На правах рукописи

Зыкова Татьяна Викторовна

Интегралы Меллина-Барнса, представляющие решения алгебраических уравнений, и их множества сходимости

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2012

Работа выполнена в Институте космических и информационных технологий Сибирского федерального университета.

Научный руководитель

д-р физ.-мат. наук, доцент Антипова Ирина Августовна

Официальные оппоненты:

Сафонов Константин Владимирович, д-р физ.-мат. наук, доцент,
Сибирский государственный аэрокосмический университет,
кафедра прикладной математики, заведующий

Михалкин Евгений Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Красноярский государственный педагогический университет,
кафедра математического анализа и методики обучения математике в вузе, доцент

Ведущая организация

Кемеровский государственный университет

Защита состоится 27 апреля 2012 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.02, Сибирский федеральный университет, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета, 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79/10.

Автореферат разослан «___» марта 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета   Бушуева Наталья Александровна

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Интегралы Меллина-Барнса являются обратными преобразованиями Меллина для отношений произведений конечного числа гамма-функций в композициях с линейными функциями. Частные случаи этих интегралов впервые появились в работах Б. Римана, связанных с теорией гипергеометрических функций. Позднее Х. Меллин[1] развил их теорию, а Е. Барнс[2] разработал метод получения асимптотических разложений для разных классов функций, определяемых степенными рядами и интегралами. Асимптотическое поведение интеграла определяется структурой особенностей подынтегрального выражения, в частности, гамма-функций.

Интегралы Меллина-Барнса представляют гипергеометрические функции – самый обширный класс специальных функций. В недавней работе Ф. Бёйкерса[3] они применяются к вычислению группы монодромии A-гипергеометрических систем дифференциальных уравнений. Кроме того, интегралы Меллина-Барнса нашли широкое применение в теоретической физике, в частности, в задачах квантовой электродинамики[4].

Отдельно следует подчеркнуть роль интегралов Меллина-Барнса в теории алгебраических уравнений. Впервые такое их применение было продемонстрировано Х. Меллином[5] в работе 1921 года, где были найдены интегральные формулы для решения общего алгебраического уравнения. Интегральную формулу и неполную область сходимости Меллин привел без доказательства. Полное доказательство этой формулы с указанием истинной области сходимости было предъявлено И.А. Антиповой[6]. В работах

[1]Mellin H. *Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma und der hypergeometrischen Funktionen* // Acta Soc. Sci. Fennica. 1896. V. 21. № 1. P. 1–115.

[2]Barnes E. W. *The asymptotic expansion of integral functions defined by generalized hypergeometric series* // Proc. London Math. Soc. 1907. V. 5. № 2. P. 59–116.

[3]Beukers F. *Monodromy of A-hypergeometric functions* // arXiv:1101.0493.v1 [math.AG]. 3 Jan 2011.

[4]Aguilar J.P., Greynat D., De Rafael E. *Muon anomaly from lepton vacuum polarization and the Mellin-Barnes representation* // Phys. Rev. D 77 2008 093010 [arXiv: 0802. 2618 [hep-ph]].

[5]Mellin H.R. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* // C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1921. V. 172. P. 658–661.

[6]Антипова И.А. *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений* // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 4. С. 3–20.

Б. Штурмфельса[7], А.К. Циха и соавторов[8,9] были получены аналитические продолжения для решения общего алгебраического уравнения, описаны области сходимости гипергеометрических рядов, представляющих решение, а также взаимное расположение этих областей относительно дискриминантного множества уравнения.

Интегральные преобразования Меллина для решения общей системы алгебраических уравнений исследовались в ряде современных работ[10,11], в которых прямое преобразование было вычислено с помощью линеаризации системы (замены переменной специального вида). Идея линеаризации алгебраического уравнения принадлежит Меллину. Ее реализация для системы алгебраических уравнений позволила получить параметризацию дискриминантного множества общей системы n полиномов Лорана от n переменных[12]. Отметим, что линеаризация также используется для получения самого интеграла Меллина-Барнса, представляющего решения уравнений. В настоящее время остается *актуальным дальнейшее исследование свойств линеаризации систем уравнений* в связи с изучением сингулярного множества и монодромии общей алгебраической функции.

