На правах рукописи

Юмагужин Валерий Афтахович

Методы вычисления дифференциальных инвариантов и их приложения к исследованию дифференциальных уравнений

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Красноярск — 2010

Работа выполнена в
Учреждении Российской академии наук
Институте программных систем имени А.К. Айламазяна РАН

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Красильщик Иосиф Семенович;
доктор физико-математических наук, профессор
Сенашов Сергей Иванович;
доктор физико-математических наук
Туницкий Дмитрий Васильевич.

Ведущая организация: Факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Защита диссертации состоится 2 апреля 2010 г. в час. на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, корпус Ж, ауд. 1-15.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета (г. Красноярск, ул. Киренского, 26).

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета К.А. Кириллов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Ключевое положение в диссертации занимает разработка метода вычисления дифференциальных инвариантов произвольного естественного расслоения.

Методы вычисления дифференциальных инвариантов являются одним из важных разделов теории дифференциальных инвариантов.

К середине прошлого века Э.Картан разработал общий метод решения проблемы эквивалентности геометрических структур, см. книгу Т.Ивея и Я.Ландсберга[1].

Изложение метода Картана на языке современной дифференциальной геометрии привело к созданию общего подхода к вычислению дифференциальных инвариантов геометрических структур – теории G-структур. Наиболее развитая ее часть – это теория G-структур 1-го порядка, см. работы Д.Бернарда[2] и И.Зингера и С.Стернберга[3]. Дифференциальные инварианты геометрической структуры, строящиеся в этой теории, – это структурные функции f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ..., принимающие значения в соответствующих когомологиях Спенсера. Первая из них f определена на G-структуре B над исходным многообразием, следующая $f^{(1)}$ определена на $G^{(1)}$-структуре $B^{(1)}$ над многообразием B и т.д.

В настоящее время это единственный общий метод вычисления дифференциальных инвариантов геометрических структур. Очевидное неудобство его делает актуальной задачу разработки методов вычисления дифференциальных инвариантов геометрических структур непосредственно в их естественных расслоениях.

Первые результаты в этом направлении получены в недав-

---

[1]Ivey T., Landsberg J., *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 61, AMS, Providence, Rhode Island, 2003, pp. 392.

[2]Bernard D. *Sur la geometrie differentielle des G-structures*//Ann. Inst. Fourier, 10, 1960, pp. 151-270.

[3]Singer I.M., Sternberg S., *On the infinite groups of Lie and Cartan,I* // J. Analyse Math., V. 15, pp. 1-114, 1965.

них работах В.В.Лычагина и Б.С.Кругликова[4 5 6].

Второе направление диссертации – это применение дифференциальных инвариантов к исследованию и нахождению явных решений дифференциальных уравнений.

Как известно, на решениях многих нелинейных дифференциальных уравнений естественным образом определены геометрические структуры. Например, характеристики системы дифференциальных уравнений адиабатического движения газа в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, порождают, см. Л.В.Овсянников[7], на каждом её решении геометрическую структуру, которая при $n = 1$ является 3-тканью, а при $n = 2, 3$ состоит из конуса и плоскости в каждом кокасательном пространстве к решению. Другие примеры дают геометрические структуры на решениях нелинейных дифференциальных уравнений, порожденные символами этих уравнений.

Представляется весьма актуальным использовать дифференциальные инварианты геометрических структур на решениях дифференциальных уравнений для исследования самих решений и нахождения явных решений.

Первые результаты в этом направлении были получены для систем уравнений гидродинамического типа. Характеристики таких систем порождают на их решениях геометрические структуры – n-ткани. Простейший дифференциальный инвариант этой структуры – кривизна n-ткани. Для различных таких систем Х.О.Кильп[8], затем Е.Ферапонтов[9] получили явные решения, кривизна n-ткани которых равна нулю.

Третье направление, затронутое в диссертации, – это проблема эквивалентности гиперболических уравнений Монжа-

---

[4] Лычагин В.В. *Однородные структуры на многообразиях*// Мат. Заметки, 52 (1992),N4, с.54-68.

[5] Lychagin V.V., *Homogeneous geometric structures and homogeneous differential equations*// AMS Translations, Advances in Math. Sci., Ser.2, v.167, (1995), p.143-164.

[6] Kruglikov B., Lychagin V.V., *On equivalence of differential equations*// Acta et Comment. Univ. Tartuensis Math. (1999), 3, pp. 7-29.

[7] Овсянников Л.В., *Лекции по основам газовой динамики*, Наука, М., 1981, 368 с.

[8] Кильп Х.О., *Две квазилинейные системы S^1_{32} из механики с шестиугольной тритканью характеристик (геометрическая теория)*// Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1975, Т.374, С. 63-78.

[9] Ферапонтов Е.В., *Уравнения гидродинамического типа с точки зрения теории тканей*// Мат. заметки, 1991, т. 50, вып. 5, 97-108.

Ампера общего положения и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно контактных преобразований.

Проблема эквивалентности является одной из важных проблем дифференциальных уравнений. Число публикаций на эту тему огромно и непрерывно увеличивается.

Уравнение типа Монжа-Ампера можно рассматривать как подмногообразие в расслоении J^2M 2-джетов функций многообразия M независимых переменных. В.В.Лычагин[10] показал для уравнений Монжа-Ампера, обладающих хотя бы одной контактной симметрией, что проблема эквивалентности для них относительно контактных преобразований сводится к проблеме эквивалентности эффективных форм на кокасательном расслоении T^*M относительно симплектических диффеоморфизмов.

Это позволило в начале 80-ых годов прошлого века В.В.Лычагину и В.Н.Рубцову[11], получить при $\dim M = 2$ строгие доказательства теорем С.Ли о приводимости уравнения Монжа-Ампера к квазилинейному уравнению, к линейному уравнению с постоянными коэффициентами и к параболическому и волновому уравнениям. Затем в работах [12] [13] были получены обобщения этих теорем на большие размерности. Более общие результаты о контактной и симплектической классификации уравнений Монжа-Ампера были получены позже в серии работ Б.Кругликова, А.Кушнера и Д.Туницкого [14] [15] [16]

---

[10]Лычагин В.В. *Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка*// Успехи Мат. Наук, 1979, том 34, № 1, стр. 101-171.

[11]Lychagin V.V. and Roubtsov V.N., *On Sophus Lie theorems for Monge-Ampere equations*// Dokl. Akad. Nauk BSSR 27:5 (1983), 396-398.

[12]Lychagin V.V. and Roubtsov V.N., *Local classification of Monge-Ampere differential equations*// Dokl. Akad. Nauk SSSR 272:1 (1983), 34-38.

[13]Lychagin V.V., Rubtsov V.N., Chekalov I.V., *A classification of Monge-Ampere equations*// Ann. Sc. Ecole Norm. Sup. (4) 26 (1993), 281-308.

[14]Кругликов Б.С., *Некоторые классификационные проблемы в четырехмерной геометрии: распределения, почти комплексные структуры, уравнения Монжа-Ампера*// Мат. Сборник, 1998, том 189, № 11, стр. 61-74,

[15]Кругликов Б.С., *Симлектические и контактные алгебры Ли с применением к уравнениям Монжа-Ампера*//Труды мат. инст. имени В.А.Стеклова, 1998, том 221, стр.232-246.

[16]Kruglikov B., *Classification of Monge-Ampere equations with two variables*// in: Geometry and topology of caustics—CAUSTICS '98 (Warsaw); Banach Center

[17] [18] [19] [20] [21] [22], кульминацией которых стала книга А.Кушнера В.В.Лычагина и В.Н.Рубцова[23].

Контактная классификация квазилинейных уравнений Монжа-Ампера получена в работе Д.Туницкого[24].

В работе Т.Моримото[25] изложены в терминах G-структур результаты Дарбу и Гурса[26], касающихся проблемы эквивалентности гиперболических уравнений Монжа-Ампера в некоторых специальных случаях.

Исследование эквивалентности уравнений Монжа-Ампера далеко от завершения. Например, открыта ключевая проблема – задача полного описания алгебры скалярных дифференциальных инвариантов уравнений Монжа-Ампера. В частности, представляется актуальной проблема эквивалентности уравнений Монжа-Ампера общего положения.

