в изданиях по списку ВАК.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00148), Комплексной программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 17 «Параллельные вычисления на многопроцессорных вычислительных системах», № 14 «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий» и № 2 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация», Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 40 и Красноярского краевого фонда науки (грант 17G029).

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объем диссертации составляет 105 страниц, включая 42 рисунка и 3 таблицы. Список используемой литературы содержит 96 наименований.

Содержание работы

Во введении дана общая характеристика работы, сформулирована ее цель и научная задача исследования, обоснована актуальность, представлены результаты работы, выносимые на защиту, а также определена научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы.

Первая глава носит обзорный характер. В ней приведен обзор исследований по математическому моделированию динамических процессов в средах с микроструктурой на многопроцессорных вычислительных системах. В разделе 1.1 дана краткая история развития модели несимметричной теории упругости. В разделе 1.2 приводится обзор численных методов решения задач динамики, методов моделирования неотражающих условий. В разделе 1.3 приведен обзор технологий программирования на многопроцессорных вычислительных системах, рассматриваются подходы MPI, OpenMP, DVM, HPF, специализированные библиотеки распараллеливания.

Во второй главе представлена математическая модель моментной теории упругости. Приведена симметризация системы уравнений, показана кор-

ректность постановки начально-краевой задачи. Проводится исследование одномерных систем уравнений, анализируются дисперсионные свойства систем. Доказывается, что в моментной среде существует собственная резонансная частота, зависящая только от инерционных свойств и параметров материала. Рассматривается случай плоского деформированного состояния и частный случай моментного континуума – редуцированная среда Коссера.

В разделе 2.1 приводится полная система уравнений модели моментного континуума Коссера. Кроме поступательного движения, которое характеризуется вектором скорости \mathbf{v} , в ней учитываются независимые малые повороты частиц с вектором угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, а наряду с тензором напряжений $\boldsymbol{\tau}$, компоненты которого несимметричны, вводится несимметричный тензор моментных напряжений \boldsymbol{m} .

Система уравнений, описывающих движение такой среды, значительно расширяется и усложняется по сравнению с системой динамической теории упругости за счет дифференциальных уравнений вращательного движения. В систему входят уравнения движения, кинематические соотношения и обобщенный закон линейной теории упругости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad j \dot{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \cdot \boldsymbol{m} - 2\boldsymbol{\tau}_x + j \mathbf{q}, \\ \dot{\Lambda} = \nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{M} = \nabla \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\tau} = \lambda II \cdot \cdot \Lambda^S + 2\mu \Lambda^S + 2\alpha \Lambda^A, \\ \boldsymbol{m} = \beta III \cdot \cdot M^S + 2\gamma M^S + 2\varepsilon M^A. \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь Λ и M – равные нулю в естественном (ненапряженном) состоянии среды тензоры деформаций и кривизн; Λ^S , M^S , Λ^A , M^A – симметричные и антисимметричные составляющие тензоров; $\boldsymbol{\tau}_x$ – вектор тензора $\boldsymbol{\tau}$; I – единичный тензор; ∇ – оператор градиента; точка над символом означает производную по времени; ρ – плотность среды; \mathbf{g} – вектор массовых сил; \mathbf{q} – вектор моментов; λ , μ , α , β , γ , ε – упругие характеристики среды; j – особая динамическая характеристика среды, равная произведению момента инерции частицы относительно оси, проходящей через ее центр тяжести, на число частиц в еди-

нице объема, которая определяется формой и размерами частиц. При описании гранулированных материалов параметр j можно определить по формуле $j = 2\rho r^2/5$, где r – характерный размер частиц среды.

В пространственном случае система уравнений (1) включает в себя 24 уравнения относительно 24-х неизвестных функций, в случае плоского деформированного состояния система состоит из 12 уравнений.

