На правах рукописи

Собачкина Наталья Леонидовна

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ О ДВИЖЕНИИ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 — дифференциальные уравнения

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Красноярск — 2009

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете и Институте вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор

Андреев Виктор Константинович

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, **Филимонов Михаил Юрьевич**

кандидат физико-математических наук, доцент **Любанова Анна Шоломовна**

Ведущая организация: Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, г. Уфа

Защита диссертации состоится 18 декабря 2009 г. в ____часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660074, Красноярск, ул. Киренского, 26 корпус Ж, ауд.1-15.

С диссертацией можно ознакомиться в читальном зале библиотеки Сибирского федерального университета, ул. Киренского, 26.

Автореферат разослан "___"ноября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Кириллов К.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В механике жидких сред часто используются так называемые *классические модели*, к которым относятся уравнения: газовой динамики, Эйлера идеальной жидкости, Навье–Стокса вязкой жидкости, Обербека–Буссинеска конвективных течений. В последнее время в связи с появлением новых задач, развитием математического аппарата и средств вычислительной техники возрос интерес к *неклассическим моделям гидродинамики*. В качестве примера можно привести модели вязкого теплопроводного газа, микроконвекции, а также конвекции с учетом эффектов термодиффузии и диффузионной теплопроводности. Такие усложненные модели с большей точностью описывают реальные физические процессы и в последнее время активно используются в вычислительной гидродинамике. В связи с этим является актуальной задача качественного исследования уравнений подмоделей усложненных сред. В частности, точные решения всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Они используются в качестве "тестовых задач" для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов.

Данная работа посвящена изучению уравнений подмоделей движения бинарной смеси с учетом эффекта термодиффузии. Эти подмодели возникают при изучении движений смесей в достаточно длинных цилиндрических слоях. По классификации группового анализа они являются инвариантными или частично-инвариантными решениями общих уравнений термодиффузии. Соответствующие системы уравнений хотя и содержат меньшее число зависимых и независимых переменных, однако начально-краевые задачи для них являются очень трудными для исследования.

Основу модели термодиффузии бинарной смеси составляет система уравнений Навье–Стокса, дополненная уравнениями тепло- и массопереноса. Используется приближение Обербека–Буссинеска, предназначенное для описания конвективных течений в естественных земных условиях. Точные решения уравнений конвекции бинарной смеси рассматривались в работах Гершуни Г.З., Жуховицкого Е.М., Сорокина Л.Е. и Yanase S., Kohno K., посвященных в основном изучению устойчивости соответствующих движений. В указанных выше работах были найдены точные решения уравнений, *описывающие стационарное основное течение*. Методы группового анализа дифференциальных уравнений при этом не использовались. Однако, как показано в работах Андреева В.К., Рыжкова И.И., все эти решения имеют групповую природу. Групповые свойства системы в случае $\mathbf{g} = 0$ рассмотрены Андреевым В.К.; там же отмечена важность изучения *нестационарных движений* смесей. Поэтому исследование начально-краевых задач о движении смесей в цилиндрических слоях с поверхностями раздела или свободными границами является актуальной задачей.

Цель диссертационной работы заключается в исследовании инвариантных и частично-инвариантных решений начально-краевых задач, описывающих однослойные и двухслойные термодиффузионные движения смесей в цилиндрических слоях, построение точных решений этих задач и вычисление их асимптотического поведения, а также численное решение поставленных задач.

Методы исследования. В данной работе для нахождения точных решений и вычисления асимптотик использовались метод преобразования Лапласа, метод Фурье для решения параболических уравнений, метод априорных оценок, а также методы общей теории дифференциальных уравнений. Для численного решения задач применялись следующие методы: метод численного обращения преобразования Лапласа, метод Галеркина, метод Рунге-Кутта.

Научная новизна. В диссертации впервые исследованы начально-краевые задачи, описывающие нестационарные однослойные и двухслойные течения бинарных смесей в цилиндрических слоях. Для решений специального вида найдены точные решения и вычислено их асимтотическое поведение. Численное решение некоторых задач хорошо подтверждают качественные результаты.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер и представляют интерес для специалистов в следующих областях: моделирование конвективных течений, качественный анализ дифференциальных уравнений. Проведенное исследование моделей термодиффузионного движения вносят вклад в качественную теорию дифференциальных уравнений данной подмодели, а также теорию, описываемых этой моделью явлений - конвекции, диффузии и термодиффузии. Полученные результаты могут быть использованы при решении соответствующих задач как аналитическими, так и численными методами. Данная работа соответствует концепции программы ПОДМОДЕЛИ, направленной на максимальное извлечение возможностей, заложенных в свойствах симметрии дифференциальных уравнений механики сплошной среды.

Достоверность полученных результатов. Достоверность результатов диссертации подтверждается использованием классических математических моделей механики сплошных сред и математических методов их исследования, а также согласованием аналитических решений и данных численных расчетов.