Что касается линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, то Л.М.Беркович в серии своих работ, завершившихся монографией[27], решил проблему эквивалентности этих уравнений порядка $n \geq 3$ относительно точечных преобразований. Осталась открытой проблема эквивалентности ли-

---

Publications, 50, 179-194 (1999).

[17] Kushner A., *Classification of mixed type Monge-Ampere equations*// Geometry in Partial Differential Equations. (1993) pp. 173-188.

[18] Kushner A., *Symplectic geometry of mixed type equations*// in Amer. Math. Soc. Transl., "The interplay between geometry and differential equations V.V.Lychagin Dds., ser. 2, **167** (1995) pp. 131-142.

[19] Kushner A., *Monge-Ampere equations and e-structures*// Dokl. Akad. Nauk 361:5 (1998), 595-596.

[20] Tunitskii D.V., *Contact equivalence of Monge-Ampere equations with transitive symmetries*// In Differential Geometry and Applications, Brno, (1995), pp. 479-485.

[21] Туницкий Д.В., *О контактной линеаризации уравнений Монжа—Ампера*// Известия РАН Сер. Мат., Т. 60, № 2, (1996), стр. 195-220.

[22] Туницкий Д.В., *Уравнения Монжа-Ампера и функторы характеристической связности*// Известия РАН Сер. Мат., Т.65, № 6, (2001), стр. 173-222.

[23] Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V., *Contact Gometry and Non-linear Differential Equations* Cambridge University Press, (2007) pp.496

[24] Туницкий Д.В., *Уравнения Монжа–Ампера и тензориальные функторы*// Известия РАН, Сер. Мат., Т.73, № 6, (2009), стр. 145-194.

[25] Morimoto T., *La geometric des equations de Monge-Ampere*// C. R. Acad. Sci. Paris A-B 289:1 (1979), A25-A28.

[26] Goursat E.*Lecon sur l'integration des equations aux derivees partielles du second order a deux variables independentes, I, II*// Hermann, Paris, 1896, 1898.

[27] Беркович Л.М. *Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения.* – Москва: НИЦ «Рагулярная и хаотическая динамика», 2002, с. 464.

нейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно контактных преобразований.

Следующее направление диссертации – это полное описание алгебр скалярных дифференциальных инвариантов дифференциальных уравнений и геометрических структур.

Знание образующих алгебры скалярных дифференциальных инвариантов дифференциального уравнения существенно облегчает нахождение симметрий этого уравнения, а дифференциальные соотношения между образующими этой алгебры дают условия интегрируемости в проблеме эквивалентности. Поэтому полное описание алгебр скалярных дифференциальных инвариантов является весьма актуальной задачей в изучении дифференциальных уравнений и геометрических структур.

В диссертации рассматриваются скалярные дифференциальные инварианты обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка, правая часть которых является многочленом 3-ей степени от производной зависимой переменной. Эти инварианты исследовали многие математики, начиная от классиков прошлого века С.Ли, Р.Лиувилля и А.Трессе кончая современными математиками, но ни в одной из известных автору работ нет полного описания алгебры скалярных дифференциальных инвариантов для какого-нибудь класса таких уравнений.

В диссертации также рассматриваются скалярные дифференциальные инварианты линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n \geq 3$. Эти инварианты для $n = 3, 4$ исследовали классики прошлого века Лагерр и Альфан, затем для $n \geq 3$ – Э.Вильчинский[28], Л.М.Беркович[25] и др., но до сих пор не было дано полного описания алгебры скалярных дифференциальных инвариантов этих уравнений.

Наконец, в диссертации исследуются скалярные дифференциальные инварианты 3-тканей общего положения на 2-мерном многообразии. Актуальность такого исследования обусло-

[28]Wilczynski E.J., *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, B. G. Teubner, Leipzig, 1906.

влена во-первых тем, что 3-ткани возникают естественным образом на решениях многих практически важных гиперболических систем дифференциальных уравнений, а во-вторых, 3-ткани играют важную роль в экономической модели Самуэльсона [29] [30].

Актуальность данной работы в настоящее время обусловлена еще и тем, что методы вычисления дифференциальных инвариантов имеют большую вычислительную сложность, и последние достижения в этой области связаны с развитием систем компьютерной алгебры.

Цель работы. Получение методов и алгоритмов вычисления дифференциальных инвариантов в естественных расслоениях, их программная реализация в системах компьютерной алгебры и применение этих методов к

– исследованию геометрических структур на решениях дифференциальных уравнений,

– получению явных решений дифференциальных уравнений,

– решению проблемы эквивалентности дифференциальных уравнений, а также

полное описание алгебр скалярных дифференциальных инвариантов дифференциальных уравнений и геометрических структур.

Общие методы исследования. В работе применются методы геометрии нелинейных дифференциальных уравнений, теории групп и алгебр Ли, дифференциальной геометрии и методы программирования в системах компьютерной алгебры.

Научная новизна и результаты, выносимые на защиту. Все основные результаты диссертации являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Получены методы и алгоритмы вычисления дифференциальных инвариантов в естественных расслоениях

[29] Debreu G., Cardinal Utility for Even-Chance Mixtures of Pairs of Sure Prospects, Review of Economic Studies, Vol 71, (1959), 174–177.

[30] Debreu G., Topological Methods in Cardinal Utility Theory, Mathematical Methods in the Social Sciences 1959, Kenneth J. Arrow, Karlin S. and Suppes P. ed., (1960), 16–26.

Найдены достаточные условия существования линейных связностей на сечениях естественного расслоения.

2. Вычислены структурные дифференциальные инварианты геометрических структур на решениях систем уравнений адиабатического движения газа в размерностях 1,2,3.

   Построены линейные связности на решениях систем уравнений адиабатического движения газа в размерностях 1,2.

   Исследованы решения систем уравнений адиабатического движения газа в размерности 2, со связностями без кручения.

   Найдены явные решения этих систем для случая политропного потока газа постоянного обьема в размерностях 2 и 3, структурные дифференциальные инварианты которых равны нулю.

3. Доказано, что символы уравнений Хохлова-Заболотской, нестационарного трансзвукового потока газа и уравнения коротких волн порождают метрики на их решениях.

   Вычислены явные решения этих уравнений при помощи классических дифференциальных инвариантов метрик.

4. Получены дифференциальные инварианты и алгоритмы их вычисления для гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения.

   Получено решение проблемы контактной эквивалентности для гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения.

5. Получено описание орбит действия диффеоморфизмов базы естественного расслоения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка вида $y'' = a(x,y)y'^3 + b(x,y)y'^2 + c(x,y)y' + d(x,y)$ в расслоениях $J^k\pi$ k-джетов его сечений, $k = 0,1,2,3$.

   Получено полное описание алгебры скалярных дифференциальных инвариантов этих уравнений, 3-джеты которых лежат в орбите общего положения расслоения $J^3\pi$.

6. Получено полное описание алгебры скалярных дифференциальных инвариантов линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка ≥ 3.

   Получено решение проблемы эквивалентности для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений порядка ≥ 3 относительно контактных преобразований.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях проблемы эквивалентности дифференциальных уравнений, а также для исследования решений дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях: на международной конференции "Classical and Quantum Geometry of Homogeneous Spaces"(Москва, 1994); на международной конференции "Secondary Quantized Calculus and Nonlinear Problems in Physics"(Vietry sul Mare, Italy, 1994); на международной конференции "New Computer Technologies and Control Systems"(Переславль-Залесский, 1995); на международной конференции "Secondary Calculus and Cohomologous Physics"(Москва, 1997); на международной конференции "Differential Inclusions and Control"(Переславль-Залесский, 1998) на международной конференции "Problems and trends of contemporary geometry. Current Geometry"(Santo Stefano del Sole (Avellino), Italy, 2004); на международной конференции "Программные системы: теория и приложения"(Переславль-Залесский, 2004, 2006, 2009); на международной конференции "Differential Geometry and Its Applications"(Prague, Czech Republic, 2004); на международной конференции "Geometry in Odessa. Differential geometry and its applications"(Одесса, Украина, 2005, 2008, 2009); на международной конференции "Geometry of Vector Distributions, Differential Equations, and Variational Problems"(S.I.S.S.A. – I.S.A.S., Trieste, Italy, 2006); на всероссийской конференции "Герценовские чтения – 2006"(Санкт-Петербург, 2006); на международной конференции "Анализ и особенности"(МИАН, Москва, 2007); на международной конференции "Differential Equations and Topology"(Москва, 2008); на международной конференции "Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры"(Саратов, 2008); на международной конференции "Лаптевские чтения – 2009"(Москва-Тверь 2009) на международном научном семинаре "Современные проблемы дифференциальной геометрии"(Казань, 2009).

