

На правах рукописи

Парватов Николай Георгиевич

**ПРОБЛЕМЫ ПОЛНОТЫ И ВЫРАЗИМОСТИ
В ПРОСТРАНСТВАХ ДИСКРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ**

01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

КРАСНОЯРСК — 2011

Работа выполнена на кафедре защиты информации и криптографии
ФГБОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский государственный
университет»

Научный консультант:

доктор технических наук, профессор
Агибалов Геннадий Петрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Вороненко Андрей Анатольевич;

доктор физико-математических наук, профессор
Перязев Николай Алексеевич;

доктор физико-математических наук, профессор
Шоломов Лев Абрамович

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный
университет имени Н. Г. Чернышевского»

Защита состоится 23 марта 2012 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660074, г. Красноярск, ул. Киренского, 26, корпус Ж, ауд. УЛК-115.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета (г. Красноярск, ул. Киренского, 26).

Автореферат разослан « » февраля 2012 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета

К. А. Кириллов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. В диссертации развивается теоретическое направление дискретной математики, изучающее различные пространства дискретных функций с замыканием относительно операций суперпозиции. (*Пространством* называется множество с замыканием в системе его подмножеств.) Необходимость развития этого направления обусловлена его теоретическими и практическими приложениями к анализу и синтезу дискретных управляющих систем с одной стороны и собственными потребностями дискретной математики с другой. Первые требуют решения в некоторых конкретных функциональных пространствах ряда задач, а вторые требуют обобщённого рассмотрения с единых позиций различных классов пространств и разработки общих методов решения различных проблем (типов задач) в них.

Начало активному изучению дискретных функций и их пространств положено работами Э. Поста, К. Шеннона, С. В. Яблонского, А. В. Кузнецова, О. Б. Лупанова и других исследователей. К настоящему времени теория дискретных функций получила серьёзное развитие, в результате которого были выделены (и продолжают выделяться) для исследования основные классы функциональных пространств (такие, как клоны, наследственные и инвариантные классы и прочие) и сформированы различные направления исследований. В том числе были сформулированы и стали классическими изучаемые в диссертации проблемы полноты и выразимости, проблемы эффективного задания замкнутых классов и их конечной порождаемости, поиска форм представления функций.

Так, *проблема полноты (выразимости)* заданного класса) в пространстве состоит в описании, по-возможности эффективном, всех подмножеств пространства, в чьих замыканиях содержатся все элементы пространства (соответственно заданного класса). Решение этой проблемы в функциональном пространстве даёт условия, при которых задача синтеза управляющих систем в том или ином базисе имеет решение так, что из базисных элементов можно построить управляющие системы, вычисляющие (реализующие) все функции пространства (либо все функции заданного его класса).

Средством решения проблемы полноты (выразимости заданного класса) в пространстве является *критериальная система* (соответственно *нижняя окрестность класса*) — такая система замкнутых подмножеств пространства, что замыкание произвольного его подмножества тогда и только тогда совпадает со всем пространством (соответственно включает заданный его класс), когда это подмно-

жество не включено ни в один из классов системы.

Проблемы полноты и выразимости решены в пространствах булевых функций с замыканием относительно суперпозиции в работе Э. Поста, в пространстве функций k -значной логики — в работах С. В. Яблонского, И. Розенберга и других, в пространствах частичных таких функций — в работах Р. Фрейвалда, Б. А. Ромова, Ло Чжукая и других. В связи с полурешёточной моделью, предложенной в работах Г. П. Агибалова для описания асинхронных дискретных управляющих систем, возникает необходимость решения указанных проблем в различных классах квазимонотонных функций на полурешётках. В диссертации проблемы полноты и выразимости решены в некоторых таких классах, найдены различные условия максимальности подклона в клоне, позволяющие выделять максимальные подклены при решении проблем полноты в различных клонах.

Проблема конечной порождаемости состоит в выявлении условий, при которых заданный класс пространства имеет конечное порождающее множество. Актуальность этой проблемы для клонов связана с результатами Ю. И. Янова и А. А. Мучника о существовании клонов без конечного порождающего множества и с результатами Э. Поста о конечной порождаемости клонов булевых функций. В связи с этим в работах С. С. Марченкова, Д. Лау, Г. Тардёша, Деметровича с соавторами и О. С. Дудаковой были выделены некоторые семейства конечно порождаемых клонов. В диссертации описан ряд новых таких семейств, предложены методы функционального разложения в них.