Личное участие автора в получении представленных научных результатов. Все результаты, включенные в диссертацию, принадлежат лично автору. В совместных работах вклад соавторов равнозначен.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях, семинарах и научных школах:

— Конкурс-Конференция молодых ученых Института Вычислительного моделирования СО РАН (г.Красноярск, 2004г.),

— XXXV Региональная молодежная школа-конференция "Проблемы теоретической и прикладной математики"(г.Екатеринбург, 2004г.),

— XXXVII Региональная молодежная школа-конференция "Проблемы теоретической и прикладной математики"(г.Екатеринбург, 2006г.),

— VII Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Красноярск, 2006 г.),

— XXXVIII Региональная молодежная школа-конференция "Проблемы теоретической и прикладной математики"(г.Екатеринбург, 2007г.),

— Семинары Института Вычислительного моделирования СО РАН "Математическое моделирование в механике"под руководством профессора В.К. Андреева;

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, 1 из них опубликована в журнале из списка ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, приложения, заключения и списка литературы, который содержит 64 наименования. Общий объем диссертации 141 страница, включая 18 рисунков.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности работы, приведен обзор литературы по теме исследования, описана структура диссертации и изложены ее основные результаты. Приведена математическая формулировка начально-краевой задачи о движении бинарных смесей в цилиндрических областях.

В **первой главе** изучаются осесимметрические нестационарные течения бинарной смеси вблизи точек локального нагрева свободной цилиндрической границы в случае, когда поверхностное натяжение есть линейная функция температуры и концентрации.

В **§ 1.1** рассматривается осесимметрическое движение бинарной смеси, так что в уравнениях термодиффузионного движения азимутальная скорость v равна нулю, а остальные функции не зависят от угла φ. Пусть $u(r, z, t)$,

$w(r,z,t)$ — проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат r и z, $p(r,z,t)$ — давление, $\theta(r,z,t)$ — отклонение температуры от равновесной, а $c(r,z,t)$ — отклонение концентрации от равновесной. Тогда система уравнений примет вид (внешние силы отсутствуют)

$$u_t + uu_r + wu_z + \frac{1}{\rho}p_r = \nu\left(\Delta u - \frac{u}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$w_t + uw_r + ww_z + \frac{1}{\rho}p_z = \nu\Delta w, \tag{2}$$

$$u_r + \frac{1}{r}u + w_z = 0, \tag{3}$$

$$\theta_t + u\theta_r + w\theta_z = \chi\Delta\theta, \tag{4}$$

$$c_t + uc_r + wc_z = d\Delta c + \alpha d\Delta\theta, \tag{5}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$ — оператор Лапласа, $\rho, \nu, \chi, d, \alpha$ — положительные постоянные: плотность, кинематическая вязкость, температуропроводность, коэффициенты диффузии и Соре соответственно.

Предположим, что свободная граница описывается уравнением $r = h(z,t)$. Тогда условия на ней примут вид:

$$h_t + wh_z - u = 0; \tag{6}$$

$$(1-h_z^2)(u_z+w_r) + 2h_z(u_r - w_z) = \frac{L}{\rho\nu}\left[(h_z\theta_r + \theta_z)\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + (h_z c_r + c_z)\frac{\partial\sigma}{\partial c}\right]; \tag{7}$$

$$p_{gas} - p + 2\rho\nu L^{-2}[u_r - h_z(u_z+w_r) + h_z^2 w_z] = 2\sigma H; \tag{8}$$

$$kL^{-1}(\theta_r - h_z\theta_z) + \gamma(\theta - \theta_{gas}) = Q; \tag{9}$$

$$c_r - h_z c_z + \alpha(\theta_r - h_z\theta_z) = 0, \tag{10}$$

где $L = (1+h_z^2)^{1/2}$; $\sigma(\theta,c)$ — коэффициент поверхностного натяжения смеси и для большинства реальных жидкостей он хорошо аппроксимируется линейной зависимостью

$$\sigma(\theta,c) = \sigma^0 - æ_1(\theta - \theta^0) - æ_2(c - c^0) \tag{11}$$

с некоторыми постоянными $\sigma^0, \theta^0, c^0, æ_1, æ_2$; p_{gas} и θ_{gas} — давление и температура окружающего газа, который считается пассивным. В (8) H — средняя кривизна свободной границы:

$$H = \frac{hh_{zz} - h_z^2 - 1}{2h(1+h_z^2)^{3/2}}. \tag{12}$$

Полная система уравнений и граничных условий в силу нелинейности, неизвестной свободной границы довольна сложна даже для численного решения. Поэтому целесообразно принять некоторые упрощающие предположения.

В **§ 1.2** рассмотрена четырехпараметрическая подгруппа, порожденная операторами $\partial_z, t\partial_z + \partial_w, \partial_\theta, \partial_c$. Нетрудно проверить, что она допускается системой уравнений термодиффузии (1)–(5). Ее инварианты суть t, r, u, p, значит, частично-инвариантные решения относительно этой подгруппы имеют вид

$$u = u(r,t), \quad w = w(r,z,t), \quad p = p(r,t), \quad \theta = \theta(r,z,t), \quad c = c(r,z,t). \tag{13}$$

В этом случае из уравнения сохранения массы (3) следует, что w есть линейная функция от z. Положим

$$w = zv(r,t). \tag{14}$$

Общий вид инвариантного многообразия относительно рассматриваемой подгруппы в пространстве $\{r, z, t\}$ есть $r = h(t)$ с произвольной функцией $h(t)$. Пусть зависимость $\sigma(\theta, c)$ имеет вид (11), тогда из граничного условия (7) получим, что $æ_1(\theta-\theta^0)-æ_2(c-c^0)$ есть квадратичная функция z. Поэтому положим, что

$$\theta(r,z,t) = a(r,t)z^2 + b(r,t), \quad c(r,z,t) = l(r,t)z^2 + g(r,t), \tag{15}$$

Интерпретация решения (13)–(15) такова. Пусть при осесимметричном нагревании достаточно длинного цилиндра бинарной смеси внешняя температура на его границе имеет максимум ($a < 0$) или минимум ($a > 0$) в точке $z = 0$. Тогда в окрестности этой точки внешнюю температуру можно аппроксимировать по параболическому закону, а движение внутри смеси описывается функциями (13)–(15).