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на научно-исследовательских семинарах: факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ под руководством академика В.А.Ильина, Независимого московского университета под руководством профессора И.С.Красильщика, факультета математики и информатики университета Салерно (Салерно, Италия) под руководством профессора А.М.Виноградова, института математики Силезского университета (г.Опава, Чешская республика) под руководством профессора М.Марвана, исследовательского центра системного анализа ИПС РАН под руководством профессора А.М.Цирлина.

Публикации. Все результаты диссертации опубликованы в 29 работах автора, список которых приводится в конце автореферата.

Личный вклад. Все результаты диссертации получены автором самостоятельно.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав и приложения, разбитых на разделы. Диссертационная работа изложена на 248 страницах. Библиография включает 128 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Ввводная глава диссертации посвящена истории рассматриваемых вопросов (раздел 0.1), а также краткому изложению результатов работы (раздел 0.2).

В главе 1 кратко изложены все необходимые сведения из геометрии расслоения джетов и геометрии дифференциальных уравнений.

В главе 2 мы представляем общий подход к построению дифференциальных инвариантов в естественных расслоениях.

В разделе 2.1 даются все необходимые определения связанные с естественными расслоениями.

В разделе 2.2 описываются поднятия диффеоморфизмов и векторных полей с базы естественного расслоения в расслоения джетов его сечений, определяются дифференциальные инварианты естественного расслоения и геометрических структур.

В разделе 2.3 приведены необходимые сведения о формальных векторных полях, продолжениях подпространств и когомологиях Спенсера.

В разделах 2.4 – 2.7 излагается метод построения структурных дифференциальных инвариантов в естественных расслоениях. Суть его в следующем.

Пусть $\pi : E \to M$ – естественное локально-тривиальное расслоение, $\pi_k : J^k\pi \to M$, $\pi_k : j^k_p S \mapsto p$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, – расслоение k-джетов его сечений; $j_k S : p \mapsto j^k_p S$ – сечение расслоения π_k, порожденное сечением S расслоения π; $L^{(k)}_S$ – образ сечения $j_k S$.

Для любого векторного поля X на многообразии M (любого диффеоморфизма f многообразия M) через $X^{(k)}$ ($f^{(k)}$) обозначим его естественное поднятие в $J^k\pi$.

Значение поднятого векторного поля $X^{(k)}_{\theta_k}$ в точке $\theta_k \in J^k\pi$ определяется $r+k$-джетом поля X в точке $p = \pi_k(\theta_k)$, где r – дифференциальный порядок расслоения π.

Формальной симметрией джета $\theta_{k+1} = j^{k+1}_p S$ назовем $r+k$-джет $j^{r+k}_p X$ такого векторного поля X, что $X^{(k)}_{\theta_k} \in \mathcal{K}_{\theta_{k+1}}$, где $\mathcal{K}_{\theta_{k+1}}$ – касательное пространство к образу сечения $j_k S$ в точке $\theta_k = j^k_p S$. Через $\mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$ обозначим пространство формальных симметрий джета θ_{k+1}. Алгебра изотропии точки θ_k определяется формулой $\mathfrak{g}_{\theta_k} = \{\, j^{r+k}_p X \mid X^{(k)}_{\theta_k} = 0 \,\}$.

Доказывается, что скобка векторных полей порождает билинейное кососимметричное отображение

$$[\,\cdot,\cdot\,] : \mathcal{A}_{\theta_{k+1}} \times \mathcal{A}_{\theta_{k+1}} \to \mathcal{A}_{\theta_k}\,, \quad [\, j^{r+k}_p X,\, j^{r+k}_p Y \,] = j^{r+k-1}_p [\, X,\, Y \,]\,.$$

Пусть $\rho_{l,m}(j_p^l X) = j_p^m X$ для любых натуральных $l > m \geq 0$ и пусть T_pM – касательное пространство к M в точке p.

Подпространство $H \subset \mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$ называется *горизонтальным*, если $\rho_{r+k,0}|_H : H \to T_pM$ – изоморфизм. Для любого горизонтального подпространства H в $\mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$ имеет место разложение $\mathcal{A}_{\theta_{k+1}} = H \oplus \mathfrak{g}_{\theta_k}$.

Каждое горизонтальное подпространство H в $\mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$ определяет внешнюю 2-форму ω_H на T_pM со значениями в $\mathcal{A}_{\theta_k}$:

$$\omega_H(X_p, Y_p) = [\, j_p^{r+k} X,\, j_p^{r+k} Y \,], \quad \forall\, X_p, Y_p \in T_pM\,.$$

Её компонента нулевого порядка $\omega_H^0 = \rho_{r+k-1,0} \circ \omega_H$ принадлежит пространству $T_pM \otimes (T_p^*M \wedge T_p^*M)$.

Положим $g_{\theta_k}^1 = \rho_{r+k,1}(\mathfrak{g}_{\theta_k})$. Алгебра $g_{\theta_k}^1$ является подалгеброй алгебры $T_pM \otimes T_p^*M$. Она порождает комплекс Спенсера

$$0 \to (g_{\theta_k}^1)^{(1)} \hookrightarrow g_{\theta_k}^1 \otimes T_p^*M \xrightarrow{\partial_{1,1}} T_pM \otimes (T_p^*M \wedge T_p^*M) \to 0\,,$$

где $(g_{\theta_k}^1)^{(1)} = (\, g_{\theta_k}^1 \otimes T_p^*M\,) \cap \big(\, T_pM \otimes (T_p^*M \odot T_p^*M)\,\big)$ – 1-ое продолжение алгебры $g_{\theta_k}^1$, а оператор $\partial_{1,1}$ определяется формулой $\partial_{1,1}(h)(X_p, Y_p) = h(X_p)(Y_p) - h(Y_p)(X_p)$.

Доказывается, что класс смежности

$$\omega_{\theta_{k+1}}^0 = \omega_H^0 + \partial_{1,1}(g_{\theta_k}^1 \otimes T_p^*M)$$

не зависит от выбора горизонтального подпространства H в $\mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$. В результате, естественным образом построена функция на $J^{k+1}\pi$

$$\omega^0 : \theta_{k+1} \longmapsto \omega_{\theta_{k+1}}^0$$

со значениями в когомологиях Спенсера. Эта функция – дифференциальный инвариант порядка $k+1$ расслоения π. Мы называем его *структурным инвариантом.*

Выбор дополнения в разложении

$$T_pM \otimes (T_p^*M \wedge T_p^*M) = C_{\theta_k} \oplus \partial_{1,1}(g_{\theta_k}^1 \otimes T_p^*M)$$

позволяет считать, что $\omega_{\theta_{k+1}}^0$ является тензором из подпространства C_{θ_k}.

Выбор дополнений C_{θ_k} инвариантным образом позволяет считать, что ω^0 является тензорным дифференциальным инвариантом (порядка $k+1$) расслоения π.

Ограничение ω^0_S инварианта ω^0 на $L_S^{(k+1)}$ является дифференциальным инвариантом (порядка $k+1$) геометрической структуры S.

Далее в пункте 2.7.3 исследуются горизонтальные подпространства $H \subset \mathcal{A}_{\theta_{k+1}}$, выделяемые дополнением C_{θ_k}. Это приводит в пункте 2.7.4 к нахождению достаточных условий существования линейных связностей на сечениях расслоения π.