Система уравнений, описывающих движение среды Коссера, приводится к системе, записанной относительно вектора скорости, угловой скорости, несимметричных тензоров напряжений и моментов:

$$A \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = B_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} + B_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_2} + B_3 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_3} + Q\mathbf{U} + \mathbf{G}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(v_1, v_2, v_3, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}, \tau_{23}, \tau_{32}, \tau_{31}, \tau_{13}, \tau_{12}, \tau_{21}, \omega_1, \omega_2, \omega_3, m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{23}, m_{32}, m_{31}, m_{13}, m_{12}, m_{21}).$$

Матрицы коэффициентов A, B_1, B_2 и B_3 симметричны, матрица Q антисимметрична, в вектор \mathbf{G} входят массовые силы и моменты.

Для решения задач в рамках выписанной системы уравнений, ее нужно дополнить соответствующими начальными и граничными условиями. В частности, при $t = 0$ должна быть определена вектор-функция $\mathbf{U} = \mathbf{U}_0$. При этом на границах вычислительной области должны быть заданы граничные условия, которые могут быть заданы в терминах скоростей

$$v_i = v_i^0, \quad \omega_i = \omega_i^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

или напряжений

$$\sum_{k=1}^3 n_k \tau_{ki} = p_i, \quad \sum_{k=1}^3 n_k m_{ki} = q_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Для использования системы (2) при изучении механических процессов необходимо, чтобы задача Коши или краевая задача для нее была корректной. В разделе 2.2 показывается, что при выполнении неравенств на параметры среды

$$3\lambda + 2\mu, \mu, \alpha > 0, \quad 3\beta + 2\gamma, \gamma, \varepsilon > 0, \quad (5)$$

матрица A положительно определена, и, таким образом, рассматриваемая система является гиперболической по Фридрихсу. Ее характеристические свойства описываются уравнением

$$\det(cA + n_1 B_1 + n_2 B_2 + n_3 B_3) = 0, \quad n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1,$$

положительные корни которого – скорости продольных волн c_p , поперечных волн c_s , волн кручения c_m и волн вращательного движения c_ω – равны

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}, \quad c_m = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{j}}, \quad c_\omega = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{j}}. \quad (6)$$

Система (2) обладает обобщенными решениями с ударными волнами, для определения которых служит система уравнений сильного разрыва:

$$(cA + n_1 B_1 + n_2 B_2 + n_3 B_3)[\mathbf{U}] = 0,$$

где $[\mathbf{U}]$ – скачок решения при переходе через фронт волны, c – скорость движения фронта в направлении нормального вектора \mathbf{n} . Судя по этой системе, ударные волны малой амплитуды в моментной среде могут распространяться только со скоростями (6).

В разделе 2.3 рассматривается случай, когда искомые функции зависят от времени и одной из пространственных переменных, например, от x_1 . Система уравнений (1) распадается на независимые подсистемы, описывающие плоские продольные волны

$$\rho \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tau_{11}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \tau_{22}}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{33}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad (7)$$

поперечные волны (волны сдвига) с вращением частиц

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1}, & j \frac{\partial \omega_3}{\partial t} &= \frac{\partial m_{13}}{\partial x_1} + \tau_{12} - \tau_{21}, \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial t} &= (\mu + \alpha) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - 2\alpha \omega_3, & \frac{\partial m_{13}}{\partial t} &= (\gamma + \varepsilon) \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial t} &= (\mu - \alpha) \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + 2\alpha \omega_3, & \frac{\partial m_{31}}{\partial t} &= (\gamma - \varepsilon) \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (8)$$

а также волны кручения

$$\begin{aligned} j \frac{\partial \omega_1}{\partial t} &= \frac{\partial m_{11}}{\partial x_1} + \tau_{23} - \tau_{32}, & \frac{\partial \tau_{32}}{\partial t} &= -\frac{\partial \tau_{23}}{\partial t} = 2\alpha \omega_1, \\ \frac{\partial m_{11}}{\partial t} &= (\beta + 2\gamma) \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial m_{22}}{\partial t} &= \frac{\partial m_{33}}{\partial t} = \beta \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Еще одна подсистема получается из (8) заменой индексов, она также описывает поперечные волны.