Проблема сходимости интегралов Меллина-Барнса привлекала внимание специалистов на протяжении последнего столетия. В одномерном случае вопрос о сходимости был решен в серии статей и монографий: А. Диксон и Б. Феррар[13], Л. Слейтер[14], Г. Бейтмен и А. Эрдейи[15]. Шаги к решению этой проблемы в многомерном случае были сделаны Х. Меллином, Р. Бушманом

[7]Sturmfels B. *Solving algebraic equation in terms of A-hypergeometric series* // Discrete Math. 2000. V. 210. P. 171–181.

[8]Семушева А. Ю., Цих А. К. *Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений* // Комплексный анализ и дифференциальные операторы: Сб. науч. тр. Красноярск: КрасГУ. 2000. С. 134–146.

[9]Passare M., Tsikh A. *Algebraic equations and hypergeometric series.* In the book "The legacy of N.H. Abel". Springer–Verlag. Berlin. 2004. P. 653–672.

[10]Антипова И.А. *Выражение суперпозиции общих алгебраических функций через гипергеометрические ряды* // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44. № 5. С. 972–980.

[11]Степаненко В.А. *О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций* // Вестник Красноярского госуниверситета. Серия физ.-мат. науки. 2003. № 2. С. 35–48.

[12]Антипова И.А., Цих А.К. *Дискриминантное множество системы n полиномов Лорана от n переменных*// Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 5. С. 28–55.

[13]Dixon A.L., Ferrar W.L. *A class of discontinuous integrals* // The Quarterly Journal of Mathematics (Oxford Series). 1936. V. 7. P. 81–96.

[14]Slater L.J. *Generalized Hypergeometric Functions.* Cambridge University Press. 1966. 143 P.

[15]Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции.* Москва: Наука. 1973.

и Х. Сриваставой[16], О.Н. Ждановым и А.К. Цихом[17]. Окончательно область сходимости многомерного интеграла Меллина-Барнса найдена М. Пассаре, А. Цихом и Л. Нильсон[18].

Представляет интерес *задача исследования сходимости интегралов Меллина-Барнса в граничных точках их областей сходимости.* Для интегралов, представляющих решения алгебраических уравнений (систем), эта задача сопряжена с исследованием дискриминантных множеств уравнений и систем.

Цель диссертации

Целью диссертационной работы является исследование структуры множеств сходимости интегралов Меллина-Барнса, представляющих решения общей системы алгебраических уравнений, а также вычисление степени для линеаризации системы.

Методы исследования

В диссертационном исследовании применяются методы вещественного, комплексного и асимптотического анализа, а также многомерной теории функций. В частности, существенно используются теоремы обращения для многомерных преобразований Меллина. Вычисление преобразования Меллина мономиальной функции координат решения системы основано на линеаризации этой системы уравнений.

Научная новизна

Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и снабжены строгими доказательствами.

---

[16]Buschman R., Srivastava H. *Convergence regions for some multiple Mellin-Barnes contour integrals representing generalized hypergeometric functions* // Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. 1986. V. 17. № 5. P. 605–609.

[17]Жданов О.Н., Цих А.К. *Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов* // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 2. С. 281-–298.

[18]Nilsson L. *Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions* // Doctoral Thesis, Department of Mathematics. Stockholm University. Sweden. 2009.

Теоретическая и практическая ценность

Результаты имеют теоретическую ценность и могут быть использованы в теориях алгебраических уравнений, гипергеометрических функций, интегральных преобразований.

Апробация работы

Результаты работы докладывались:

- на Красноярском городском семинаре по многомерному комплексному анализу (СФУ, 2010 – 2012);
- на международной научной конференции "Студент и научно-техничекий прогресс" (Новосибирск, 2007, 2011);
- на VI Всесибирском конгрессе женщин-математиков (Красноярск, 2010);
- на молодежных научных школах-конференциях "Лобачевские чтения" (Казань, 2010, 2011);
- на международной конференции "Геометрия многообразий и ее приложения" (Улан-Удэ, 2010);
- на международной школе-конференции по геометрии и анализу (Кемерово, 2011).

Публикации

Основные результаты опубликованы в 7 работах, из них 6 работ без соавторов. В изданиях, входящих в перечень ВАК, опубликованы 2 работы.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав основного текста, приложения и заключения. Список литературы содержит 40 наименований. Работа изложена на 70 страницах.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ - 7347.2010.1).

Содержание работы

Характеризуя диссертационную работу в целом, можно сказать, что она посвящена проблемам сходимости многомерных интегральных преобразований Меллина, возникающих в задачах теории алгебраических уравнений.