В разделе 2.8 в качестве примера вычисляется структурный тензорный дифференциальный инвариант 1-го порядка естественного расслоения почти-комплексных структур. Сравнение его с классическим дифференциальным инвариантом почти-комплексных структур – тензором кручения Ниенхейса, показывает, что он равен нулю тогда и только тогда, когда равен нулю тензор Ниенхейса.

В этой главе изложен метод построения дифференциальных инвариантов геометрических структур, использующий компоненты нулевого порядка форм ω_H. Методы построения дифференциальных инвариантов, использующие следующие компоненты этих форм, изложены на примере естественного расслоения обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка в разделах 4.3.1 и 4.3.2 и на примере естественного расслоения 3-тканей в разделе 5.2.2.

Глава 2 заканчивается разделом 2.9, в котором изложен известный алгоритм вычисления скалярных дифференциальных инвариантов в естественных расслоениях.

В главе 3 мы исследуем геометрические структуры на решениях системы уравнений адиабатического движения газа в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$.

В разделе 3.2 мы изучаем геометрические структуры на решениях системы уравнений 1-мерного адиабатического движения газа.

Как известно[7], характеристческие ковекторы этой системы образуют на каждом её решении, рассматриваемом как

2-мерная поверхность, геометрическую структуру 3-ткань.

В пункте 3.2.1 рассматривается естественное расслоение μ 3-тканей на плоскости. В пункте 3.2.2 мы строим дифференциальные инварианты 3-тканей, используя подход к построению дифференциальных инвариантов главы 2. В результате получаем, что структурный дифференциальный инвариант 1-го порядка расслоения μ равен нулю, а на каждом его сечении определена линейная связность без кручения. Для системы уравнений 1-мерной газовой динамики этот результат означает, что на каждом её решении определена линейная связность без кручения. Дальнейшее применение этого подхода приводит к построению дифференциального инварианта 2-го порядка, который на каждом решении системы уравнений 1-мерной газовой динамики совпадает с тензором кривизны линейной связности этого решения.

В пункте 3.2.3 для системы уравнений 1-мерного адиабатического движения газа при $A(\rho, p) = \rho$ мы находим широкий класс явных решений этой системы, линейные связности на которых имеют нулевой тензор кривизны.

В дополнительном раздел 3.3 дается полное описание алгебры скалярных дифференциальных инвариантов 3-тканей общего положения. В пункте 3.3.1 мы исследуем алгебры изотропии точек из $J^k\mu$. Это позволяет нам в пункте 3.3.2 описать орбиты действия псевдогруппы Γ диффеоморфизмов базы расслоения μ в расслоениях $J^k\mu$:

1. Расслоение $J^k\mu$, $k = 0, 1$, является орбитой действия Γ.

2. Расслоение $J^2\mu$ является объединение двух орбит: орбиты общего положения Orb_0^2 и вырожденной орбиты.

3. При $k \geq 3$ расслоение $J^k\mu$ является объединением непрерывных семейств вырожденных орбит.

В пункте 3.3.3 доказывается, что нетривиальные скалярные дифференциальные инварианты определены в $J^k\mu$ при $k \geq 3$. Мы ограничиваемся исследованием алгебры A всех скалярных дифференциальных инвариантов, определенных в подрасслоении $(\mu_{\infty,2})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^2)$ расслоения $J^\infty\mu$. С этой целью мы находим два инвариантных векторных поля на $(\mu_{\infty,2})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^2)$ линейнонезависимых в каждой точке. С помощью них мы находим обе образующие алгебры A и дифференциальное соотношений 1-го порядка между ними, которое является полным семейством соотношений между этими образующими.

В разделе 3.4 исследуются геометрические структуры на решениях системы уравнений 2-мерного адиабатического движения газа.

Характеристческие ковекторы этой системы порождают[7] на каждом ее решении, рассматриваемом как 3-мерная поверхность, геометрическую структуру, которая состоит из 2-мерной плоскости и 2-мерного конуса в каждом кокасательном пространстве к этому решению, пересекающихся только в нуле. В пункте 3.4.1 мы рассматриваем естественное расслоение μ таких геометрических структур в пространстве $\mathbb{R}^3$. В пункте 3.4.2 исследуется структурный дифференциальный инвариант 1-го порядка расслоения μ. В пункте 3.4.3 мы доказываем, что на решениях системы уравнений 2-мерной газовой динамики этот структурный дифференциальный инвариант является векторнозначной дифференциальной 2-формой. Далее доказывается, что на каждом решении системы уравнений 2-мерного адиабатического движения газа определена линейная связность, для которой полученная 2-форма является тензором кручения. В пункте 3.4.4 мы показываем, что для всякого решения (u, v, ρ, p) со связностью без кручения скорость (u, v) потока газа является комплексно-аналитической функцией по переменным x и y.

Наконец в этом пункте для случая политропного потока газа постоянного обьема вычисляется широкий класс явных решений со связностями без кручения.

В разделе 3.5 мы изучаем геометрические структурs на решениях системы уравнений 3-мерного адиабатического движения газа.

Характеристческие ковекторы этой системы порождают[7] на каждом ее решении, рассматриваемом как 4-мерная поверхность, геометрическую структуру, которая состоит из 3-мерной плоскости и 3-мерного конуса в каждом кокасательном пространстве к этому решению, пересекающихся только в нуле. В пункте 3.5.1 рассматривается естественное расслоение μ таких геометрических структур в пространстве $\mathbb{R}^4$. В пункте 3.5.2 исследуется структурный дифференциальный инвариант 1-го порядка этих структур. В пункте 3.5.3 вычисляется структурный дифференциальный инвариант 1-го порядка на произвольном решении системы уравнений 3-мерного адиабатического движения газа.

Наконец в пункте 3.5.4 для случая политропного потока газа постоянного обьема мы вычисляем широкий класс явных решений, для которых структурный инвариант 1-го порядка равен нулю.

Глава 4 посвящена уравнениям Хохлова-Заболотской, нестационарного трансзвукового потока газа и уравнению коротких волн.

В разделе 4.1 мы приводим все необходимые сведения из дифференциальной геометрии, касающиеся метрик и их классических дифференциальных инвариантов.

В разделе 4.2 изучается уравнение Хохлова-Заболотской[22]

$$u_{tx} - (uu_x)_x - u_{yy} - u_{zz} = 0\,. \tag{1}$$

В пункте 4.2.1 мы рассматриваем это уравнение как нелинейный дифференциальный оператор 2-го порядка Δ, действуюший на сечениях расслоения

$$\pi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad \pi : (t, x, y, z, u) \mapsto (t, x, y, z).$$

по формуле $\Delta = \varphi_\Delta \circ j_2$, где φ_Δ – функция на многообразии 2-джетов $J^2\pi$ сечений расслоения π, определяемая левой частью уравнения.В пункте 4.2.2 исследуется символ $\mathrm{Smbl}_{\theta_2}\Delta$ оператора Δ в произвольной точке $\theta_2 \in J^2\pi$. Мы доказываем, что $\mathrm{Smbl}_{\theta_2}\Delta$ естественным образом отождествляется с метрикой Минковского

$$g(\theta_2) = 4udt^2 + 4dtdx - dy^2 - dz^2$$

на касательном пространстве T_p к базе расслоения π в точке $p = \pi_2(\theta_2)$. Отсюда немедленно следует, что если S – решение уравнения (1) и $L_S^{(2)}$ – образ сечения $j_2S : p \mapsto j_p^2 S$ расслоения π_2, то

$$g_S = 4u(t,x,y,z)dt^2 + 4dtdx - dy^2 - dz^2$$

является метрикой Минковского на многообразии $L_S^{(2)}$, ассоциированом с решением.

