УДК 512.54+512.55 На правах рукописи

РАДЧЕНКО Оксана Владимировна

О ДВУХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА И АССОЦИИРОВАННЫХ КОЛЕЦ

01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск – 2009

Диссертация выполнена на кафедре алгебры и математической логики Сибирского федерального университета

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор ЛЕВЧУК Владимир Михайлович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор БОКУТЬ Леонид Аркадьевич
	доктор физико-математических наук, профессор СУЧКОВ Николай Михайлович
Ведущая организация:	Томский государственный университет

Защита состоится 6 марта 2009 года в 13.00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 в Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан " " февраля 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Бушуева Н.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ [1]

Актуальность темы. Традиционно, различные вопросы в теориях групп и колец приводят к вопросам структурного строения, описания автоморфизмов, а для колец также дифференцирований.

Зависимость порядка конечной простой группы G от определенных подмножеств централизатора $C_G(\tau)$ ее инволюции τ изучается уже давно. По классической теореме Брауэра (1954 г.) существует только конечное число конечных простых групп с заданным централизатором инволюции. Обобщение разрабатывает В.П. Шунков. В [1] введен параметр вложения инволюции

$$t(G,\tau) = \max_{g\in G} |gC_G(\tau) \cap (\tau^G\tau^G)|,$$

где τ^G – класс сопряженных элементов с представителем τ в группе G. В.П. Шунков анонсировал теорему [2]: *существует только конечное число периодических простых групп с инволюцией и с заданным конечным параметром вложения этой инволюции, причем все они конечны.*

В случае конечных групп эта теорема усиливает теорему Брауэра и основывается на следующем предположении.

Гипотеза (A). *Существует только конечное число конечных простых групп с инволюцией и с заданным конечным параметром вложения этой инволюции.*

Усиленный вариант этой гипотезы высказал В.М. Левчук [3].

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00824а).

Гипотеза (Б). *Существует только конечное число конечных простых групп с инволюцией и заданным числом сопряженных и перестановочных с нею инволюций.*

Очевидно, всякое семейство $\mathcal{M}$ конечных простых групп, дающее контрпример к гипотезе (А) или (Б), является бесконечным, а отбросив из $\mathcal{M}$ любое конечное подсемейство, получим аналогичный контрпример. По модулю известной классификации конечных простых групп, группы лиева типа вместе со знакопеременными и 26 спорадическими группами, исчерпывают все конечные простые неабелевы группы.

В работах О.В. Голованoвой (Листовой), В.М. Левчука и А.Г. Лихарева гипотезы (А) и (Б) подтверждены для групп Шевалле над полем четного порядка исключительных типов и типа A_n, для знакопеременных групп и для простых групп с одним классом сопряженных инволюций [4], [5], [6]. Таким образом, исследование гипотез сведено к группам Шевалле, причем в случае основного поля четного порядка – к группам Шевалле классических типов.

В строении простой группы лиева типа важную роль играет унипотентная подгруппа; для лиева типа A_{n-1} – это группа унитреугольных матриц, изоморфная присоединенной группе кольца $NT(n, K)$ нильтреугольных $n \times n$ матриц над полем K. Более общим является локально нильпотентное кольцо $NT(\Gamma, K)$ (или $NT(n, K)$ при $\Gamma = \{1, 2, \cdots, n\}$) всех финитарных нильтреугольных Γ-матриц с произвольной цепью Γ матричных индексов.

Согласно классическим теоремам И.Н. Херстейна, йордановы

дифференцирования [7] и изоморфизмы [8] первичного кольца характеристики $\neq 2$ тривиальны. Напомним, что аддитивное отображение $\beta : R \to R$ кольца R называют его *дифференцированием*, если $\beta(ab) = \beta(a)b + a\beta(b)$ $(a, b \in R)$. Дифференцирования ассоциативного кольца R являются его тривиальными йордановыми дифференцированиями, т.е. дифференцированиями ассоциированного кольца Йордана. Теоремы Херстейна переносились на полупервичные кольца (W.S. Martindale III, W.E. Baxter, J. M. Cusack, M. Brešar, J. Vukman, и др.). Йордановы и лиевы дифференцирования для колец и алгебр треугольных и нильтреугольных $n \times n-$матриц (с ненулевым нильпотентным идеалом) над определенными коммутативными кольцами коэффициентов изучают G.M. Benkart, J.M. Osborn, S.P. Coelho, C.P. Milies, D. Benkovič, P.-H. Lee, C.-K. Liu, S. Ou, D. Wang, R. Yao и др. В диссертации исследуется