Более общая *проблема эффективного задания* связана с разработкой и обоснованием методов эффективного задания замкнутых классов при помощи конечных порождающих множеств в произвольных пространствах, конечных запрещающих множеств в предпорядоченных пространствах, конечных описаний в пространствах с замыканием Галуа и иных. Так, в работах Д. Гейгера и В. Г. Боднарчука с соавторами построена теория Галуа для клонов, в работе С. В. Яблонского охарактеризованы клоны, задаваемые предикатами и конечными запрещающими множествами; эти результаты обобщены для клонов многоосновных алгебр Р. Пёшелем и Л. А. Калужниным, для наследственных систем Н. Пишпенджером и О. Экиным с соавторами, для перестановочно замкнутых классов Л. Хеллерстайн. В диссертации получено дальнейшее обобщение этих результатов для S -замкнутых классов, к числу которых относятся клоны, наследственные классы, а также классы дискретных функций, вычисляемых переключательными схемами.

Проблема форм представления связана с созданием методов и нахождением условий для представления дискретных функций формулами в различных бази-

сах и обусловлена, как правило, недостаточностью известных форм представления функций (дизъюнктивными, конъюнктивными и алгебраическими нормальными формами и их k -значными обобщениями) для решения ряда задач. Отметим в связи с этим работы С. С. Марченкова и А. Б. Угольниковца, где исследованы id -разложения функций многозначной логики в замкнутых классах, обобщающие разложения булевых функций из работы Г. П. Гаврилова. В диссертации вводятся (c, r) -разложения, близкие при $c = 0$ и $c = r$ к чистым и смешанным id -разложениям; выделяется семейство клонов, допускающих (c, r) -разложения своих функций. Также устанавливаются условия представления квазимонотонных функций формулами различного вида.

Пространства сами по себе, а не только их конкретные реализации, являются объектом ряда исследований. Так, в работах Г. Биркгофа и О. Фринка охарактеризованы финитарные пространства, в работах О. Оре и Ц. Эверетта изучены пространства с замыканием Галуа, а в работе А. В. Кузнецова сформулированы условия существования конечной критериальной системы в пространстве. В развитие этого в диссертации изучаются условия существования конечных нижних окрестностей в различных пространствах (произвольных, предупорядоченных и с замыканием Галуа) у заданных или произвольных конечно порождаемых классов; вводятся и изучаются сильно предупорядоченные пространства, к числу которых, как показывается, принадлежит ряд известных функциональных пространств.

Цель работы. Целью диссертации является развитие теоретического направления дискретной математики, изучающего пространство дискретных функций с замыканием относительно операций суперпозиции. Достижение заявленной цели предполагает:

- рассмотрение проблем полноты, выразимости и эффективного задания замкнутых классов в различных пространствах с общих позиций, характерных для универсальной алгебры; выявление свойств операции замыкания в пространстве, обеспечивающих возможность эффективного решения указанных проблем;
- развитие математического аппарата для решения указанных проблем в различных функциональных пространствах, возникающих в математической кибернетике при решении задач синтеза и анализа дискретных управляющих систем;
- решение указанных проблем, а также проблемы форм представления функций, в ряде новых случаев, в различных функциональных пространствах, служащих для описания управляющих систем различного вида, в том числе управляющих систем, устойчивых к состязаниям.

Научная новизна и выносимые на защиту положения. Все основные результаты диссертации являются новыми. Укажем наиболее существенные.

1. Установлены условия, при которых в различных пространствах заданные или произвольные конечно порождаемые классы имеют конечные нижние окрестности; условия при которых замкнутые классы допускают эффективные в приложениях способы задания — конечными запрещающими множествами в предупорядоченных пространствах и конечными описаниями в пространствах с замыканием Галуа. Введены в рассмотрение сильно предупорядоченные пространства. Доказано, что в финитарных таких пространствах конечно порождаемые подмножества имеют конечные нижние окрестности, классы которых обладают конечными запрещающими множествами. Установлена сильная предупорядоченность ряда функциональных и логических пространств, в том числе пространства переключательных функций с S -замыканием. Построена теория Галуа для переключательных функций с S -замыканием, описывающая его как замыкание Галуа.

2. Исследованы проблемы эффективного задания клонов и их конечной порождаемости. Выделено новое семейство конечно порождаемых клонов — включающих конечно порождаемый d - или произвольный (c, d) -подклон при натуральном c . Построены примеры и предложены конструкции таких клонов. Клоны с (c, d) -подклонами охарактеризованы свойствами инвариантных предикатов. Установлена возможность (c, r) -разложений клона над (c, d) -подклоном (где c — натуральное или ∞), известная ранее лишь при $c = 0$. Найдены предикатные и-описания ряда клонов, в том числе клонов квазимонотонных и слабо существенных квазимонотонных функций, а также монотонных частей этих клонов. Поставлена задача выделения максимальных клонов в множествах точечных и минимальных точечных функций на полурешётке, построены примеры таких клонов на полурешётке интервалов решётки. Явно описаны классы троичных функций, вычисляемых в каноническом базисе формулами различного вида. Предложен метод формульного представления минимальных точечных функций на дистрибутивной точечной полурешётке в базисах, содержащих все одноместные минимальные точечные функции и некоторый набор специальных двухместных функций.