Подстановка вида решения (13)–(15) в систему уравнений термодиффузии приводит к нелинейной краевой задаче об отыскании функций только двух переменных r и t в области с неизвестной цилиндрической границей радиуса $h(t)$.

В **§ 1.3** при специальных данных найдено точное решение полученной начально-краевой задачи, которое имеет вид:

$$v = \frac{m}{1+mt}\,, \quad u = -\frac{mr}{2(1+mt)}\,, \quad m = \text{const}, \tag{16}$$

$$p = p_{gas} + \frac{3\rho m^2}{8(1+mt)^2}\,[h^2(t) - r^2] + \frac{\sigma^0(1+mt)^{1/2}}{h_0} - \frac{\rho\nu m}{1+mt}\,, \tag{17}$$

$$h(t) = h_0(1+mt)^{-1/2}. \tag{18}$$

$$a(r,t)=\frac{1}{(1+mt)^2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n J_0\left(\frac{\mu_n}{h_0}\sqrt{1+mtr}\right)\exp\left\{-\frac{\chi\mu_n^2[(1+mt)^2-1]}{2mh_0^2}\right\}, \qquad (19)$$

Аналогично находятся и функции $b(r,t)$, $l(r,t)$, $g(r,t)$; для них соответствующие уравнения будут неоднородными. Это решение использовалось в качестве "тестового"при численном решении общей задачи.

В **§ 1.4** с помощью специальной замены переменных общая задача преобразуется к начально-краевой задаче для системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в фиксированной области на отрезке $[0,1]$ по пространственной переменной. Кроме того, эта задача оказалась разрешенной относительно производной по времени.

В **§ 1.5** приближенное решение искалось в виде ряда по смещенным полиномам Якоби $R_k^{(0,1)}$. Это связано с тем, что исходная система (1)–(5) имеет особенность при $r=0$. При этом, интересующее положение свободной границы определяется только нулевым членом разложения. В процессе решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений возникает необходимость вычисления определенных интегралов от произведений полиномов Якоби. В приложении приводится алгоритм расчета интегралов в общем виде для любого приближения по методу Галеркина.

В **§ 1.6** численно построены распределения поля скоростей, температуры и концентрации, а также описана эволюция свободной границы. Получены следующие результаты:

1. Если начальные значения температуры и концентрации равны нулю, то осевая скорость и радиус цилиндра монотонно убывают, а температура и концентрация тождественно равны нулю.

2. Пусть внешний поток тепла, начальные значения температуры и концентрации не равны нулю. Тогда температурное поле в точке воздействия имеет максимальное значение и, следовательно, поверхностное натяжение имеет минимум. Жидкость течет в сторону максимального поверхностного натяжения — оттекает от центра. Скорость движения замедляется, радиус жидкого цилиндра уменьшается, концентрация также уменьшается. А температура сначала возрастает, затем быстро стремится к нулю. Осевая скорость с течением времени меняет знак на границе, следовательно, жидкость меняет направление движения и начинает притекать к центру из-за увеличения поверхностного натяжения. Радиус жидкого цилиндра постепенно увеличивается, концентрация возрастает, температура по-прежнему стремится к нулю. Заметим, что минимальные значения радиуса и концентрации наблюдаются при переходе скорости через нуль.

Глава 2 посвящена исследованию осесимметрического нестационарного движения плоского слоя со свободными границами.

В **§ 2.1** решение задачи (1)–(5) ищется в виде (в отличие от (13)–(15)):

$$u = ru_1(z,t), \quad w = w(z,t), \quad p = p(z,t), \quad \theta = a(z,t)r^2 + b(z,t), \\ c = h(z,t)r^2 + g(z,t). \tag{20}$$

Эти решения являются частично-инвариантными относительно четырехпараметрической подгруппы, порожденной операторами $\partial/\partial r$, $t\partial/\partial r + \partial/\partial u$, $\partial/\partial\theta$, $\partial/\partial c$. Подстановка (20) в систему уравнений термодиффузии (1)–(5) и отделение переменной r приводит к нелинейной начально-краевой задаче об отыскании функций только двух переменных z и t в области с неизвестной границей, которой является толщина слоя $l(t)$.

Если u, p, a, b, h, g являются четными, а w — нечетной функцией переменной z, тогда поверхность $z = -l(t)$ можно принять за вторую свободную границу и следует добавить условия симметрии:

$$u_z = 0, \quad w = 0, \quad a_z = 0, \quad b_z = 0, \quad h_z = 0, \quad g_z = 0. \tag{21}$$

В **§ 2.2** находится точное решение сформулированной выше задачи при специальных данных. Оно имеет вид, отличный от (16)–(19):

$$u = \frac{k}{1+kt}\,r, \quad w = -\frac{2k}{1+kt}\,z, \quad l(t) = \frac{l_0}{(1+kt)^2}, \\ p = p_{gas} + \frac{3k^2\rho}{(1+kt)^2}\,(l^2(t) - z^2) - \frac{4\rho\nu k}{1+kt}, \quad a = b = h = g = 0, \\ k \equiv \mathrm{const} > 0, \quad l(0) = l_0 \equiv \mathrm{const} > 0. \tag{22}$$

$$a(z,t) = \frac{1}{(1+kt)^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left[\lambda_n z(1+kt)^2\right] \exp\left(-\chi\lambda_n^2\tau\right), \tag{23}$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l_0}, \quad n \in N, \quad \tau = \frac{(1+kt)^5 - 1}{5k}.$$

Аналогично находятся и функции $b(z,t)$, $h(z,t)$, $g(z,t)$; для них соответствующие уравнения будут неоднородными. Это решение было использоваться в качестве "тестового"при численном решении общей задачи.