Задача (В). *Найти нетривиальные йордановы и лиевы дифференцирования кольца $NT(\Gamma, K)$ над ассоциативным кольцом K с единицей с произвольной цепью Γ матричных индексов.*

Цель диссертации – изучение гипотез (А), (Б) и задачи (В).

Методы исследования являются классическими для общей теории групп и колец. Применяются также специальные методы теории групп и алгебр лиева типа.

Научная новизна и практическая ценность. Все основные результаты диссертации являются новыми. Диссертация носит теоретический характер.

Апробация диссертации. Основные результаты представлены на Мальцевских чтениях (Новосибирск, 2007), всеросийском симпозиуме Абелевы группы (Бийск, 2007), конгрессе женщин-математиков (Красноярск, 2008), всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2008), международной школе-конференции (Челябинск, 2008), международных алгебраических конференциях в Гомеле и Красноярске (2007), Анкаре и Москве (2008).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [11]—[21], включая публикацию из перечня ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация включает введение, две главы и список литературы. Номер теоремы, леммы и др. включает последовательно номер главы и порядковый номер в главе. Текст диссертации изложен на 56 страницах. Список литературы включает 52 наименования.

Содержание диссертации

Основные результаты диссертации направлены на усиление теоремы Р. Брауэра о конечных простых (неабелевых) группах (гипотезы (А), (Б)) и решение задачи (В):

– вычислен $cc-$параметр вложения инволюции (т.е. число сопряженных и перестановочных с нею инволюций) в конечных простых группах с одним классом сопряженных инволюций;

– гипотеза о конечности числа конечных простых групп с заданным $cc-$параметром вложения инволюции, сведенная ранее к

группам лиева типа, редуцирована в случае основного поля характеристики 2 к ортогональным группам;

– доказано, что йордановы и лиевы дифференцирования кольца $NT(\Gamma, K)$ финитарных нильтреугольных Γ-матриц над ассоциативным кольцом K с единицей действуют тривиально по модулю третьего гиперцентра (аналог теоремы Херстейна).

В первой главе напоминается определение из [1] параметра вложения инволюции τ в произвольную группу G. Вводится определение: число сопряженных и перестановочных с τ инволюций группы G называем *сопряженно-коммутативным параметром* или, кратко, *cc−параметром* (вложения) инволюции τ в G с обозначением $cc(G, \tau)$. (В [11] и [12] использовался также термин *сопряженно-коммутативная ширина.*) Далее в § 1.1 отражается современное состояние гипотезы (А) и ее усиления – гипотезы (Б) о $cc-$параметрах вложения инволюций конечных простых групп.

Ранее в работах О.В. Голованoвой, В.М. Левчука и А.Г. Лихарева гипотеза (Б) была сведена к группам Шевалле. В случае основного поля четного порядка гипотеза сведена к классическим типам и подтверждена для групп $PSL_n(q)$; следующие, центральные в главе 1 теоремы сводят гипотезу к ортогональным группам.

Теорема 1.1. *Существует только конечное число простых симплектических групп над конечным полем четного порядка с заданным cc−параметром вложения инволюции.*

Теорема 1.4. *Пусть τ – инволюция унитарной группы $G = PSU_l(q^2)$ над полем четного порядка q^2 и M – произвольное натуральное число. Тогда $cc(\tau, G) > M$ при достаточно большом $|G|$.*

Доказательству теорем 1.1 и 1.4 посвящены § 1.3 и § 1.4, соответственно; § 1.2 является вспомогательным.