В **первой главе** диссертации исследовано множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения. А именно, получено достаточное условие сходимости такого интеграла в граничных точках области сходимости.

Изложение начинается с краткого обзора условий сходимости одномерных интегралов Меллина-Барнса (раздел 1.1).

Главный объект исследования – многомерный интеграл Меллина-Барнса вводится в разделе 1.2. Он имеет следующий вид:

$$\frac{1}{(2\pi i)^p}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^p}\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}\Gamma(\langle A_j,z\rangle+c_j)}{\prod\limits_{k=1}^{q}\Gamma(\langle B_k,z\rangle+d_k)}x_1^{-z_1}\cdots x_p^{-z_p}dz, \tag{1}$$

здесь параметры $A_j, B_k \in \mathbb{R}^p$, $c_j, d_k \in \mathbb{R}$, $dz = dz_1 \ldots dz_p$, вектор $\gamma \in \mathbb{R}^p$ выбран так, что подпространство интегрирования $\gamma + i\mathbb{R}^p$ не пересекает полюсы гамма-функций в числителе. Полагаем, что параметр $x = (x_1, \ldots, x_p)$ изменяется в римановой области над комплексным алгебраическим тором $\mathbb{T}^p = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^p$, и

$$x_\nu^{-z_\nu} = e^{-z_\nu \log x_\nu}, \quad arg\, z_\nu \in \mathbb{R}.$$

Области сходимости интегралов Меллина-Барнса являются секториальными: они определяются условиями на аргументы параметров $x_1, \ldots, x_p$. Максимальная область сходимости[19] интеграла (1) представляет собой прообраз $Arg^{-1}(P^o)$ при отображении

$$Arg : \mathbb{T}^p \to \mathbb{R}^p,\ (x_1, \ldots, x_p) \to (\theta_1, \ldots, \theta_p)$$

внутренности многогранника P, гиперграни которого имеют нормальные векторы – одномерные конусы полиэдра, образованного гиперплоскостями $\langle A_j, \upsilon\rangle = 0$, $\langle B_k, \upsilon\rangle = 0$, $\upsilon = (\upsilon_\nu)$, $\upsilon_\nu = Im\, z_\nu$, $\nu = 1, \ldots, p$ (Теорема 1.1).

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение

$$y^n + x_p y^{n_p} + \cdots + x_1 y^{n_1} - 1 = 0 \tag{2}$$

[19]Nilsson L., цит. выше.

с комплексными коэффициентами x_i, $i \in J := \{1, \ldots, p\}$, $n > n_p > \ldots > n_1 \geq 1$. Интеграл Меллина-Барнса, представляющий μ-ю степень ($\mu > 0$) главного решения (ветви $y(x)$ с условием $y(0) = 1$) уравнения (2), имеет вид

$$\frac{1}{(2\pi i)^p} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^p} \frac{\mu}{n} \frac{\Gamma(z_1) \cdots \Gamma(z_p) \Gamma(\frac{\mu}{n} - \frac{1}{n}\langle \psi, z \rangle)}{\Gamma(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{n}\langle \tilde{\psi}, z \rangle + 1)} x_1^{-z_1} \cdots x_p^{-z_p} dz, \tag{3}$$

здесь $\psi = (n_1, \ldots, n_p)$, $\tilde{\psi} = (n - n_1, \ldots, n - n_p)$, вектор $\gamma \in \mathbb{R}^p$ фиксирован и выбирается из открытого симплекса

$$U = \{u \in \mathbb{R}^p : u_i > 0, \langle \psi, u \rangle < \mu\}. \tag{4}$$

Интеграл (3) сходится в секториальной области S_{P^o}[20], основание которой в пространстве аргументов $\theta_1 = \arg x_1, \ldots, \theta_p = \arg x_p$ есть внутренность P^o выпуклого многогранника

$$P = \{\theta \in \mathbb{R}^p : |\langle \varphi_l, \theta \rangle| \leq \pi n_l, \; |\langle \varphi_{kj}, \theta \rangle| \leq \pi n_k, \; l, k, j \in J, k < j\}, \tag{5}$$

здесь

$$\varphi_l = n e_l, \;\; \varphi_{kj} = -n_j e_k + n_k e_j,$$

$e_1, \ldots, e_p$ – базисные векторы в $\mathbb{R}^p$.