Общее решение подсистемы (7) выражается с помощью формулы Даламбера, в соответствии с которой продольные волны, как и в классической теории упругости, распространяются со скоростями $\pm c_p$ и не обладают дисперсией. Подсистема волн кручения (9) сводится к телеграфному уравнению относительно угловой скорости:

$$\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial t^2} = c_m^2 \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x_1^2} - 4 \frac{\alpha}{j} \omega_1. \quad (10)$$

В случае, когда ω_1 не зависит от x_1 , решение телеграфного уравнения описывает равномерное собственное вращение частиц среды с периодом колебаний $T = \pi \sqrt{j/\alpha}$. Приводится общее решение уравнения (10) в интегральной форме через функцию Бесселя первого рода нулевого порядка, анализ которого показывает, что на фронтах волн кручения возникают осцилляции вращательного движения частиц.

На рис. 1 представлено численное решение системы (8) для пенистого полиуретана для разных размеров частицы. На границе $x_1 = 0$ действует Λ -образный импульс касательного напряжения τ_{12} , линейно нарастающий в интервале времени $(0, t_0)$, а затем линейно падающий на интервале (t_0, T) . Максимальное касательное напряжение в импульсе принято за единицу, время действия импульса равно 0.45 мс. Эпюры относятся к моменту времени $t = 0.68$ мс.

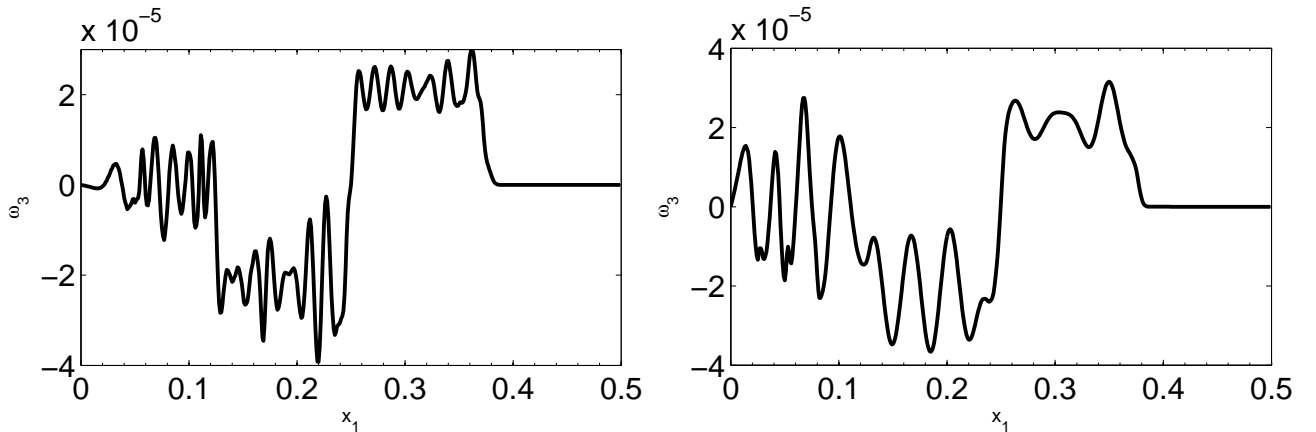


Рис. 1. Зависимости $\omega_3(x_1)$ для $r = 0.18$ мм (слева) и $r = 0.36$ мм (справа)

На графиках представлены зависимости угловой скорости ω_3 от координаты x_1 для различных размеров частиц. Правая часть осциллирующей кривой, примыкающая к переднему фронту волны, соответствует растущему напряжению (волна нагружения), средняя часть – падающему напряжению (волна разгрузки), а левая часть соответствует свободным вращательным колебаниям, которые происходят за задним фронтом волны. Момент инерции, связанный с характерным размером неоднородности (радиусом частицы) $r = 0.18$ мм и $r = 0.36$ мм, равен $4.4 \cdot 10^{-4}$ и $1.76 \cdot 10^{-3}$ кг/м соответственно, период собственных колебаний равен 31.7 и 63.3 мкс. Соответственно этому периоду меняется и число характерных колебаний угловой скорости на представленных рисунках.