В пункте 4.2.3 мы используем классические дифференциальные инварианты метрик для нахождения явных решений уравнения (1). На этом пути мы находим:

1) решения с локально-плоскими метриками (локально-плоские решения), т.е. решения, метрики которых имеют нулевой тензор кривизны,

2) решения, метрики которых обладают нулевым тензором Риччи (Риччи-плоские решения),

3) решения с конформно-плоскими метриками (конформно-плоские решения), т.е. решения, метрики которых имеют нулевой тензор Вейля,

4) решения с проективно-плоскими метриками (проективно-плоские решения), т.е. решения, метрики которых обладают следующим свойством: в некоторой окрестности каждой точки решения существуют локальные координаты, в которых геодезические линии метрики являются прямыми.

5) решения, являющиеся многообразиями Эйнштейна, то есть решения, метрики которых пропорциональны их тензорам Риччи.

В разделе 4.3 мы исследуем точно так же, как уравнение Хохлова-Заболотской, уравнение нестационарного трансзвукового потока газа[31]

$$2u_{tx} + u_x u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0\,.$$

Точно так же, как для уравнения (1), мы используем классические дифференциальные инварианты метрик Минковского на решениях этого уравнения для нахождения явных решений.

[31] Ibragimov N.H. (ed), *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*, Vol. 1, Symmetries, exact solutions, and conservation laws, CRC Press, Boca Raton, 1994, pp. 429.

Наконец в разделе 4.4 мы исследуем уравнения коротких волн[35],

$$2u_{tx} - 2(x + u_x)u_{xx} + u_{yy} + 2ku_x = 0\,, \quad k = 0, 1$$

точно так же, как выше мы исследовали уравнение Хохлова-Заболотской и уравнение нестационарного трансзвукового потока газа.

Точно так же, как для этих уравнений, мы используем классические дифференциальные инварианты метрик на решениях уравнения коротких волн для нахождения явных решений.

Единственное отличие заключается в том, что решения уравнения коротких волн – 3-мерные. Поэтому за конформную плоскостность метрики в этом случае отвечает тензор Вейля-Схоутена[32].

Глава 5 посвящена дифференциальным инвариантам и решению проблемы эквивалентности гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения относительно контактных преобразований.

Уравнением Монжа-Ампера называется следующее нелинейное уравнение в частных производных 2-го порядка

$$N(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) + Az_{xx} + Bz_{xy} + Cz_{yy} + D = 0\,,$$

где N, A, B, C, D – функциии от x, y, z, z_x, z_y.

Уравнение Монжа-Ампера можно рассматривать как подмногообразие $\mathcal{E}$ в расслоении 2-джетов $J^2\tau$ сечений расслоения

$$\tau : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2\,, \quad \tau : (\,x, y, z\,) \mapsto (\,x, y\,)\,.$$

В пункте 5.1.2 дается геометрическое определение понятиям гиперболическое, параболическое и эллиптическое уравнение. В пункте 5.1.3 мы выводим непосредственно из геометрии расслоения $J^2\tau$ известноный результат[33], что каждое гиперболическое уравнение Монжа-Ампера $\mathcal{E}$ естественным образом

[32]Новиков С.П., Тайманов И.А., *Современные геометрические структуры и поля*, Москва, Изд-во МЦНМО, 2005, 581 с.

[33]Lychagin V.V., *Lectures on geometry of differential equations*, Universita "La Sapienza Roma, 1992, 133 p.

отождествляется с парой 2-мерных, косоортогональных подраспределений $\mathcal{D}^1_{\mathcal{E}}$ и $\mathcal{D}^2_{\mathcal{E}}$ распределения Картана $\mathcal{C}$ на $J^1\tau$. Отсюда следует в частности, что проблема эквивалентности для гиперболических уравнений Монжа-Ампера относительно контактных преобразований сводится к проблеме эквивалентности пар 2-мерных, косоортогональных подраспределений распределения $\mathcal{C}$ относительно контактных преобразований.

В разделе 5.2 исследуется расслоение уравнений Монжа-Ампера. В пункте 5.2.1, исследуется расслоение π гиперболических уравнений Монжа-Ампера. В пункте 5.2.2 мы исследуем орбиты общего положения относительно действия контактных преобразований в расслоениях джетов $J^k\pi,\ k = 2, 3$, и оцениваем число независимых образующих алгебры скалярных дифференциальных инвариантов в окрестности точки общего положения.

В разделе 5.3 мы строим дифференциальные инварианты гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения. В пункте 5.3.1 доказывается, что для гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения имеет место разложение касательного расслоения к $M = J^1\tau$ в прямую сумму

$$TM = \mathcal{D}^1_{\mathcal{E}} \oplus \mathcal{D}^2_{\mathcal{E}} \oplus \mathcal{D}^3_{\mathcal{E}}\,,$$

где $\mathcal{D}^3_{\mathcal{E}} = (\mathcal{D}^1_{\mathcal{E}})^{(1)} \cap (\mathcal{D}^2_{\mathcal{E}})^{(1)}$ и $(\mathcal{D}^i_{\mathcal{E}})^{(1)}$ 1-я производная распределения $\mathcal{D}^i_{\mathcal{E}}$, $i = 1, 2$.

Проекторы: $\mathrm{Prj}_{\,i}$, $i = 1, 2, 3$, $\mathrm{Prj}^{\,(1)}_{\,j}$, $j = 1, 2$ и $\mathrm{Prj}_{\,\mathcal{C}}$ из TM на распределения $\mathcal{D}^i_{\mathcal{E}}$, $(\mathcal{D}^j_{\mathcal{E}})^{(1)}$ и $\mathcal{C}$ соответственно являются дифференциальными инвариантами 1-го порядка уравнения Монжа-Ампера $\mathcal{E}$. Их можно представлять как векторнозначные дифференциальные 1-формы:

$$\mathrm{Prj}_{\,1} = \omega^1 \otimes X_1 + \omega^2 \otimes X_2,\ \mathrm{Prj}_{\,2} = \omega^3 \otimes X_3 + \omega^4 \otimes X_4,$$
$$\mathrm{Prj}_{\,3} = \omega^5 \otimes X_5,\ \mathrm{Prj}^{\,(1)}_{\,j} = \mathrm{Prj}_{\,j} + \mathrm{Prj}_{\,3},\ \mathrm{Prj}_{\,\mathcal{C}} = \mathrm{Prj}_{\,1} + \mathrm{Prj}_{\,2},$$

где $X_1, \ldots, X_5$ такие векторные поля, а $\omega^1, \ldots, \omega^5$ такие дифференциальные 1-формы на M, что

$$\mathcal{D}^1_{\mathcal{E}} = \langle\, X_1,\, X_2 \,\rangle\,,\ \mathcal{D}^2_{\mathcal{E}} = \langle\, X_3,\, X_4 \,\rangle\,,\ \mathcal{D}^3_{\mathcal{E}} = \langle\, X_5 \,\rangle\,,\ \omega^i(X_j) = \delta^i_j\,.$$

Формы кривизны $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1^1$, $\mathcal{R}_2^1$ и $\mathcal{R}$ распределений $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^2$, $(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^1)^{(1)}$, $(\mathcal{D}_{\mathcal{E}}^2)^{(1)}$ и $\mathcal{C}$ являются дифференциальными инвариантами 2-го порядка уравнений Монжа-Ампера:

$$\mathcal{R}_1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \otimes X_5, \quad \mathcal{R}_2 = -\omega^3 \wedge \omega^4 \otimes X_5,$$
$$\mathcal{R}_1^1 = -(b_{15}^3\omega^1 + b_{25}^3\omega^2) \wedge \omega^5 \otimes X_3 - (b_{15}^4\omega^1 + b_{25}^4\omega^2) \wedge \omega^5 \otimes X_4,$$
$$\mathcal{R}_2^1 = -(b_{35}^1\omega^3 + b_{45}^1\omega^4) \wedge \omega^5 \otimes X_1 - (b_{35}^2\omega^3 + b_{45}^2\omega^4) \wedge \omega^5 \otimes X_2,$$
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2.$$

Далее, применяя естественные операции линейной алгебры и тензорного анализа к проекторам и формам кривизны, мы получаем множество новых дифференциальных инвариантов. В частности, применяя операцию свертки $\lrcorner$, получаем в явном виде обе образующие I^1 и I^2 алгебры скалярных дифференциальных инвариантов 2-го порядка уравнений Монжа-Ампера:

$$I^1 = \Lambda_{12}/\Lambda_1 \quad \text{и} \quad I^2 = \Lambda_{12}/\Lambda_2\,,$$