Основной результат главы 1 (достаточное условие сходимости интеграла (3) в граничных точках области сходимости) содержится в разделе 1.2.3 (Теорема 1.3 и Теорема 1.4). Пусть в уравнении (2) показатели мономов подчинены условию $n < 2n_2$, тогда среди неравенств, определяющих многогранник P, нет лишних. В этом случае он имеет $p^2 + p$ гиперграней, которые задаются пересечением соответствующих гиперплоскостей с самим многогранником P :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^{\pm} &= \{\theta \in \; P : \; \langle \varphi_l, \theta \rangle = \pm \pi n_l\}, \; l \in J, \\ \Gamma_{kj}^{\pm} &= \{\theta \in P : \; \langle \varphi_{kj}, \theta \rangle = \pm \pi n_k\}, \; k < j, \;\; k, j \in J. \end{aligned} \tag{6}$$

Теорема 1.3. *Прообразы $Arg^{-1}\theta$ точек θ из относительной внутренности гиперграней (6) многогранника P принадлежат множеству сходимости интеграла (3).*

Если $n \geq 2n_2$, то среди неравенств (5), определяющих P, появляются лишние, следовательно количество гиперграней многогранника P уменьшается. Рассмотрим крайнюю ситуацию, когда многогранник P превращается

[20] Антипова И.А., цит. выше.

в p-мерный параллелепипед, которая наступает при $n > 2n_p$. Зафиксируем поднаборы $J_s = \{j_1, \ldots, j_s\} \subset J$, $J_t = \{j_1, \ldots, j_t\} \subset J$, $J_s \cap J_t = \varnothing$. При $s = 0$ считаем $J_s = \varnothing$, при $t = 0$ считаем $J_t = \varnothing$. Рассмотрим грань параллелепипеда коразмерности $s + t$

$$\Gamma\left(J_s, J_t\right) = \left\{\theta \in P : \langle\varphi_l, \theta\rangle = \pi n_l,\, l \in J_s, \langle\varphi_j, \theta\rangle = -\pi n_j, j \in J_t\right\}. \qquad (7)$$

Заметим, что $\Gamma(J_0, J_0) = P$.

При условии $p \geq 3$, $n > 2n_p$ имеет место

Теорема 1.4. *Прообразы $Arg^{-1}\theta$ точек θ из относительной внутренности грани (7) многогранника P принадлежат множеству сходимости интеграла (3), если $(s,t) \in \{0,1,2\}^2$.*

В заключительных разделах 1.2.4 и 1.2.5 приводится подробное описание множества сходимости интегралов Меллина-Барнса, представляющих главные решения тетраномального и пентаномиального уравнений. Рассматривается интеграл вида (3) с двумя параметрами x_1, x_2, представляющий μ–ю степень главного решения тетраномиального алгебраического уравнения

$$y^n + x_2 y^{n_2} + x_1 y^{n_1} - 1 = 0, \quad n > n_2 > n_1 \geq 1. \qquad (8)$$

Он сходится на множестве, угловая проекция которого есть многогранник

$$P = \left\{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 : |\theta_1| \leq \frac{\pi n_1}{n}, |\theta_2| \leq \frac{\pi n_2}{n}, |n_1\theta_2 - n_2\theta_1| \leq \pi n_1\right\}$$

без четырех вершин $\left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}\right)$, $\left(\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(\frac{n_2}{n} - 1\right)\right)$, $\left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}\right)$, $\left(-\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(1 - \frac{n_2}{n}\right)\right)$ (затемненный шестиугольник с четырьмя ”выколотыми” вершинами на Рис. 1).

Сопоставим множество сходимости интеграла с сингулярным множеством полной (многозначной) алгебраической функции $y(x)$. Это сингулярное множество есть дискриминантная гиперповерхность $\nabla \subset \mathbb{T}^p$ уравнения (2).

Коамебой дискриминантной гиперповерхности $\nabla \subset \mathbb{T}^p$ уравнения (2) называется ее образ при отображении Arg. Например, для кубического уравнения $(n = 3, n_2 = 2, n_1 = 1)$

$$y^3 + x_2 y^2 + x_1 y - 1 = 0$$

дискриминант равен

$$D(x) = 27 + 4x_1^3 - 4x_2^3 + 18x_1x_2 - x_1^2x_2^2,$$

а его коамеба изображена серым цветом на Рис. 2 в рамках квадрата $|\theta_1| \leq \pi$, $|\theta_2| \leq \pi$. Заметим, что выделенные точки на Рис. 2 принадлежат коамебе дискриминанта $D(x)$. "Выколотые" вершины шестиугольника на Рис. 1 есть точки коамебы и они не входят в множество сходимости интеграла.