В разделе 2.4 проводится исследование резонансных спектров поперечных возмущений. Показывается что в моментной упругой среде существует собственная резонансная частота, зависящая только от инерционных свойств частиц микроструктуры и от параметров упругости материала. Действительно, в случае однородного напряженного состояния из системы (8) вытекает классическое резонансное уравнение

$$j \frac{\partial^2 \omega_3}{\partial t^2} = -4\alpha \omega_3 + 2\alpha \dot{\chi},$$

из которого следует, что если угол сдвига $\chi(t)$ изменяется по гармоническому закону с частотой $\nu_* = 1/T$, равной собственной частоте вращательного движения, то амплитуда угловой скорости частиц неограниченно растет. В общем случае резонанс вращательного движения можно возбудить, например, за счет периодического изменения вращательного момента на границе слоя.

В разделе 2.5 рассматривается случай плоского деформированного состояния моментной среды, выполнена симметризация системы, выписана полная система левых собственных векторов матрицы, необходимая для проведения численных расчетов.

В разделе 2.6 рассматривается частный случай моментного континуума – редуцированная среда Коссера. В этой модели учитываются дополнительные

вращательные степени свободы, но моментные напряжения не рассматриваются. Она представляется адекватной при описании сыпучих сред.

Третья глава посвящена численному решению задачи на многопроцессорных вычислительных системах.

В разделе 3.1 дается описание алгоритма, основанного на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным. Процедура расщепления приводит к одномерным системам, которые решаются с помощью явной монотонной ЕНО–схемы типа «предиктор-корректор», представляющей собой обобщение схемы распада-разрыва Годунова с использованием кусочно-линейных сплайнов, разрывных на границах ячеек. Сплайны строятся при помощи процедуры предельной реконструкции, позволяющей повысить точность численного решения. На одном из этапов расщепления возникает система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается методом Кранка–Николсона второго порядка точности.

Рассматриваемый метод двуциклического расщепления имеет второй порядок точности по пространственным переменным и времени, если на его этапах используются схемы второго порядка, и обеспечивает устойчивость численного решения в пространственном случае при выполнении условия устойчивости Куранта–Фридрихса–Леви для одномерных систем.

Получаемая таким образом расчетная схема обладает свойством монотонности, поэтому она, в отличие от многих более простых схем, пригодна для исследования обобщенных решений в задачах об ударных, импульсных и сосредоточенных воздействиях.

Алгоритм реализован на языке Fortran-90 с использованием библиотеки передачи сообщений MPI (Message Passing Interface) по технологии SPMD (Single Program – Multiple Data) в виде комплекса программ, предназначенного для многопроцессорных вычислительных систем. Распараллеливание выполнено на основе блочного разбиения области решения задачи.

Программный комплекс, описанный в разделе 3.2, позволяет проводить расчеты распространения волн, вызванных внешними механическими воздей-

ствиями, в массиве среды, составленном из разнородных блоков с криволинейными границами. Информация, необходимая для расчетов, представляется в виде текстовых файлов. Один из таких файлов содержит феноменологические параметры материалов, таких как плотность, момент инерции частиц среды, константы модели, в другом хранятся сведения о блочной структуре массива среды, идентификатор материала в блоке и пространственные размерности сеток. Третий файл содержит информацию о внешних механических воздействиях: зона приложения нагрузки, характер (распределенная, сосредоточенная), вид (периодическая, импульсная и т.п), длительность нагружения.