Точные значения $cc-$параметра вложения инволюции (без термина) для групп $PSL_2(q)$ найдены О.В. Головановой. Основная в § 1.5 теорема дает точные значения $cc-$параметра инволюций в конечных простых группах с одним классом сопряженных инволюций. За исключением знакопеременных групп A_n $(n \leq 7)$ и 26 спорадических групп, такие группы исчерпываются следующими:

$$PSL_2(q), \quad Re(q), \quad Sz(q), \quad PSU_3(q^2), \quad PSL_3(q).$$

Теорема 1.5. *Пусть G – конечная простая группа с одним классом сопряженных инволюций и τ – инволюция из G. Тогда:*

$$cc(PSL_2(q), \tau) = \begin{cases} q-1, & q\text{– четно}, \\ \frac{q+1}{2}, & q \equiv 1 (mod\ 4), \\ \frac{q+3}{2}, & q \equiv -1 (mod\ 4); \end{cases}$$

$$cc(PSL_3(q), \tau) = \begin{cases} (q-1)(1+2q), & q\text{– четно}, \\ q^2+q+2, & q\text{– нечетно}; \end{cases}$$

$$cc(PSU_3(q^2),\tau) = \begin{cases} q-1, & q\text{– четно}, \\ q^2+q+3, & q\text{– нечетно}; \end{cases}$$

$$cc(Sz(q),\tau) = q-1 \quad (q = 2^{2n+1},\ n \geq 1);$$

$$cc(Re(q),\tau) = q(q-1)+1 \quad (q = 3^{2n+1},\ n \geq 1).$$

Теоремы 1.1, 1.4, 1.5 опубликованы автором в [11] и [12].

Глава 2 посвящена перенесению теоремы Херстейна [7] о йордановых дифференцированиях на локально нильпотентные кольца финитарных матриц и исследованию лиевых дифференцирований.

С любым ассоциативным кольцом R ассоциируют лиево кольцо $\Lambda(R) := (R, +, *)$ с лиевым умножением $\alpha * \beta = \alpha\beta - \beta\alpha$ и йорданово кольцо $J(R) := (R, +, \circ)$ с йордановым умножением $\alpha \circ \beta = \alpha\beta + \beta\alpha$. Любое дифференцирование кольца $J(R)$ или $\Lambda(R)$ называется также, соответственно, йордановым или лиевым дифференцированием кольца R. Аналог теоремы Херстейна в диссертации дает

Теорема 2.2. *Пусть K – ассоциативное кольцо с единицей и Γ – произвольная цепь. Тогда любое лиево или йорданово дифференцирование кольца $NT(\Gamma, K)$ действует по модулю его 3-го гиперцентра как дифференцирование.*

Теорема 2.3 дает описание лиевых и йордановых дифференцирований финитарного кольца $NT(\Gamma, K)$ в терминах дифференци-

рований этого кольца и введенных явно гиперцентральных лиевых и йордановых дифференцирований.

Йордановы дифференцирования кольца $NT(n, K)$ исследовала ранее Ф. Кузучуоглу. Следствием является также основная теорема из [9], описывающая лиевы дифференцирования алгебры $NT(n, K)$ над коммутативным кольцом K. Дифференцирования кольца $NT(n, K)$ исследовались в [10]

Теоремы 2.2 и 2.3 доказаны совместно с В.М. Левчуком и опубликованы в [21].

Автор благодарна своему научному руководителю В.М. Левчуку за постановку задач и внимание к работе. Признательна сотрудникам кафедры алгебры и математической логики и института математики Сибирского федерального университета за хорошие условия для работы над диссертацией.

Список литературы

[1] *Рябинина, Н.А., Сучков Н.М., Шунков В.П.* Об особых подгруппах конечных групп с инволюциями // Красноярск, Препринт ВЦ СО РАН. - 1995. - № 10. - С. 3-11.

[2] *Шунков В.П.* Группы с инволюциями // Сб. тезисов докл. международ. сем. по теории групп. Екатеринбург, ИММ УрО РАН. – 2001. – С.245-246.

