ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
на диссертацию Зотова Игоря Николаевича
«Соответствие Мальцева и локальные автоморфизмы нильтреугольных алгебр классических типов»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Как установил А. И. Мальцев, при $n \geq 3$ элементарная эквивалентность $GL_n(K)$ и $GL_n(S)$ над полями нулевой характеристики влечет элементарную эквивалентность полей K и S. Аналогичное утверждение справедливо для групп PGL_n, SL_n, PSL_n. Соответствие

$$G_n(K) \equiv G_n(S) \Rightarrow K \equiv S$$

называют соответствием Мальцева. К. Видэла (1990) перенес соответствие Мальцева на унипотентные подгруппы групп Шевалле $U\Phi(K)$ над полями характеристики $\neq 2, 3$. Е.И. Бунина переносила соответствие Мальцева на группы Шевалле над полями и над некоторыми локальными кольцами.

Исследования теоретико-модельных свойств линейных групп и колец тесно связаны с исследованиями их изоморфизмов. В частности, эту связь отражает известный критерий элементарной эквивалентности алгебраических систем: Алгебраические системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют их изоморфные ультрастепени.

В.М. Левчук (2012) сформулировал ряд вопросов о теоретико-модельных свойствах различных групп Шевалле и их унипотентных подгрупп, алгебр Шевалле и подалгебр $N\Phi(K)$. В частности, им был сформулирован такой вопрос:

(А) Исследовать зависимость элементарной эквивалентности нильтреугольных алгебр $N\Phi(K)$ от свойств колец коэффициентов.

С этим вопросом тесно связан вопрос:

(Б) Исследовать отношение изоморфности $N\Phi(K) \simeq N\Phi'(S)$ колец Ли для систем корней Φ, Φ' и колец K, S.

С 90-х годов наряду с автоморфизмами алгебр изучаются их локальные автоморфизмы, к которым относят модульный автоморфизм алгебры, действующий на каждый элемент как некоторый автоморфизм алгебры. Тривиальные локальные автоморфизмы алгебры дают ее автоморфизмы. Также изучаются обобщения дифференцирований – локальные дифференцирования.

Целью настоящей диссертации является решение вопросов **(А)** и **(Б)**, а также описание локальных автоморфизмов алгебр $N\Phi(K)$ классических типов и построение новых примеров нетривиальных локальных автоморфизмов алгебр $NT(n, K)$ $(n > 3)$ и их финитарных обобщений – алгебр $NT(\Gamma, K)$ всех финитарных нильтреугольных матриц с индексами из произвольного линейно упорядоченного множества Γ.

Перейдем к детальному описанию полученных результатов.

В § 1.1 **главы 1** приводятся необходимые теоретико-модельные сведения и определяется соответствие Мальцева для линейных групп и колец. Также приведен обзор исследований, связанных с соответствием Мальцева для классических линейных групп, нильтреугольных колец $R = NT(n, K)$, ассоциированных колец Ли $R^{(-)}$ и унитреугольных групп $UT(n, K)$.

В § 1.2 определяются основные объекты исследования: алгебры Шевалле и их нильтреугольные подалгебры $N\Phi(K)$.

§ 1.3 и **глава 2** посвящены ответам на вопросы **(А)** и **(Б)** для типов B_n, C_n и D_n (для типа A_{n-1} ответы были известны ранее).

Пусть K и S – произвольные ассоциативно коммутативные кольца с единицами, $N\Phi(K)$ – кольцо Ли классического типа D_n ($n \geq 4$), B_n или C_n ($n > 4$). В теореме 1.3.1. установлено, что кольцо Ли $N\Phi'(S)$ изоморфно $N\Phi(K)$ тогда и только тогда, когда $S \simeq K$, а системы корней Φ' и Φ эквивалентны.

В § 2.4 решение вопроса **(А)** о соответствии Мальцева для колец Ли $N\Phi(K)$ (классических типов) дано в теореме 1.3.2, которая утверждает, что кольца Ли $N\Phi'(S)$ и $N\Phi(K)$ элементарно эквивалентны в том и только в том случае, когда $K \equiv S$, а системы корней Φ и Φ' эквивалентны.

Глава 3 посвящена изучению локальных автоморфизмов алгебры $N\Phi(K)$.

В § 3.1 приводятся необходимые определения, а также доказывается, что локальные автоморфизмы всякой алгебры (кольца) A образуют группу относительно умножения (см. предложение 3.1.3).

В § 3.2 рассматривается финитарное обобщение алгебр $NT(n, K)$. Для произвольного линейно упорядоченного множества Γ вводится нильтреугольная алгебра $NT(\Gamma, K)$ и строятся примеры нетривиальных локальных автоморфизмов алгебр $NT(\Gamma, K)$ (в частности, алгебр $NT(n, K)$). Примеры из § 3.2 дают новые нетривиальные локальные автоморфизмы для кольца вычетов целых чисел по примарному модулю.

В § 3.3 разрабатывается редукционный метод исследования локальных автоморфизмов алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов. Для типов A_n и D_n редукция ведется к тривиальным автоморфизмам по модулю идеалов L_i стандартного центрального ряда. Для алгебр $R^{(-)}$ при $R = NT(n, K)$ (то есть для типа A_{n-1}) А.П. Елисова разработала редукцию по модулю L_2. Однако, для типов B_n и C_n идеалы L_i, вообще говоря, не образуют нижний центральный ряд.

Результаты диссертации опубликованы в 13 работах, три из которых входят в перечень ВАК.

Диссертация изложена на 57 страницах. Она состоит из введения, трёх глав и списка литературы, включающего 63 наименований.

Отмечу некоторые замечания, возникшие при чтении диссертации.

– На с. 5 почему-то написано R. Crist, хотя в других местах фамилии иностранных авторов написаны на русском.

– Перед леммой 2.4.1 стоило пояснить, что такое $N\Phi(K)^I/D$ и $N\Phi(K^I/D)$.

– В лемме 3.3.2 надо писать «порождают» или «порождаются»?

– На с. 41 рассматривается произведение $Z \cdot J \cdot V \cdot D \cdot W$. Определение подгруппы J я так и не нашел.

Отмеченные недочеты не носят принципиального характера и легко устранимы. В целом диссертация написана хорошо. Автореферат полно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация И.Н. Зотова «Соответствие Мальцева и локальные автоморфизмы нильтреугольных алгебр классических типов» полностью соответствует п. 9 «Положении о порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. №842, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Зотов Игорь Николаевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник
лаборатории обратных задач математической физики
Федерального государственного
бюджетного учреждение науки
Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Тел.: +79139868382,
e-mail: bardakov@math.nsc.ru / Бардаков Валерий Георгиевич /

«21» сентября 2021 г.

Подпись Бардакова В.Г.
удостоверяю
Зав. орготделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«21» 09 2021 г.