Комплекс состоит из трех подпрограмм: подготовительная программа-препроцессор, программа, реализующая счет, и программа обработки результатов-постпроцессор.

В программе-препроцессор строится криволинейная разностная сетка в блоках, распределяется вычислительная нагрузка между процессорами, проводится инициализация начальных данных, однородных в случае естественного (ненапряженного) состояния среды, рассчитывается предельно допустимый по условию Куранта–Фридрихса–Леви шаг интегрирования одномерных систем уравнений, подготавливаются двоичные файлы данных с координатами узлов сетки и начальных значений для проведения расчетов основной программой. Балансировка вычислительной нагрузки достигается за счет равномерного распределения сеточной области между узлами кластера. Если размерность сетки в блоке больше средней размерности в расчете на один узел кластера, то этот блок обслуживается несколькими узлами, и наоборот, один узел обслуживает несколько следующих друг за другом блоков, если их суммарная размерность не превосходит средней.

На каждом узле кластера основной программой выполняются вычисления, сводящиеся к взаимно-согласованной поэтапной реализации метода расщепления по пространственным переменным. Основная программа записывает результаты расчетов в контрольных точках. Эти данные можно использо-

вать в качестве начальных для продолжения расчетов.

Программа-постпроцессор подготавливает данные для графического представления численного решения, которое выполняется с помощью специальных программ, предназначенных для персонального компьютера. Для визуализации решения нет необходимости использовать данные с точностью, полученной при численном решении задачи. Поэтому возможно применение методов сжатия данных с контролируемой потерей точности, что необходимо для сокращения объема файлов большого размера и времени транспортировки по сети, а также для компактного хранения численных решений в постоянной памяти компьютера. В качестве сжатия файлов можно использовать однородное прореживание данных, заключающееся в выборке данных вдоль каждого направления. Другой метод сжатия данных, основанный на методе вариации итераций, описан в разделе 3.3. Идея метода заключается в представлении многомерного массива данных суммой произведений одномерных массивов.

В четвертой главе представлены результаты численного расчета задач, полученных на кластерах МВС-1000 Института вычислительного моделирования СО РАН и МВС-100k Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

В разделе 4.1 приведены результаты численного расчета распространения упругих волн в двумерной постановке. На рис. 2 – 3 приведены результаты численного решения задачи Лэмба о мгновенном действии сосредоточенной силы на поверхности полупространства при плоской деформации, полученные на сетке 1000×500 ячеек с шагом по времени 372 мкс. В первом случае импульсная нагрузка приложена в центре верхней границы расчетной области в нормальном направлении (рис. 2), а во втором – по касательной к границе (рис. 3). На линиях уровня четко прослеживаются все волны, характерные для решения задачи Лэмба в рамках классической теории упругости: падающие продольная и поперечная волны с круговыми фронтами, две головные поперечные волны в виде симметричных отрезков прямых, касающихся

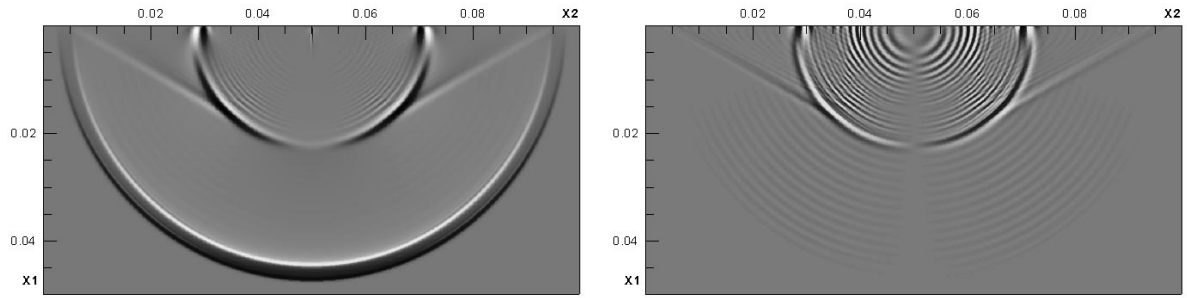


Рис. 2. Задача Лэмба для нормальной нагрузки: линии уровня нормального напряжения τ_{11} (слева) и угловой скорости ω_3 (справа)