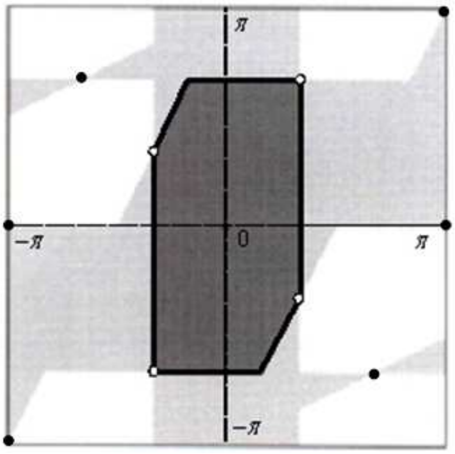

Рис. 1. Множество сходимости интеграла.

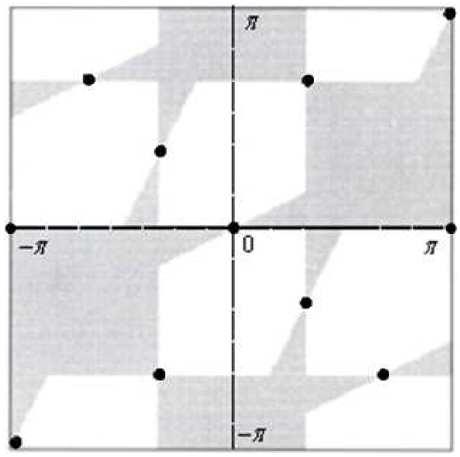

Рис. 2. Коамеба дискриминанта.

Для пентаномиального уравнения (с тремя переменными коэффициентами) многогранник P есть двенадцатигранник с восемнадцатью вершинами (см. Рис. 3). Соответствующий интеграл Меллина-Барнса сходится в прообразах почти всех граничных точек P, за исключением шести вершин A_3, A_5, A_{11}, A_{12}, A_{15}, A_{16}, принадлежащих коамебе дискриминанта пентаномиального уравнения.

Вторая глава посвящена исследованию интегралов Меллина-Барнса, представляющих мономиальную функцию вектор-решения системы уравнений. Применительно к вычислению прямого преобразования Меллина мономиальной функции найдена степень отображения, линеаризующего систему уравнений (разделы 2.2 и 2.3). Исследовано множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего мономиальную функцию вектор-решение системы полиномиальных уравнений специального вида (раздел 2.5).

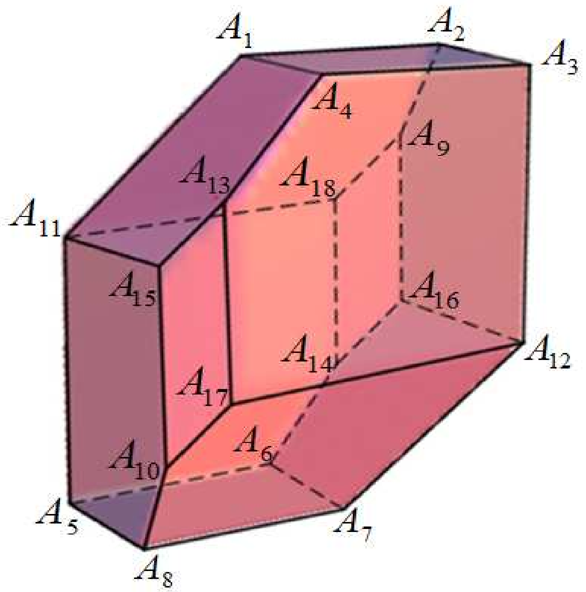

Рис. 3. Многогранник $P : p = 3, n < 2n_2$.