где коэффициенты Λ_1, Λ_2 и Λ_{12} находятся из соотношений

$$\big(\mathcal{R}_2^1 \lrcorner\ \mathcal{R}_1\big) \lrcorner\ \big(\mathcal{R}_2^1 \lrcorner\ \mathcal{R}_1\big) = 2\Lambda_1\,\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5\,,$$
$$\big(\mathcal{R}_1^1 \lrcorner\ \mathcal{R}_2\big) \lrcorner\ \big(\mathcal{R}_1^1 \lrcorner\ \mathcal{R}_2\big) = 2\Lambda_2\,\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5\,,$$
$$\big(\mathcal{R}_2^1 \lrcorner\ \mathcal{R}_1\big) \lrcorner\ \big(\mathcal{R}_1^1 \lrcorner\ \mathcal{R}_2\big) = \Lambda_{12}\,\omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^5 \otimes X_5\,.$$

В пункте 5.3.5 мы показываем, что множество гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения естественным образом распадается на три подкласса аналогично тому, как множество всех уравнений Монжа-Ампера распадается на гиперболические, параболические и эллиптические уравнения. В пункте 5.3.6, применяя операции тензорной алгебры и анализа к полученным инвариантам, мы доказываем, что всякое гиперболическое уравнение Монжа-Ампера общего положения порождает естественным образом инвариантные дифференциальные 1-формы Ω^1, Ω^2, $\ldots$, Ω^5 на M линейно-незавсимые в каждой точке. В пункте 5.3.7, применяя операции тензорной алгебры и анализа к полученным инвариантам, находим множество скалярных дифференциальных инвариантов 3-го порядка. Среди всех полученных скалярных инвариантов мы выбираем 5 функционально независимых инвариантов I^1, I^2, ..., I^5. Эти инварианты порождают инвариантную систему координат $I = (I^1, \ldots, I^5)$ в M.

Наконец, в последнем разделе мы мы доказываем, что класс эквивалентности уравнения Монжа-Ампера общего положения относительно контактных преобразований однозначно определяется выражениями инвариантных дифференциальных форм Ω^i, $i = 1, 2, \ldots, 5$ в инвариантной системе координат I.

В главе 6 мы представляем полное описание алгебры скалярных дифференциальных инвариантов для широкого класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка вида

$$y'' = a(x,y)y'^{\,3} + b(x,y)y'^{\,2} + c(x,y)y' + d(x,y) \qquad (2)$$

относительно точечных преобразований[34]. В разделе 6.1 мы отождествляем каждое уравнение $\mathcal{E}$ вида (2) с сечением $S_{\mathcal{E}}$: $(x,y) \mapsto (\, x, y,\, a(x,y), \ldots,\, d(x,y)\,)$ тривиального расслоения

$$\pi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \pi : (\, x^1, x^2, u^1, \ldots, u^4\,) \mapsto (\, x^1, x^2\,)$$

Это отождествление является биекцией множества всех рассматриваемых уравнений на множество всех сечений расслоения π. Поскольку всякое точечное преобразование переменных x и y преобразует каждое уравнение (2) в уравнение того же вида[35], то в силу нашего отождествления, всякое точечное преобразование порождает преобразование сечений расслоения π. Иными словами, всякое точечное преобразование f базы расслоения π естественным образом поднимается до диффеоморфизма $f^{(0)}$ тотального пространства расслоения π. Дифференциальный порядок этого естественного расслоения равен 2.

[34]Любые два таких уравнения локально контактно эквивалентны, см. Chern S.-S., *Projective geometry, contact transformations, and CR-structures*// 1982, Arch. Math. Vol. 38, pp. 1 - 5

[35]Арнольд В.И., *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Редакц. журн. "Регулярная и хаотическая динамика Удмуртский гос. ун-т, 2000, 400 с.

Диффеоморфизм $f^{(0)}$ естественно поднимается до диффеоморфизма $f^{(k)}$ расслоения $J^k\pi$ всех k-джетов сечений расслоения π, $k = 0, 1, ..., \infty$. Т.о., псевдогруппа Γ всех точечных преобразований базы расслоения π действуют на каждом расслоении $J^k\pi$ своими поднятыми преобразованиями $f^{(k)}$.

В раздел 6.2 мы описываем алгебры изотропии точек θ_k расслоения $J^k\pi$ для $k = 0, 1, 2, 3$. Это приводит к описанию орбит действия псевдогруппы Γ на расслоениях $J^k\pi$. В частности, получено следующее:

1. $J^k\pi,\ k = 0, 1$, является орбитой действия Γ,

2. $J^2\pi$ – объединение 2-х орбит: орбиты общего положения Orb_0^2 и вырожденной орбиты.

3. $J^3\pi$ – объединение 4-х орбит: одна из которых, Orb_0^3 – орбита общего положения, остальные – вырожденные орбиты.

Отсюда ясно, что нетривиальные дифференциальные инварианты определены на $J^k\pi$ при $k \geq 2$. В разделе 6.3.1, следуя общему методу главы 2, мы исследуем пространства формальных симметрий $\mathcal{A}_{\theta_2}$ точек $\theta_2 \in J^2\pi$. В частности, мы исследуем 2-форму ω_H, определенную горизонтальным подпространством $H \subset \mathcal{A}_{\theta_2}$. Компоненты нулевого порядка форм ω_H порождают тривиальный структурный дифференциальный инвариант. Анализ компоненты первого порядка формы ω_H приводит к выделению естественного класса горизонтальных пространств в $\mathcal{A}_{\theta_2}$, для которых компоненты первого порядка форм ω_H равны нулю, а компоненты второго порядка не зависят от выбора горизонтального пространства H из этого класса и определяют тензорный дифференциальный инвариант

$$\omega^2 = \omega_H = (L_1 e_1 + L_2 e_2) \otimes (dx^1 \wedge dx^2),$$

где $e_1 = 2\dfrac{\partial}{\partial x^1} \otimes (dx^1 \odot dx^1) + \dfrac{\partial}{\partial x^2} \otimes (dx^1 \odot dx^2)$,
$e_2 = 2\dfrac{\partial}{\partial x^2} \otimes (dx^2 \odot dx^2) + \dfrac{\partial}{\partial x^1} \otimes (dx^1 \odot dx^2)$, а L_1 и L_2 – некоторые многочлены от координат $u^i, u^i_j, u^i_{j_1 j_2}$ расслоения $J^2\pi$.

Дифференциальный инвариант ω^2 различает орбиты расслоения $J^2\pi$ и, в частности, является препятствием к линеаризуемости уравнений (2) точечными преобразованиями.

Наконец в этом разделе, применяя операцию тензорной алгебры – свертки по верхнему и первому нижнему индексам к ω^2, мы получаем тензорный дифференциальный инвариант $\alpha^2 = (L_1dx^1 + L_2dx^2) \otimes (dx^1 \wedge \ dx^2)$, известный как форма Лиувилля[36]. Прообраз этой формы при той же операции дает тензорный дифференциальный инвариант $\beta^2 = \big(L_2(\partial/\partial x^1) - L_1(\partial/\partial x^2)\big) \otimes (dx^1 \wedge \ dx^2)^2$.

В пункте 6.3.2 мы строим тензорные дифференциальные инварианты на подрасслоении расслоения $J^3\pi$, которое является прообразом $(\pi_{3,2})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^2)$ орбиты общего положения Orb_0^2. Анализ пространств формальных симметрий $\mathcal{A}_{\theta_3}$ точек θ_3 из этого подрасслоения и 2-форм ω_H, определенных горизонтальными пространствами $H \subset \mathcal{A}_{\theta_3}$, приводит к выделению естественного класса горизонтальных пространств $H \subset \mathcal{A}_{\theta_3}$, для которых компоненты первого порядка форм ω_H равны нулю, а компоненты второго порядка не зависят от выбора горизонтального прстранства из этого класса и порождают тензорный дифференциальный инвариант ω^2. Исследование компонент третьего порядка форм ω_H приводит к построению тензорного дифференциального инварианта на $(\pi_{3,2})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^2)$

$$\omega^3 = \big(\Psi^1 e_1 + \Psi^2 e_2\big) \otimes (dx^1 \wedge dx^2)^3 \,,$$

где Ψ^1, Ψ^1 – многочлены от стандартных координат u^i, u^i_j, $u^i_{j_1j_2}$, $u^i_{j_1j_2j_3}$ расслоения $J^3\pi$.