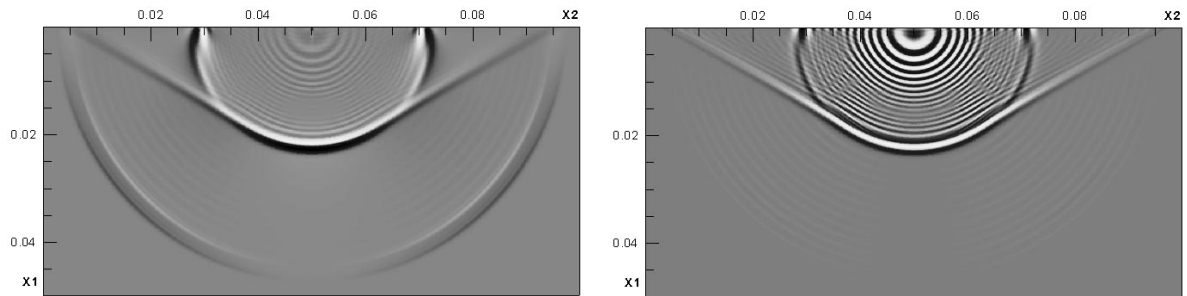


Рис. 3. Задача Лэмба для касательной нагрузки: линии уровня касательного напряжения τ_{12} (слева) и угловой скорости ω_3 (справа)

полуокружности меньшего радиуса, а также быстро затухающие с глубиной поверхностные волны Рэлея – яркие точки на границе, движущиеся вслед за падающей поперечной волной. Отличие от классической теории упругости состоит в том, что в модели моментной упругой среды решение имеет ярко выраженный колебательный характер.

В разделе 4.2 выполнено сравнение численного решения с аналитическим решением задачи о распространении поверхностных волн Рэлея в среде Коссера, показывающее хорошее качественное и количественное соответствие.

В разделе 4.3 приводятся результаты численного решения пространственных задач о действии периодической нагрузки $\sin \nu t$ с резонансной частотой $\nu = \nu_*$ и нерезонансной частотой $\nu = \nu_*/2$. На рис. 4 изображены поверхности уровня скорости v_1 . Период колебаний для частоты собственного вращательного движения равен $T = 67.6$ мкс.

Расчеты показали, что при частоте внешнего воздействия $\nu = \nu_*$ происходит рост амплитуды со временем и значительно более медленное затухание

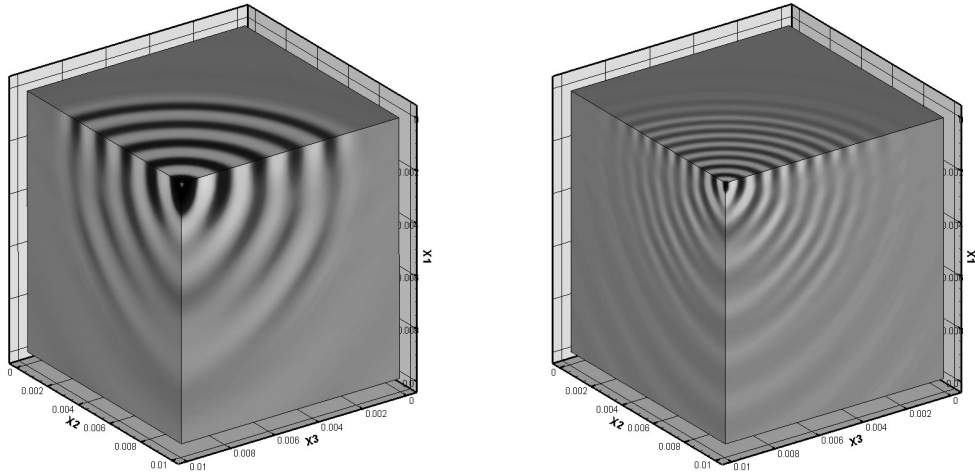


Рис. 4. Поверхности уровня скорости v_1 при резонансном (слева) и нерезонансном нагружении (справа).