Рассмотрим *приведенную* систему n полиномиальных уравнений:

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \; i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

с неизвестными $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{T}^n$ и переменными коэффициентами $x_\lambda^{(i)}$; $\Lambda^{(i)} \subset \mathbb{Z}_{\geq}^n$ – фиксированные конечные подмножества, $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \cdots y_n^{\lambda_n}$, $m_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через Λ дизъюнктное объединение множеств $\Lambda^{(i)}$ и пусть $N = \#\Lambda$ – число коэффициентов в системе (9). Множество коэффициентов этой системы пробегает векторное пространство $\mathbb{C}^\Lambda \cong \mathbb{C}_x^N$, в котором координаты точек $x = \left(x_\lambda^{(i)}\right)$ индексируются элементами $\lambda \in \Lambda$.

Посмотрим на систему (9) как на систему полиномиальных уравнений в пространстве $\mathbb{C}^\Lambda \times \mathbb{T}^n$ с координатами $x = \left(x_\lambda^{(i)}\right)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Введем в этом пространстве замену координат $(\xi, W) \to (x, y)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} & x_\lambda^{(i)} = \xi_\lambda^{(i)} \prod_{j=1}^n W_j^{-\frac{\lambda_j}{m_j}}, \; \lambda = (\lambda_j) \in \Lambda^{(i)}, \; i = 1, \ldots, n, \\ & y_j = W_j^{\frac{1}{m_j}}, \; j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{10}$$

Тем самым, система (9) преобразуется в систему линейных уравнений вида

$$W_j + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(j)}} \xi_\lambda^{(j)} = 1, \; j = 1, \ldots, n.$$

Рассматривая (9) как систему относительно неизвестных $y = (y_1, \ldots, y_n)$, получаем, что при замене (линеаризации) $\Phi : \mathbb{C}^N_\xi \to \mathbb{C}^N_x$, определяемой формулами:

$$x_\lambda^{(i)} = \xi_\lambda^{(i)} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} \xi_\lambda^{(j)}\right)^{-\frac{\lambda_j}{m_j}}, \ \lambda = (\lambda_j) \in \Lambda^{(i)}, \ i = 1, \ldots, n, \qquad (11)$$

координаты $y_j(-x)$ решения системы (9) приобретают вид

$$y_j\left(-x(\xi)\right) = \left(1 + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} \xi_\lambda^{(j)}\right)^{\frac{1}{m_j}}.$$

Для системы (9), удовлетворяющей условию

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{m_i} < 1, \ \lambda = (\lambda_i) \in \Lambda,$$

справедлива

Теорема 2.1. *Отображение $\Phi|_{\mathbb{R}^N_+}$ собственное. Его степень $deg\,\Phi$ корректно определена и равна 1.*

Как упоминалось выше, идеи Меллина были развиты для систем алгебраических уравнений в ряде современных работ. В частности, в работе И.А. Антиповой[21] для мономиальной функции

$$\frac{1}{y^\mu(-x)} := \frac{1}{y_1^{\mu_1}(-x)\cdots y_n^{\mu_n}(-x)}, \ \mu_i > 0, \qquad (12)$$

составленной из координат $y_j(-x)$ решения системы уравнений (9), формально с помощью замены переменной (11), было вычислено прямое преобразование Меллина, определяемое интегралом

$$M\left[\frac{1}{y^\mu(-x)}\right](z) = \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \frac{1}{y^\mu(-x)} x^{z-I} dx, \qquad (13)$$

где $x^{z-I} = x_1^{z_1-1}\cdots x_N^{z_N-1}$, $dx = dx_1\cdots dx_N$.

Теорема 2.1 подтверждает корректность применения замены переменной (11) к вычислению интеграла (13). Результат вычислений преобразования Меллина приведены в разделе 2.4 диссертации (Теорема 2.2).

[21] Антипова И.А. *О мономиальной функции вектор-решения общей системы алгебраических уравнений* // Вестник Красноярского госуниверситета. Серия физ.-мат. науки. 2005. № 1. С. 106–111.

В разделе 2.5 второй главы диссертации рассматривается приведенная система двух полиномиальных уравнений

$$y_i^{m_i} + x_i y^{\lambda^{(i)}} - 1 = 0, \quad i = 1, 2, \tag{14}$$

с двумя переменными коэффициентами $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Составим матрицы из показателей мономов системы (14):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} \end{pmatrix}, \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} - m_1 & \lambda_1^{(2)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} - m_2 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $\tilde{\triangle} := det\,\tilde{\Psi} > 0$. Введем векторы $\tilde{\psi}_1^{\perp} = \left(\lambda_1^{(2)}, m_1 - \lambda_1^{(1)}\right)$, $\tilde{\psi}_2^{\perp} = \left(m_2 - \lambda_2^{(2)}, \lambda_2^{(1)}\right)$, ортогональные вектор-строкам матрицы $\tilde{\Psi}$.