[3] *Levchuk V.M.* Growth of the intersection of the centralizer of an involution and its class of conjugated elements in finite simple

groups // Proceed. Int. Conf. "Antalya Algebra Days VIII"(17-21 May, 2006). Istanbul, Bilgi Univ.- 2006. - P.26.

[4] *Листова О.В.* Параметры вложения инволюций знакопеременных групп // Algebra and Model Theory. Новосибирск: НГТУ. – 2003. – № 4. – С. 62 – 68.

[5] *Голованова О.В., Левчук В.М.* Зависимость порядков конечной простой группы и пересечения централизатора и класса сопряженных элементов инволюции // Известия Гомельского гос. ун-та. - 2006. - Т.3. - № 36. - С.124-130.

[6] *Лихарев А.Г.* Ограниченность сопряженно-коммутативной ширины инволюции в группах Шевалле // Препринт №4.– Красноярск: ИВМ СО РАН. – 2006. – 10 с.

[7] *Herstein I.N.*, Jordan derivations of prime rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. – P. 1104-1110.

[8] *Herstein I.N.* Jordan homomorphisms // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 81. – P. 331-351.

[9] *Ou S., Wang D., Yao R.* Derivations of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring // Linear Algebra Appl. – 2007. – Vol. 424. – P. 378-383.

[10] *Chun J.H., Park J.W.* Derivations on subrings of matrix rings // Bull. Korean Math. Soc. - 2006. - Vol.43. - P.635-644.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[11] *Радченко О.В.* Сопряженно-коммутативная ширина инволюции группы с одним классом сопряженных инволюций // Вестник Красноярского государственного университета, Красноярск. – 2006. – № 9.- С. 64-69.

[12] *Радченко О.В.* Классы сопряженных инволюций симплектических групп над полями четного порядка и смежные вопросы // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2008. – №3. – С. 324-329.

[13] *Левчук В.М., Радченко О.В.* Сопряженно-коммутативная ширина инволюций конечных простых групп // Межд. конф. "Классы групп, алгебр и их приложения", Гомель: Гомельский государственный ун-т. - 2007. - С. 97-98.

[14] *Radchenko O.V.* The conjugate-commutative width of involutions of finite simple groups // Межд. конф. "Алгебра и её приложения": Красноярск. – 2007. - С. 173-174.

[15] *Радченко О.В.* Сопряженно-коммутативная ширина инволюции простых классических линейных групп над полем четного порядка // Межд. конф. "Мальцевские чтения – 2007", Новосибирск: ИМ СО РАН. – 2007. – С. 102.

[16] *Радченко О.В.* Сопряженно-коммутативная ширина инволюций простых классических линейных групп над полями чет-

ного порядка // Материалы V Всесибир. конгресса женщин-математиков, Красноярск: СФУ. - 2008. - С.351-352.

[17] *Минакова Е.В., Радченко О.В.* Некоторые числовые и теоретико-модельные характеристики классических линейных групп и ассоциированных колец // Материалы VII школы-конф., Челябинск, ЮУрГУ. – 2008. – С. 80 - 82.

[18] *Радченко О.В.* Классы сопряженных инволюций простых классических групп над полями четных порядков и смежные вопросы // Межд. алгебраической конф., Москва: МГУ. – 2008. – С. 195 - 196.

[19] *Radchenko O.V.* Derivations of the nilsubalgebra of Chevalley algebra and certain hypothesis for associated group // Int. Conf. "On ring and module theory", Turkey, Ankara, Hacettepe university. – 2008. – P. 68.

[20] *Радченко О.В.* Дифференцирования йорданова кольца финитарных нильтреугольных матриц // Всеросс. конф. по математике и механике, Томск:ТГУ. - 2008. - С.60-61.

[21] *Левчук В.М., Радченко О.В.* Дифференцирования кольца финитарных нильтреугольных матриц и ассоциированных колец Ли и Йордана // Препринт №3. – Красноярск: ИВМ СО РАН. – 2008. – 12 с.

[22] Levchuk V.M., Radchenko O.V. Derivations of the locally nilpotent matrix rings (в печати).