В **§ 2.3** выполняется преобразование к задаче в фиксированной области. Решение задачи определялось методом Галеркина. В качестве базисных функций были взяты полиномы Лежандра, причем, как следует из условий симметрии, достаточно ограничиться четными полиномами $P_{2m}(y)$, $m =$

$0, 1, \ldots$. Система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений преобразуется к системе ОДУ первого порядка относительно $3n + 1$ неизвестных функций. Было показано, что решение (22), (23) является точным решением системы галеркинских приближений для любого n.

Расчеты задачи Коши для системы уравнений проводились методом Рунге–Кутта четвертого порядка точности. Были получены следующие результаты:

1. Если начальные значения температуры и концентрации равны нулю, то температура и концентрация равны нулю, а радиальная скорость и толщина слоя монотонно убывают. Здесь точно воспроизводится тестовое решение.

2. Пусть внешний поток тепла, начальные значения температуры и концентрации не равны нулю. Тогда толщина слоя, как и компонент скорости, уменьшается. При переходе через нуль радиальная скорость меняет знак — жидкость меняет направление движения, начинает притекать вдоль поверхности к центру. Это объясняется тем, что поверхностное натяжение уменьшается, и жидкость оттекает от центра, затем поверхностное натяжение увеличивается, и жидкость снова начинает притекать. Толщина слоя увеличивается, концентрация растет. Минимальные значения толщины слоя и концентрации наблюдаются при смене знака скорости.

В **главе 3** рассматривается инвариантное относительно оператора $-\partial_z + \rho_0 g x(\beta_1 A + \beta_2 B)\partial_{\bar{p}} + A\partial_T + B\partial_c$ решение уравнений движения бинарной смеси в модели Обербека–Буссинеска, которое имеет представление

$$\mathbf{u} = (u(x,y,t), v(x,y,t), w(x,y,t)), \quad \bar{p} = -(A\beta_1 + \beta_2 B)g\rho_0 xz + q(x,y,t),$$
$$T = -Az + \theta(x,y,t), \quad c = -Bz + c(x,y,t), \tag{24}$$

Введем функцию тока $\psi(r,\varphi)$, связанную с u и v соотношениями $u = r^{-1}\psi_\varphi,\ v = -\psi_r$. Тогда система уравнений, описывающая движение смеси в горизонтальной цилиндрической трубе, запишется в виде

$$\triangle\psi_t + \frac{\lambda}{r}\,\frac{\partial(\triangle\psi,\psi)}{\partial(r,\varphi)} = \triangle\triangle\psi + (\theta_r + c_r)\sin\varphi + \frac{1}{r}\,(\theta_\varphi + c_\varphi)\cos\varphi; \tag{25}$$

$$w_t + \frac{\lambda}{r}\,(\psi_\varphi w_r - \psi_r w_\varphi) = \triangle w - r\cos\varphi; \tag{26}$$

$$\mathrm{Pr}\,\theta_t + \frac{\lambda\mathrm{Pr}}{r}\,(\psi_\varphi\theta_r - \psi_r\theta_\varphi) - w = \triangle\theta; \tag{27}$$

$$\mathrm{Sc}\,c_t + \frac{\lambda}{r}\mathrm{Sc}(\psi_\varphi c_r - \psi_r c_\varphi) - \varepsilon_1 w = \triangle c - \varepsilon\triangle\theta, \tag{28}$$

где

$$\frac{\partial(\triangle\psi,\psi)}{\partial(r,\varphi)} = (\triangle\psi)_r\psi_\varphi - (\triangle\psi)_\varphi\psi_r, \quad \triangle\psi = \psi_{rr} + \frac{1}{r}\,\psi_r + \frac{1}{r^2}\,\psi_{\varphi\varphi},$$

где введены безразмерные параметры, такие как число Рейнольдса $\lambda = \mathrm{Pr}\,\mathrm{G}^2$, число Грассгофа G, число Прандтля Pr, число Шмидта Sc, параметры термодиффузии $\varepsilon, \varepsilon_1$, определяемые формулами

$$\mathrm{G} = \frac{A\beta_1 g h^4}{\nu^2}\,, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\chi}\,, \quad \mathrm{Sc} = \frac{\nu}{d}\,, \quad \varepsilon = -\frac{\alpha\beta_2}{\beta_1}\,, \quad \varepsilon_1 = \frac{\chi\beta_2 B}{d\beta_1 A}\,. \tag{29}$$

Ставятся начальные и граничные условия:

$$w = w_0(r,\varphi), \quad \psi = \psi_0(r,\varphi), \quad \theta = \theta_0(r,\varphi), \quad c = c_0(r,\varphi) \quad \text{при } t = 0; \tag{30}$$

$$\psi = 0, \quad \psi_r = 0, \quad w = 0, \quad \theta_r = 0, \quad c_r - \varepsilon\theta_r = 0 \quad \text{при } r = 1; \tag{31}$$

$$\frac{1}{r}\,\psi_\varphi,\ \psi_r,\ w, \theta,\ c \quad \text{ограничены при } r = 0. \tag{32}$$

Таким образом, решаем задачу (25)–(32) с неизвестными ψ, w, θ, c, причем $t \ge 0$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