Далее, применяя свертку по верхнему и первому нижнему индексам к ω^3, мы получаем тензорный дифференциальный инвариант $\alpha^3 = (\Psi^1 dx^1 + \Psi^2 dx^2) \otimes (dx^1 \wedge dx^2)^3$. Свертка тензоров β^2 и α^3 приводит к известному тензорному дифференциальному инварианту[33] $\nu = \beta^2 \lrcorner \ \alpha^3 = L_3(dx^1 \wedge dx^2)^5$. Свертка тензоров β^2 и ω^3 приводит к тензорному дифференциальному инварианту $\gamma = \beta^2 \lrcorner \ \omega^3$.

Инварианты ω^2, ν и γ полностью описывают орбиты расслоения $J^3\pi$.

[36] Liouville R., *Sur les invariantes de certaines equationes differentielles*// Jour. de l'Ecole Politechnique, Vol. 59, 1889, pp. 7–88.

Наконец, в этом разделе, применяя операции тензорной алгебры к полученным тензорным инвариантам, мы получаем известные дифференциальные инварианты 3-го порядка ξ_1 и ξ_2, которые являются векторными полями на подрасслоении $(\pi_{\infty,2})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^2)$ расслоения $J^\infty\pi$ линейно-независимыми в каждой точке.

В разделе 6.4 мы изучаем алгебру A скалярных дифференциальных инвариантов на подрасслоении расслоения $J^\infty\pi$, являющимся прообразом $(\pi_{\infty,2})^{-1}(\mathrm{Orb}_0^3)$ орбиты общего положения Orb_0^3 в $J^3\pi$. Вначале мы в явном виде находим семейство I^1, I^2, ..., I^6 образующих алгебры A_4 скалярных дифференциальных инвариантов порядка 4. Затем, используя независимые дифференцирования ξ_1 и ξ_2, мы находим среди 18 инвариантов

$$I^1,\ \ldots,\ I^6,\ \xi_1(I^1),\ \ldots,\ \xi_1(I^6),\ \xi_2(I^1),\ \ldots,\ \xi_2(I^6)$$

алгебры скалярных дифференциальных инвариантов порядка 5 все 14 её образующих. Отсюда следует, что образующие алгебры A_4 связаны 4-мя независимыми дифференциальными соотношениями 1-го порядка. Мы находим в явном виде эти соотношения. Наконец мы доказываем, что полученное семейство образующих алгебры A_4 является семейством образующих всей алгебры A, а найденные 4 независимых дифференциальных соотношения 1-го порядка образуют полное семейство дифференциальных соотношений между этими образующими.

В последнем разделе 6.5 мы решаем проблему эквивалентности для уравнений $\mathcal{E}$, для которых 3-джеты соответствующих им сечений $S_{\mathcal{E}}$ принадлежат орбите общего положения Orb_0^3. Отметим, что среди этих уравнений находятся все уравнения (2) общего положения.

В глава 7 получено полное описание алгебры скалярных дифференциальных инвариантов линейных ОДУ порядка $n \geq 3$, а также получено решение проблемы локальной эквивалентности этих уравнений относительно контактных преобразований[37].

[37]Все линейные ОДУ порядка $n \leq 2$ локально эквивалентны между собой, см.

В разделе 7.1 собраны необходимые предварительные сведения о линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях.

В разделе 7.2 мы доказываем, что размерность алгебры точечных симметрий линейного ОДУ является инвариантом контактных преобразований линейных ОДУ.

Известно[38], что размерность алгебры Pnt $\mathcal{E}$ точечных симметрий линейного ОДУ n-го порядка равна либо $n+4$, либо $n+2$, либо $n+1$.

Т.о. проблема локальной эквивалентности линейных ОДУ распадается на три части, в соответствии с размерностью алгебры точечных симметрий.

Известно[26], что всякое линейное ОДУ подходящим точечным преобразованием приводится к виду

$$y^{(n)} = a_{n-3}(x)\, y^{(n-3)} + a_{n-4}(x)\, y^{(n-4)} + \ldots + a_0(x)\, y\,. \qquad (3)$$

В результате, проблема локальной эквивалентности линейных ОДУ сводится к проблема локальной эквивалентности линейных ОДУ вида (3).

В разделе 7.3 мы доказываем, что уравнение $y^{(n)} = 0$ является формой (3) для любого линейного ОДУ с $n+4$ – мерной алгеброй точечных симметрий. Тем самым решаем проблему локальной эквивалентности для таких ОДУ.

В разделе 7.4 для линейных ОДУ с алгебрами точечных симметрий размерностей $n+2$ и $n+1$ доказывается, что всякое контактное преобразование таких уравнений является точечным преобразованием. Это позволяет в разделе 7.5 свести проблему локальной контактной эквивалентности линейных ОДУ к проблеме локальной эквивалентности линейных ОДУ (3) относительно точечных преобразований вида

$$\tilde{x} = f(x) = \frac{\alpha\, x + \beta}{\gamma\, x + \delta}, \quad \tilde{y} = y\,\big|\, f'\,\big|^{(n-1)/2},\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, c \in \mathbb{R} \qquad (4)$$

Cartan E., *Sur les varietes a connexion projective*// Bull. Soc. Math. France 52 (1924), 205-241.

[38]Leach P.G.L., Mahomed F.M., *Symmetry Lie algebras of nth order ordinary differential equations*// J. Math. Analysis and Appl., 151, 80-107, 1990.

В разделе 7.6 мы отождествляем каждое уравнение $\mathcal{E}$ вида (3) с сечением $S_{\mathcal{E}} : x \mapsto \big(x,\, a_{n-3}(x), \ldots, a_0(x)\big)$ тривиального расслоения

$$\tau : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-2} \to \mathbb{R}^1\,.$$

Это отождествление порождает естественное поднятие проективных преобразований

$$\tilde{x} = f(x) = \frac{\alpha\, x + \beta}{\gamma\, x + \delta}\,, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\,, \ \ \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \neq 0\,, \quad (5)$$

базы $\mathbb{R}^1$ расслоения τ в тотальное пространство $E = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-2}$ расслоения τ. Последнее позволяет свести проблему локальной эквивалентности линейных ОДУ (3) относительно преобразований вида (4) к проблеме локальной эквивалентности сечений расслоения τ относительно группы G проективных преобразований (5) базы $\mathbb{R}^1$ этого расслоения.

В пункте 7.6.2 мы исследуем алгебру $\mathrm{Prj}\ S$ проективных симметрий сечения S расслоения τ и, в частности, получем, что $\dim \mathrm{Pnt}\ \mathcal{E} = \dim \mathrm{Prj}\ S_{\mathcal{E}} + n + 1$.

В пункте 7.6.3 доказывается, что тотальное пространство E расслоения τ является объединением инвариантных относительно преобразований $f^{(0)}$, непересекающихся подмножеств

$$E = E_{n-3} \cup E_{n-4} \cup \ldots \cup E_0 \cup E_{-1},$$

где $E_i = \{\ (x,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, a_i,\, \ldots,\, a_0\,) \in E \ \mid\ a_i \neq 0\ \}$, $E_{-1} = \{\,(\,x,\, 0,\, \ldots,\, 0\,) \in E\,\}$ и $n - 3 \geq i \geq 0$. В результате всякое сечение расслоения τ является сечением какого-нибудь из инвариантных подрасслоений

$$\tau^i = \tau|_{E_i} : E_i \longrightarrow \mathbb{R}^1\,.$$

Далее мы находим векторное поле на $J^\infty\tau^i$ инвариантное относительно подгруппы $G_+ \subset G$, являющейся связной компонентой единицы группы G.

