Вступительные задачи
июнь 2020 г.

Нужно выбрать один из модулей и привести решение хотя бы одной задачи в данном модуле.

Задачи по оптимизационному модулю

Задача 1 (задача Штейнера). В пространстве размерности n имеется m точек. Необходимо найти такую точку (Штейнера), сумма расстояния от которой до этих точек была бы минимальная. Предложите численный способ решения данной задачи при разных соотношениях между m и n и желаемой точностью.

Задача 2 (Page Rank). Предложите способ сведения задачи поиска левого собственного вектора (Фробениуса–Перрона), отвечающего собственному значению 1, стохастической по строкам матрицы P к задаче выпуклой оптимизации. Предложите численные способы решения данной задачи.

Задача 3 (Soft Max). Докажите, что функция $\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\exp(x_k)\right)$ – выпуклая. Будет ли эта функция гладкая, дважды гладкая, ... ? Найдите константу Липшица градиента этой функции.

Задачи по модулю "Сэмпилирование, управление, оптимизация"

Задача 1. Пусть f ограниченная непрерывно дифференцируемая функция, а X стандартная нормальная случайная величина. Докажите, что $\mathbb{E}[f'(X)] = \mathbb{E}[Xf(X)]$.

Задача 2. Пусть $(X_n)_{n\geqslant 0}$ – цепь Маркова с переходной матрицей P и стационарным распределением π. Докажите, что $Z_n = (X_n, X_{n+2})$ также является цепью Маркова и найдите стационарное распределение.

Задача 3. Расстояние Канторовича–Вассерштейна порядка p между вероятностными мерами μ и ν определяется как

$$W_p(\mu,\nu) = \inf_{\eta}\left(\iint |x-y|^p \eta(dx,dy)\right)^{1/p}$$

где инфимум берется по классу мер η, таких что $\eta(\mathbb{R}\times A) = \nu(A)$ и $\eta(B\times\mathbb{R}) = \mu(B)$ для любых бореллевских множеств A и B. Найдите $W_2(\mu,\nu)$, где $\mu \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, а $\nu \sim \delta_1$ - мера, сосредоточенная в 1.

Задачи по модулю "Геометрическая теория управления"

Задача 1. Найдите расстояние между кривыми $y = x^2$ и $y = x - 1$.

Задача 2. На каком расстоянии от центра единичного круга находится центр масс четверти круга?

Задача 3. Маятник колеблется по закону $\ddot{x} = -\sin x$. Для каких начальных условий движение будет непериодическим?

Задачи по модулю “Методы теории информации в задачах машинного обучения”

Задача 1. Пусть X, Y, Z дискретные случайные величины. Доказать, что

$$2H(X,Y,Z) \leqslant H(X,Y) + H(X,Z) + H(Y,Z),$$

где $H(X)$ – энтрония случайной величины.

Задача 2. Использовав неравенство

$$2H(X,Y,Z) \leqslant H(X,Y) + H(X,Z) + H(Y,Z).$$

доказать лемму Ширера: пусть n точек размещены в пространстве $\mathbb{R}^3$, причем n_1, n_2, n_3 – это число разных точек в проекциях на плоскости xy, xz и yz соответственно. Доказать, что

$$n_1 n_2 n_3 \geqslant n^2.$$

Задача 3. Рассмотрим канал с входным и выходным алфавитом $\{0,1\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$P_{Y|X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 1-\delta \end{pmatrix}$$

Найти пределы пропускной способности и оптимального распределения на входе канала P_X при $\delta \to 1$.

Задача 4. Идеальную монету подбрасывают до тех пор, пока не выпадет орел. Пусть X – это случайная величина, принимающая значения потребовавшегося количества подбрасываний. Найти $H(X)$.

Задача 5. Пусть $\mathbb{F}_{2^m}$ – конечное поле характеристики 2. Доказать, что $\forall a \in \mathbb{F}_{2^m} \exists b : b^2 = a$ (иными словами, для любого элемента существует квадратный корень) и предъявить явное выражение для его нахождения.