В **§ 3.2** находится стационарное решение для ползущего движения $\lambda = 0$ в случае теплоизолированной стенки:

$$w_s = \frac{1}{8}\,(r^3 - r)\cos\varphi\,, \quad \theta = -\frac{(r^5 - 3r^3 + 4r)}{2^6\cdot 3}\,\cos\varphi, \tag{33}$$

$$c_s = -\frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon)(r^5 - 3r^3 + 4r)}{2^6\cdot 3}\cos\varphi. \tag{34}$$

$$\psi_s(r,\varphi) = \frac{\sin 2\varphi}{2^{13}\cdot 3^2\cdot 5}\,(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)(2r^8 - 15r^6 + 24r^4 - 11r^2). \tag{35}$$

$$q_s = \frac{r^2(1 + \varepsilon + \varepsilon_1)}{2^{10}\cdot 3^2\cdot 5}\,[10(2r^4 - 9r^2 + 24) + 3(5r^4 - 20r^2 + 9)\cos 2\varphi]. \tag{36}$$

Если $\varepsilon = -\varepsilon_1$, то получим решение В.В. Пухначева без учета концентрации. Если $\varepsilon = -1 - \varepsilon_1$, то $\psi_s(r,\varphi) = 0$, и, следовательно, $u = v = 0$, $q_s = 0$, а $w_s = w_s(r,\varphi)$, $\theta_s = \theta_s(r,\varphi)$, $c_s = c_s(r,\varphi)$ определяются по формулам (33), (34).

Для полученного решения массовый расход смеси через поперечное сечение трубы является нулевым.

В **§ 3.4** находится нестационарное решение для ползущего движения при $\lambda = 0$:

Скорость определяется формулой

$$w = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 - \exp(-(\mu_k^{(1)})^2 t)]J_1(\mu_k^{(1)} r)}{(\mu_k^{(1)})^3 J_0(\mu_k^{(1)})}\,\cos\varphi, \tag{37}$$

где $\mu_k^{(1)}$ — корни функции $J_1(\mu)$, а распределение "температуры" –

$$\theta = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k^{(1)})^5 J_0(\mu_k^{(1)})} \left\{1 + \frac{1}{1-\mathrm{Pr}}\left[\mathrm{Pr}\exp\left(-\frac{(\mu_k^{(1)})^2 t}{\mathrm{Pr}}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \exp(-(\mu_k^{(1)})^2 t)\right]\right\} J_1(\mu_k^{(1)} r)\cos\varphi. \tag{38}$$

Решение при $\mathrm{Pr} = 1$ находится из (38) предельным переходом при $\mathrm{Pr} \to 1$.

Распределение "концентрации" и функция тока также определяются в виде рядов Фурье (они не приводятся ввиду их громоздкости).

Доказано, что нестационарное решение выходит на стационарный режим при $t \to \infty$, например, $\|w_s - w\| \le C_1 \exp[-(\mu_1^{(1)})^2 t]$ в норме пространства $L_2((0,1)\times(0,2\pi); r)$, где $C_1 \equiv \mathrm{const} > 0$.

В **§ 3.5** находится решение стационарной задачи при достаточно малых значениях числа Рейнольдса в первом приближении. Это решение ищется в виде

$$\begin{gathered} \psi(r,\varphi) = \psi_0(r,\varphi) + \lambda\psi_1(r,\varphi), \quad w(r,\varphi) = w_0(r,\varphi) + \lambda w_1(r,\varphi), \\ \theta(r,\varphi) = \theta_0(r,\varphi) + \lambda\theta_1(r,\varphi), \quad c(r,\varphi) = c_0(r,\varphi) + \lambda c_1(r,\varphi), \end{gathered} \tag{39}$$

где $\psi_0, w_0, \theta_0, c_0$ есть решение соответствующих задач при $\lambda = 0$ (например $\psi_0, w_0, \theta_0, c_0$ определяются формулами (33)–(35), а функции $\psi_1, w_1, \theta_1, c_1$ — последовательно как решение *линейных* задач. Они найдены в виде полиномов по переменной r и тригонометрических функций по φ, имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

Рассматриваемое в задаче (25)–(32) при $\lambda = 0$ течение имеет плоскости симметрии $x = 0$, $y = 0$. Область течения $x^2 + y^2 < 1$, $z \in \mathcal{R}$ разбивается плоскостями $x = 0, y = 0$ на четыре части, каждая из которых заполнена вложенными друг в друга цилиндрическими поверхностями тока $\psi(x,y) = \mathrm{const}$, $z \in \mathcal{R}$. Траектории жидких частиц имеют спиральный характер. В верхней половине трубы смесь движется в отрицательном направлении оси z, а в нижней — в положительном.

Приводится численный расчет профилей скорости, распределения "температуры" и "концентрации" для различных значений суммы параметров $\varepsilon + \varepsilon_1$. При отсутствии термодиффузии ($\varepsilon + \varepsilon_1 = 0$) жидкость поднимается вверх около нагретой стенки и опускается вниз около холодной. В этом случае отсутствуют неоднородности "концентрации" ($c = 0$). Если $\varepsilon + \varepsilon_1 > 0$, то происходит нормальная термодиффузия и легкий компонент диффундирует в сторону нагретой границы. При $\varepsilon + \varepsilon_1 = -1$ функция тока обращается в ноль, наступает механическое равновесие. Дальнейшее уменьшение суммы параметров $\varepsilon + \varepsilon_1$ приводит к аномальной термодиффузии: легкие компоненты стремятся в сторону холодной границы, а тяжелые оказываются в областях с повышенной температурой.