В пункте 7.6.4 дается полное описание алгебры A_i скалярных дифференциальных инвариантов расслоения τ^i относительно подгруппы G_+. Тем самым дается полное описание алгебры скалярных дифференциальных инвариантов линейных

ОДУ порядка $n \geq 3$. Затем мы доказываем, что скалярные дифференциальные инварианты сечений расслоения τ^i, допускающих проективные симметрии, являются константами.

В пункте 7.6.5 мы сводим проблему локальной эквивалентности сечений расслоения τ^i относительно группы G к проблеме локальной эквивалентности этих сечений относительно подгруппы G_+ и приводим ее решение.

В Приложении представлены в качестве примера программы в компьютерно-алгебраической системе REDUCE, с помощью которых получены дифференциальные инварианты уравнений Монжа-Ампера и вычислены пространства формальных симметрий и алгебры изотропии естественных расслоений, рассматриваемых в диссертации.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. **Гусятникова В.Н., Виноградов А.М., Юмагужин В.А., *Вторичные дифференциальные операторы*// ДАН СССР, 1985, Т. 283, Вып. 4, стр. 801 - 805.**

2. **Gusyatnikova V.N., Vinogradov A.M., Yumaguzhin V.A., *Secondary differential operators*// Journ. Geometry and Phyzics, 1985, Vol. 2, No. 2, pp. 23 – 65.**

3. **Gusyatnikova V.N., Yumaguzhin V.A., *Symmetries and conservation laws of Navier-Stokes equations*// Acta Applicandae Mathematicae, 1989, Vol. 15, pp. 65 - 81.**

4. **Gusyatnikova V.N., Samokhin A.V., Titov V.S., Vinogradov A.M., Yumaguzhin V.A.. *Symmetries and conservation laws of Kadomtsev-Pogutse equations*// Acta Applicandae Mathematicae, 1989, Vol. 15, pp. 23 - 64.**

5. **Виноградов А.М., Юмагужин В.А., *Дифференциальные инварианты тканей на 2-мерных многообразиях*// Мат. заметки, 1990, Т. 48, Вып. 1, стр. 46 - 68.**

6. **Гусятникова В.Н., Юмагужин В.А., *Точечные преобразования и линеаризуемость обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка*// Мат. заметки, 1991, Т. 49, Вып. 1, стр. 146 - 148.**

7. Гусятникова В.Н., Юмагужин В.А., *Проблема эквивалентности линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка*, Российская академия наук. Институт программных систем. Теоретические и прикладные основы программных систем. Сборник трудов, стр. 423 - 433, Переславль-Залесский, 1994.

8. Yumaguzhin V.A., Gusyatnikova V.N., *Aplication of computer algebra methods to linearisation problem for ODEs*, Proc. of International Workshop on New Computer Technologies and Control Systems, 13 - 19 August, Pereslavl-Zalessky, Russia, 1995, pp. 65 - 67.

9. **Yumaguzhin V.A., *Point transformations and classification of 3-order linear ODEs*// Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 4, No. 3, pp. 403-410, 1996.**

10. **Yumaguzhin V.A. *Classification of 3-rd order linear ODEs up to equivalence*// Journal of Differential Geometry and its Applications Vol. 6, No. 4, pp. 343-350, 1996.**

11. Yumaguzhin V.A., *Differential invariants, webs and ordinary differential equations*// Proc. of III International Workshop on Differential Inclusions and Control, Pereslavl-Zalessky, Russia, 1998, pp. 49 - 52.

12. **Yumaguzhin V.A., Gusyatnikova V.N., *Contact transformations and local reducibility of ODEs to the form y"'=0*// Acta Applicandae Mathematicae, 1999, V. 56, No. 2,3, pp. 155-179.**

13. **Юмагужин В.А., *Локальная классификация линейных обыкновенных дифференциальных уравне-***

ний// **Доклады Академии Наук, Том. 377, No. 5, 2001, стр. 605 – 607.**

14. **Юмагужин В.А.,** ***Классификация линейных обыкновенных дифференциальных уравнений I***// **Дифференциальные уравнения, 2002, Том. 38, No.8, стр. 1063-1070.**

15. **Юмагужин В.А.,** ***Классификация линейных обыкновенных дифференциальных уравнений II***//**Дифференциальные уравнения, 2002, Том. 38, №.12, стр.1627-1632.**

16. **YumaguzhinV.A.,** ***Contact classification of linear ordinary differential equations***//**Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 72, No. 1/2, June 2002, pp. 155-181.**

17. В.А.Юмагужин, В.Н.Юмагужина, Интегрируемые структуры конечного типа, ИПС РАН, Программные системы: теория и приложения. Тр. межд. конф., г. Переславль-Залесский, май, 2004, том 2, стр. 409-422.

18. **Yumaguzhin V.A.,** ***On the obstruction to linearizability of 2-order ordinary differential equations***// **Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 83, No. 1-2, 2004. pp.133-148.**

19. Юмагужин В.А., *Интегрируемые структуры конечного типа*// Фундаментальная и прикладная математика, Том. 10, No. 3-4, 2004, стр.255-269.

20. Yumaguzhin V.A., *Finite-type integrable structures*// Journal of Mathematical Sciences, Vol.136, No. 6, 2006, pp.4401-4410.

21. **Виноградов А.М., Марван М., Юмагужин В.А.,** ***Дифференциальные инварианты гиперболических уравнений Монжа-Ампера общего положения***// **Доклады Академии Наук, Том. 405, No. 3, 2005, стр. 299-301.**

22. Юмагужин В.А., *REDUCE–программа для вычисления дифференциальных инвариантов гиперболических уравнений Монжа-Ампера*// ИПС РАН, Программные системы: теория и приложения, Тр. межд. конф., г.Переславль-Залесский, октябрь, 2006, т. 2, с. 353-363.

23. Юмагужин В.А., Юмагужина В.Н., *Алгоритм вычисления алгебр изотропии уравнений* $y'' = a(x,y)y'^3 + b(x,y)y'^2 + c(x,y)y' + d(x,y)$// Программные системы: теория и приложения, Тр. межд. конф., г. Переславль-Залесский, октябрь, 2006, т. 2, с. 365-377.

24. Marvan M., Vinogradov A.M., Yumaguzhin V.A., *Differential invariants of generic hyperbolic Monge–Ampere equations*// Central European Journal of Mathematics, 5(1), 2007, 105-133.

25. Yumaguzhin V., On the obstruction to integrability of almost-complex structures, (2008), http://lanl.arxiv:0804.0690v1.

26. Yumaguzhin V., *Differential invariants of 2-order ODEs, I*// Acta Applicandae Mathematicae, (2009). http://www.springerlink.com/content/q8p4114177861333/?p=2c74ea4be8c84a039b54949b747d7eb4&pi=8

27. Юмагужин В.А., Юмагужина В.Н., *Скалярные дифференциальные инварианты уравнений* $y'' = a^3(x,y)y'^3 + a^2(x,y)y'^2 + a^1(x,y)y' + a^0(x,y)$// Программные системы: теория и приложения Тр. межд. конф., г. Переславль-Залесский, Май, 2009, т. 1, с. 105-121.

28. Lychagin V., Yumaguzhin V., *Minkowski metrics on solutions of the Khokhlov-Zabolotskaya equation*// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2009, Vol. 30, No. 4, pp. 333-336.

29. Lychagin V., Yumaguzhin V., *On geometric structures of 2-dimensional gas dynamics equations*// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2009, Vol. 30, No. 4, pp. 327-332.

Юмагужин Валерий Афтахович

Методы вычисления дифференциальных инвариантов и их приложения к исследованию дифференциальных уравнений

Автореф. дисс. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук

Подписано в печать 24.11.2009. Заказ № 12

Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. 1,8. Тираж 100 экз.

Отпечатано в изд-ве Университета города Переславля

152020, г. Переславль-Залесский, ул. Советская, д. 2.

тел. (48535) 98-141