Справедлива

Теорема 2.3. *Мономиальная функция $\frac{1}{y^{\mu}(-x)}$, составленная из координат решения системы (14), представляется следующим интегралом Меллина-Барнса*

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^2} \prod_{i=1}^{2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i}\langle\tilde{\psi}_i, z\rangle\right)\Gamma(z_i)}{\Gamma\left(\frac{\mu_i}{m_i} + \frac{1}{m_i}\langle\psi_i, z\rangle + 1\right)} \right] Q(z_1, z_2) x_1^{-z_1} x_2^{-z_2}\, dz_1 dz_2, \tag{15}$$

где полином

$$Q(z_1, z_2) = \frac{1}{m_1 m_2}\left(\mu_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2^{(1)} z_1 + \mu_2\lambda_1^{(2)} z_2 - \tilde{\triangle} z_1 z_2\right),$$

а вектор $\gamma \in \mathbb{R}^2$ выбирается из открытого множества

$$U = \left\{u \in \mathbb{R}^2_+ : \mu_i + \langle\tilde{\psi}_i, u\rangle > 0, i = 1, 2\right\}.$$

Множество сходимости интеграла (15) в переменных $\theta = arg\, x$ определяется неравенствами

$$|\theta_i| < \frac{\pi}{m_i}\left(m_i - \lambda_i^{(i)}\right), \quad \left|\left\langle\tilde{\psi}_i^{\perp}, \theta\right\rangle\right| < \frac{\pi}{m_i}\tilde{\triangle}, \quad i = 1, 2.$$

Основные результаты

- Для интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебарического уравнения, получено достаточное условие сходимости в граничных точках области сходимости.
- Найдена степень отображения, линеарезующего общую систему n полиномиальных уравнений с n неизвестными.
- Получено интегральное представление типа Меллина-Барнса мономиальной функции вектор-решения системы полиномиальных уравнений специального вида с указанием множества сходимости.

Публикации по теме диссертации

[1] Зыкова Т.В. О множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение алгебраического уравнения // VI Всесибирский конгресс женщин-математиков (в день рождения С.В. Ковалевской): Материалы Всероссийской конференции / Красноярск: РИЦ СибГТУ, 2010. С. 161-164.

[2] Зыкова Т.В. О структуре множества сходимости интеграла Меллина-Барнса // Геометрия многообразий и ее приложения: Материалы научной конференции с международным участием / Улан-Удэ: Бурятский гос. ун-т, 2010. С. 23-28.

[3] Зыкова Т.В. О представлении решения алгебраического уравнения в виде интеграла Меллина-Барнса // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: Материалы Девятой молодежной научной школы-конференции „Лобачевские чтения – 2010“ / Казань: Казан. матем. об-во, 2010. Т.40. С. 139-143.

[4] Антипова И.А., Зыкова Т.В. О множестве сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего решения тетраномиального алгебраического уравнения // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2010. Т. 3. № 4. С. 475—486.

[5] Зыкова Т.В. О множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса // Тезисы докладов Международной школы-конференции по геометрии и анализу. Кемерово, 19-26 июня 2011. [Электронный ресурс] / Кемерово: КемГУ, 2011, номер гос. рег. 0321102235 (http://www.math.kemsu.ru/kma/file/tesis/index.htm).

[6] Зыкова Т.В. О преобразовании Меллина мономиальной функции вектор-решения общей системы алгебраических уравнений // Тезисы VI Уфимской международной конференции "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения посвященной 70-летию чл.-корр. РАН В.В. Напалкова / Уфа: ИМВЦ, 2011. С. 69-70.

[7] Зыкова Т.В. О сходимости интеграла Меллина-Барнса на границе его области сходимости // Вестник КемГУ. 2011. Т. 47. № 3/1. С. 199–202.

Подписано в печать 21.03.2012
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 0,9
Тираж 110 экз. Заказ 6751

Отпечатано полиграфическим центром
Библиотечно-издательского комплекса
Сибирского федерального университета
660041 Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел/факс (391)249-74-81, 249-73-55
E-mail: print_sfu@mail.ru; http://lib.sfu-kras.ru