Указанная четырехъячеистая структура, которой обладает решение стационарной задачи при $\lambda = 0$, сохраняется и в решении нелинейной стационарной задачи для той же системы при достаточно малых $\lambda \neq 0$. Показано, что движение смеси в цилиндре не меняется. Происходит расширение области, в которой движутся жидкие частицы, на величину порядка λ, т. е. спираль, по которой перемещаются частицы, расширяется на эту величину. Что касается функций θ и c, то их максимальные значения уменьшаются на величину порядка λ.

Глава 4 посвящена исследованию однонаправленного движения бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости с общей поверхностью раздела в цилиндрической трубе под действием градиента давления в смеси.

Система уравнений термодиффузионного движения в цилиндрической системе координат допускает двухпараметрическую подгруппу непрерывных преобразований, соответствующую операторам

$$\partial/\partial\varphi,\ \partial/\partial z + A\partial/\partial\theta + B\partial/\partial c - \rho f(t)\partial/\partial p,$$

A, B — постоянные, $f(t) \in C^\infty$ — произвольная функция. Инвариантное решение следует искать в виде

$$\begin{gathered} u = 0, \quad v = 0, \quad w = w(r,t) \quad p = -\rho f(t)z + \mathcal{D}(t), \\ \theta = Az + T(r,t), \quad c = Bz + K(r,t). \end{gathered} \tag{40}$$

Решение (40) применяется для описания однонаправленного движения бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в круглой цилиндрической трубе радиуса b под действием градиента давления $f_1(t)$ в смеси. Пусть смесь занимает область $0 \le r \le a$, $|z| < \infty$, а вязкая жидкость — цилиндрический слой $a \le r \le b$, $|z| < \infty$, так что $w_j(r,t)$ — осевая скорость $(j = 1, 2)$, $p_j = -\rho_j f_j(t)z + \mathcal{D}_j(t)$ — давление, $\theta_j = A_j z + T_j(r,t)$ — распределение температуры, $c_1 = B_1 z + K(r,t)$ — распределение концентрации в смеси.

Подстановка (40) в систему уравнений термодиффузии с учетом условий на поверхности раздела $r = a$ приводит к сопряженной начально-краевой задаче

$$w_{jt} = f_j(t) + \nu_j \left(w_{jrr} + \frac{1}{r}\, w_{jr} \right); \tag{41}$$

$$T_{jt} = \chi_j \left(T_{jrr} + \frac{1}{r} T_{jr} \right) - A w_j; \tag{42}$$

$$K_t = d_1 \left(K_{rr} + \frac{1}{r} K_r \right) + \alpha_1 d_1 \left(T_{1rr} + \frac{1}{r} T_{1r} \right) - B_1 w_1. \tag{43}$$

$$\begin{gathered} w_1(a,t) = w_2(a,t), \quad T_1(a,t) = T_2(a,t), \\ k_1 \frac{\partial T_1(a,t)}{\partial r} = k_2 \frac{\partial T_2(a,t)}{\partial r}, \quad \frac{\partial K(a,t)}{\partial r} + \alpha_1 \frac{\partial T_1(a,t)}{\partial r} = 0, \end{gathered} \tag{44}$$

$$f_2(t) = \rho f_1(t), \quad D_2(t) = D_1(t) + \frac{1}{a}\sigma_0, \quad \rho = \rho_1/\rho_2; \tag{45}$$

$$\mu_2 w_{2r}(a,t) - \mu_1 w_{1r}(a,t) = 0. \tag{46}$$

$$w_2(b,t) = 0, \quad T_2(b,t) = 0. \tag{47}$$

$$|w_1(0,t)| < \infty, \quad |T_1(0,t)| < \infty, \quad |K(0,t)| < \infty. \tag{48}$$

$$w_j(r,0) = 0, \quad T_j(r,0) = 0, \quad K(r,0) = 0. \tag{49}$$

Доказано, что задача (41)–(49) имеет стационарное решение только при $B_1 = 0$ и оно представляется в виде (постоянные находятся из граничных условий):

$$\begin{gathered} w_1^0 = \frac{f_1^0}{4\nu_1} \left[(b^2 - a^2)\mu + a^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right], \\ w_2^0 = \frac{f_1^0 b^2 \mu}{4\nu_1} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right), \quad \mu = \mu_1/\mu_2, \\ T_1^0 = \frac{A r^2 f_1^0}{16\chi_1\nu_1} \left[a^2 + \mu(b^2 - a^2) - \frac{r^2}{4} \right] + C_2, \\ T_2^0 = \frac{A r^2 \rho f_1^0}{16\chi_2\nu_2} \left(b^2 - \frac{r^2}{4} \right) + C_6 \ln r + C_7, \\ K^0 = -\frac{\alpha_1 A r^2 f_1^0}{16\chi_1\nu_1} \left[a^2 + \mu(b^2 - a^2) - \frac{r^2}{4} \right] + C_3, \end{gathered} \tag{50}$$

Можно видеть, что при заданных $f_1(t)$, $D_1(t)$ задачи для (w_1, w_2), (T_1, T_2), (K) решаются последовательно.