колебаний с увеличением расстояния, характерное для акустического резонанса.

В разделе 4.4 представлены результаты расчетов пространственной задачи Лэмба о мгновенном действии сосредоточенных сил и моментов на поверхности полупространства. На рис. 5 изображены поверхности уровня нормального напряжения τ_{11} при нормальной нагрузке и касательного напряжения τ_{12} при касательной нагрузке. Проведено исследование эффективности параллельного алгоритма на примере численного решения задачи Лэмба.

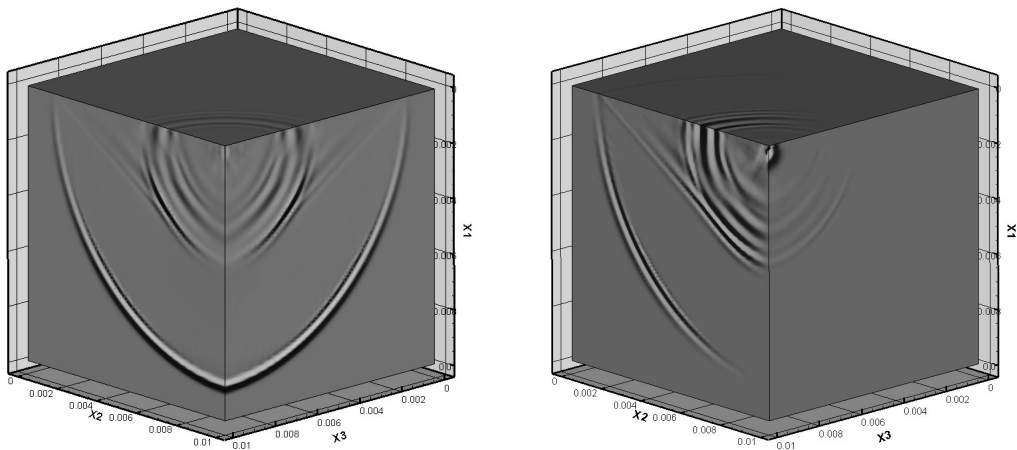


Рис. 5. Пространственная задача Лэмба: поверхности уровня напряжений τ_{11} при нормальной нагрузке (слева) и τ_{12} при касательной нагрузке (справа)

В этом разделе также описывается технология построения решений с произвольной нагрузкой с помощью функции Грина, в соответствии с которой решение задачи с распределенной нагрузкой строится в интегральной форме через решение для сосредоточенной силы.

Расчеты пространственных задач проводились на кубе со стороной 0.01 м для среды, механические параметры которой близки к синтетическому полиуретану. Используемая в расчетах разностная сетка состояла из $200 \times 200 \times 200$ ячеек с шагом 0.05 мм. Каждым из 64-х вычислительных узлов решалась часть задачи на подсетке $50 \times 50 \times 50$ ячеек. На более грубых сетках расчеты с приемлемой точностью выполнить невозможно, поскольку размер ячеек сетки становится сравнимым с характерным размером частиц среды $r = \sqrt{2.5j/\rho} \approx 0.15$ мм. Время расчета 100 итераций составило примерно 4.5 ч с шагом в 1.8 мкс.

Результаты расчетов могут служить методической основой при планировании экспериментов по определению феноменологических параметров континуума Коссера.

В **приложениях** выписана используемая при построении вычислительного алгоритма полная система левых собственных векторов для матрицы системы уравнений моментной среды Коссера и редуцированной модели в пространственном случае, а также приведены начальные данные для задачи о распространении поверхностной волны Рэлея.