В **§ 4.3** сначала рассматривается задача об определении поля скоростей в слоях. Справедлива

Лемма 1. Имеет место неравенство

$$\int_0^a r w_1^2\, dr + \int_a^b r w_2^2\, dr \le M_0 \left(\mu_1 \int_0^a r w_{1r}^2\, dr + \mu_2 \int_a^b r w_{2r}^2\, dr \right) \tag{51}$$

с постоянной M_0, не зависящей от w_j и являющейся решением вариационной задачи

$$M_0 = \sup_{v_1, v_2 \in V} \left[\frac{\int\limits_0^a r v_1^2\, dr + \int\limits_a^b r v_2^2\, dr}{\mu_1 \int\limits_0^a r v_{1r}^2\, dr + \mu_2 \int\limits_a^b r v_{2r}^2\, dr} \right]. \tag{52}$$

Множество V является подпространством $W_2^1(r; 0, a) \times W_2^1(r; a, b)$, причем выполнены граничные условия (44), (46)–(49) для v_1, v_2.

На ее основе доказана

Теорема 1. *Решение начально-краевой задачи для определения возмущения поля скоростей при выполнении условия*

$$\int\limits_0^\infty |f_1(\tau)| e^{\delta\tau}\, d\tau = C_3, \tag{53}$$

стремится к нулевому решению, причем справедливы оценки

$$|w_1(r,t)| \le N_1 \begin{cases} e^{-\delta t/2}, & \delta \le 2\mu_1^2 \nu_1 / a^2, \\ \\ e^{-\mu_1^2 \nu_1 t / a^2}, & \delta > 2\mu_1^2 \nu_1 / a^2. \end{cases} \tag{54}$$

$$|w_2(r,t)| \le \sqrt{C_4}\, e^{-\delta t/2}, \tag{55}$$

равномерные в интервалах $[a, b]$, $[0, a]$.

Здесь μ_1 — первый корень уравнения $J_0(\mu) = 0$, а не динамическая вязкость; $N_1, C_4 \equiv \mathrm{const} > 0$.

Другими словами, если градиент давления в смеси достаточно быстро стремится к нулю, то происходит торможение смеси и жидкости за счет вязкого трения согласно неравенствам (54), (55).

В **§ 4.6** рассматривается эволюция температурных возмущений. Были получены априорные оценки и на основе их доказана

Теорема 2. *Решение начально-краевой задачи для определения возмущений температур при условии* (53) *стремится к нулевому решению, причем справедливы оценки*

$$|T_1(r,t)| \le N_2 t^{1/2} e^{-\delta_2 t}, \quad |T_2(r,t)| \le \sqrt{C_7}\, (E_1(t))^{1/4}, \tag{56}$$

равномерные в интервалах $[a, b]$ *и* $[0, a]$.

Здесь

$$E_1(t) \le \frac{C_5^2}{4} \begin{cases} t^2 e^{-2\delta t}, & \delta_1 = \delta, \\ \dfrac{1}{(\delta_1 - \delta)^2} \big(e^{-\delta t} - e^{-\delta_1 t}\big)^2, & \delta_1 \ne \delta. \end{cases} \tag{57}$$

$N_2, C_5, C_7 \equiv \mathrm{const} > 0.$

В **§ 4.7** рассматривается эволюция возмущений концентрации. Справедлива

Лемма 2. Предположим, что функция $g(r)$ непрерывна на отрезке $[0,a]$, $a>0$, $g_r \in L_2(r;0,a)$ и

$$\int\limits_0^a rg(r)\,dr = 0.$$

Тогда для $g(r)$ справедливо неравенство Фридрихса

$$\int\limits_0^a rg^2(r)\,dr \leqslant \frac{a^2}{4}\int\limits_0^a rg_r^2(r)\,dr.$$

На ее основе доказана

Теорема 3. *При $B_1 = 0$ и выполнении условия (53) возмущение концентрации стремится к нулю при $t\to\infty$. Если $\lim\limits_{t\to\infty} f_1(t) = f_1^0 = \mathrm{const} \neq 0$, то это возмущение стремится к стационарному распределению (50).*

Для получения более подробной информации о поведении скоростей, температур и концентрации применяется преобразование Лапласа. После некоторых выкладок найдено точное решение для изображений в виде:

$$\tilde{w}_1 = C_1 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,r\right) + \frac{\tilde{f}_1(p)}{p}\,; \tag{58}$$

$$\tilde{w}_2 = C_2 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\right) + C_3 K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\right) + \frac{\tilde{f}_2(p)}{p}\,. \tag{59}$$

$$\widetilde{T}_1(r,p) = D_1 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\chi_1}}\,r\right) - \frac{A\tilde{f}_1(p)}{p^2} - \frac{AC_1}{p\chi_1(1/\chi_1 - 1/\nu_1)}\, I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_1}}\,r\right),$$

$$\widetilde{T}_2(r,p) = D_2 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,r\right) + D_3 K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\chi_2}}\,r\right) - \frac{A\tilde{f}_2(p)}{p^2} - \tag{60}$$

$$-\frac{AC_2}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)}\, I_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\right) - \frac{AC_3}{p\chi_2(1/\chi_2 - 1/\nu_2)}\, K_0\left(\sqrt{\frac{p}{\nu_2}}\,r\right)$$

$$\widetilde{K}(r,p) = L_1 I_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,r\right) +$$

$$+\int\limits_0^r yF(y,p)\left[I_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,r\right)K_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,y\right) - I_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,y\right)K_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,r\right)\right]dy \tag{61}$$

с постоянной L_1, определяемой

$$
\begin{gathered}
L_1 = -\left[I_1\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,a\right)\right]^{-1}\left\{ \int\limits_0^a yF(y,p)\left[I_1\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,a\right) K_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,y\right) + \right.\right. \\
\left.\left. + I_0\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,y\right) K_1\left(\sqrt{\frac{p}{d_1}}\,a\right)\right] dy + \alpha_1\sqrt{\frac{d_1}{p}}\,\widetilde{T}_1'(a,p)\right\}.
\end{gathered} \tag{62}
$$

Доказано, что если $\lim\limits_{t\to\infty} f_1(t) = f_1^0 = \mathrm{const} \neq 0$, то возмущения скоростей, температур и концентрации стремятся к стационарному распределению (50). Именно, поля скоростей в пределе будут такими же, как у течения Пуайзеля, а температура и концентрация являются полиномами четвертого порядка по радиальной координате.

Полученные формулы (58)–(62) в изображениях по Лапласу были использованы при численном нахождении полей скоростей, температур и концентрации для различных заданных перепадах давления в смеси. Численные расчеты подтверждают выход решения рассматриваемой задачи на стационарный режим (50).

В **Приложении** приводится алгоритм расчета интегралов от произведений смещенных полиномов Якоби в общем виде для любого приближения по методу Галеркина.

Основные результаты работы:

1. Аналитическими и численными методами изучены осесимметрические нестационарные течения бинарной смеси вблизи точек локального нагрева свободной цилиндрической границы в случае, когда поверхностное натяжение есть линейная функция температуры и концентрации.

2. Найдены значения интегралов от произведения смещенных полиномов Якоби.

3. Изучено осесимметрическое нестационарное движение плоского слоя со свободными границами. Найдено точное решение при специальных данных. Общая задача сведена к системе нелинейных интегродифференциальных уравнений, которая решена методом Галеркина.

4. Получены решения стационарной и нестационарной задачи о ползущем движении бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе. Показано, что нестационарное решение выходит на стационарный режим при больших временах. Найдены решения стационарной задачи при достаточно малых значениях числа Рейнольдса в первом приближении.

5. Изучено инвариантное решение задачи о совместном движении вязкой теплопроводной жидкости и бинарной смеси в цилиндрической трубе, которое происходит под действием нестационарного перепада давления. Вязкая жидкость (смазка) и смесь не смешиваются и имеют общую поверхность раздела. Задача сводится к сопряженной начально-краевой задаче для параболических уравнений. Получены априорные оценки возмущений скоростей, температур и концентрации. Найдено стационарное состояние системы и доказано, что если градиент давления смеси достаточно быстро со временем (по экспоненте) стремится к нулю, то возмущения всех величин также стремятся к нулю. Если градиент давления имеет ненулевой предел при $t \to \infty$, то решение выходит на стационарный режим. Именно, поля скоростей в пределе будут такими же, как и у течения Пуазейля, а температура и концентрация являются полиномами четвертого порядка по радиальной координате. Кроме того, доказаны два новых интегральных неравенства типа неравенств Фридрихса. Полученные конечные формулы в изображениях по Лапласу использованы при численном нахождении полей скоростей, температур и концентрации для различных заданных перепадах давления в смеси.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н., профессору В.К. Андрееву за постановку задачи, помощь и ценные советы при работе над диссертацией.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Собачкина Н.Л. Нестационарное движение жидкого цилиндра при наличии эффекта Соре. // Труды Межд.конф. “Студент и научно-технический прогресс”– Новосибирск, 2003. – С. 61–62.
2. **Андреев В.К.,Собачкина Н.Л. Нестационарное растяжение жидкого цилиндра под действием эффекта Соре. // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки.– Красноярск: КрасГУ, 2004. Вып.1 – С. 192–199.**
3. Собачкина Н.Л. О нестационарном движении жидкого цилиндра //Труды XXXV Регион.конф. “Проблемы теоретической и прикладной математики” – Екатеринбург: ИМиМ УрО РАН, 2004. – С. 176–180.
4. Собачкина Н.Л. Осесимметрическое движение вязкой жидкости с плоской свободной границей под действием термокапиллярных сил //Труды XXXVII Регион.конф. “Проблемы теоретической и прикладной математики” – Екатеринбург: ИМиМ УрО РАН, 2006. – С. 247–252.

5. Собачкина Н.Л. Движение плоского слоя жидкости со свободной границей под действием термоконцентрационных сил // Труды VII Всероссийской конф. Молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям (с участием иностранных ученых). - Красноярск, 2006. – С. 69–70.

6. Собачкина Н.Л. О ползущем движении бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе //Труды XXXVIII Регион.конф. “Проблемы теоретической и прикладной математики” – Екатеринбург: ИМиМ УрО РАН, 2007. – С. 328–332.

7. Андреев В.К., Собачкина Н.Л. Движение бинарной смеси в горизонтальной цилиндрической трубе.// Вычислительные технологии. – Новосибирск. 2008. Т.13, №2 С.3 – 14.

8. Андреев В.К.,Собачкина Н.Л. Свойства решений начально-краевой задачи, возникающей при движении бинарной смеси в цилиндрической трубе. – Препринт №1 – Красноярск: ИВМ СО РАН, 2009. – 40с.

Работа по теме диссертации выполнена при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки, проект $12F003M$ (2005); Российского фонда фундаментальных исследований, проекты $05-01-00836$ и НШ5873.2006.1 (2006), проект $02-01-00934$ (2004), проект $08-01-00762$ (2008); интеграционного проекта СО РАН 2.15 (2006), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 65 (2008).

Собачкина Наталья Леонидовна
Решение начально-краевых задач о движении бинарных смесей в цилиндрических областях
Автореф. дисс. на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук
Подписано в печать "____"ноября 2009 г. Заказ
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Отпечатано в ИПК СФУ
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82