Заключение

1. Система уравнений моментной теории упругости Коссера, учитывающая вращательные степени свободы частиц материала с микроструктурой, приведена к симметричной гиперболической по Фридрихсу форме. На этой основе разработан параллельный вычислительный алгоритм для решения динамических задач, в котором распараллеливание вычислений осуществляется на этапе расщепления задачи по пространственным переменным, а одномерные системы решаются с помощью явной монотонной разностной схемы, адаптированной к расчету разрывных решений.

2. Выполнена программная реализация вычислительного алгоритма на языке программирования Fortran-90 с использованием библиотеки передачи сообщений MPI в виде комплекса программ для многопроцессорных вычислительных систем. Комплекс предназначен для численного решения задач о распространении упругих волн в блочных массивах с криволинейными границами раздела в плоской и пространственной постановках.

3. Выполнены расчеты полей напряжений и деформаций в моментной среде, вызванных действием импульсных и периодических сосредоточенных нагрузок, в которых обнаружены осцилляции вращательного движения частиц. На основании серии расчетов показано, что в отличие от классической теории упругости в моментной теории Коссера существует собственная резонансная частота, зависящая только от инерционных свойств частиц микроструктуры и от параметров упругости материала.

Список публикаций по теме диссертации

Статьи в ведущих научных журналах, включенных в перечень ВАК:

1. Варыгина, М. П. Параллельный вычислительный алгоритм для решения динамических задач моментной теории упругости / М. П. Варыгина, О. В. Садовская // Вестн. Красноярск. гос. ун-та: Физ.-мат. науки. – 2005. – № 4. – С. 211-215.

2 Варыгина, М. П. Программное обеспечение для анализа волновых движений в моментных средах на многопроцессорных вычислительных системах / М. П. Варыгина, И. В. Киреев, О. В. Садовская, В. М. Садовский // Вестн. Сибирского гос. аэрокосмического ун-та. – 2009. – Вып. 2 (23). – С. 104-108.

Статьи в рецензируемых научных журналах:

3. Садовский, В. М. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах / В. М. Садовский, О. В. Садовская, М. П. Варыгина // Вычисл. мех. сплош. сред. – 2009. – Т. 2, № 4. – С. 111-121.

Труды конференций:

4. Варыгина, М. П. Применение параллельного алгоритма для решения динамических задач моментной теории упругости / М. П. Варыгина // Распределенные и кластерные вычисления: Избранные материалы шестой школы-семинара. – Красноярск, 2006. – С. 5-14.

5. Варыгина, М. П. Вычислительный алгоритм для решения задач динамики моментной среды Коссера / М. П. Варыгина // Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Сборник статей в 3-х частях. Часть 1. – Екатеринбург: УрО РАН, 2007. – С. 170-173.

6. Варыгина, М. П. Применение параллельных вычислений к решению пространственных динамических задач моментной теории упругости / М. П. Варыгина // Параллельные вычислительные технологии (ПАВТ'2008): Труды международной научной конференции. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. – С. 323-327.

7. Варыгина, М. П. Численное решение пространственных динамических задач моментной теории упругости / М. П. Варыгина, О. В. Садовская, В. М. Садовский // Труды XVI зимней школы по механике сплошных сред (механика сплошных сред как основа современных технологий (CD-диск). – Пермь: ИМСС УрО РАН, 2009.

8. Варыгина, М. П. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментной упругой среде / М. П. Варыгина, О. В. Садовская, В. М. Садовский // Первая Всероссийская конференция «Проблемы механики и акустики сред с микро- и наноструктурой: НАНОМЕХ-2009». Полные тексты докладов (CD-диск). – Нижний Новгород, 2009. – С. 39-51.

Подписано в печать 25 января 2010 г.

Формат 60 × 84/16

Усл. печ. л. 1.25 Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе ИВМ СО РАН

660036 Академгородок, Красноярск