3. Установлен ряд условий максимальности подклона в клоне, при помощи которых проблема полноты решена в ряде случаев. В том числе, доказаны необходимые и достаточные условия максимальности произвольных и слабо центральных подклонов, заданных расширенными и-описаниями. На основе этого в слабо центральном клоне, задаваемом наследственной системой множеств, явно описаны все максимальные подклоны, включающие все слабо существенные функции. Тем

самым, в частности, решены проблемы полноты при суперпозиции со слабо существенными функциями в клонах квазимонотонных функций на полурешётке и в (предполных) клонах, описываемых центральными симметричными и одновременно вполне рефлексивными предикатами, отличными от диагоналей. Найдена асимптотика мощности построенной критериальной системы в случае полурешётки всех непустых подмножеств k -элементного множества. В случае трёхэлементной полурешётки решены проблемы: выразимости множества минимальных точечных функций в клоне монотонных функций, полноты в клонах монотонных и квазимонотонных функций.

Личный вклад автора. Все выносимые на защиту результаты диссертации принадлежат лично автору. В единственной работе, написанной в соавторстве, автору принадлежит формулировка результата и его доказательство.

Методы исследований. В диссертации используются математический аппарат и методы дискретной математики и универсальной алгебры.

Достоверность полученных результатов. Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое доказательство. Частными случаями ряда доказанных теорем являются некоторые известные теоремы.

Практическая и теоретическая ценность. Теоретическая ценность полученных в диссертации результатов обусловлена возможностью их использования в научных исследованиях при изучении различных пространств дискретных функций. Так, на основании полученных результатов проблема выразимости конечно порождаемого множества в сильно предупорядоченном финитарном пространстве сводится к выделению замкнутых классов, определяемых запретами из известного конечного множества. Построенная в диссертации теория Галуа для S -замыкания открывает затруднённую ранее возможность решения проблемы выразимости конечно порождаемого класса в пространстве дискретных функций, вычисляемых переключательными схемами в различных базисах: эта проблема может быть решена теперь на основе выделения конечной системы классов, описываемых парами предикатов. Конечная порождаемость ряда клонов может быть установлена путём выявления в них конечно порождаемых d - или произвольных (c, d) -подклонов при натуральном c ; в таких клонах задача синтеза может быть решена на основе (c, r) -разложений. При решении проблемы полноты в произвольном клоне выделение максимальных подклонов может быть выполнено с использованием доказанных в диссертации теорем о выделении. В том числе решение проблемы полноты в произвольном клоне B при суперпозиции с функциями любого его слабо центрального подклона сводится к нахождению B -простых предикатов.

Практическая ценность полученных результатов обусловлена возможностью их использования на различных этапах проектирования дискретных управляющих систем различного типа. Так, метод (c, r) -разложений можно использовать для решения задач синтеза управляющих систем, описываемых функциями из (c, d) -клона. В частности, этот метод можно использовать для синтеза дискретных управляющих систем с заданным динамическим поведением, описывая их при помощи полурешёточной модели, предложенной Г.П. Агibalовым. На основе той же модели для синтеза управляющих систем указанного вида можно использовать предложенные в диссертации методы формульного представления квазимонотонных функций. Конструктивный характер доказательства теорем о полноте и выразимости функций на трёхэлементной полурешётке также даёт методы синтеза в произвольных базисах для комбинационных схем с двоичными статическими состояниями и заданным динамическим поведением. При этом на различных этапах решения задачи синтеза проектируемое устройство описывается квазимонотонной, монотонной или минимальной точечной функцией, а синтез ведётся в квазимонотонном, монотонном или минимальном точечном базисе.

Работа выполнена в соответствии с планами НИР Томского государственного университета по единому заказ-наряду и по ФЦП «Интеграция», по ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (г/к. № П1010).

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Международной конференции «Дискретный анализ и исследование операций» (Новосибирск, 2004), на XIII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Москва, МГУ, 2002), на VII и IX Международных семинарах «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 2007), на XV и XVII Международных семинарах «Синтез и сложность управляющих систем» (2004, 2008), на I – VI, VIII и X Сибирских научных школах-семинарах с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» (2002–2007, 2009, 2011), на научных и учебных семинарах кафедры защиты информации и криптографии Томского государственного университета.

Публикации. Материалы диссертации изложены в 25 научных изданиях, из которых 12 включены в список научных изданий, рекомендованных ВАК для опубликования результатов диссертаций.

Структура диссертации Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованных источников, включающего 166 источников. Её объём — 192 страницы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава называется «Нижние и верхние окрестности». В ней установлены условия, при которых в различных пространствах — произвольных, предупорядоченных и с замыканием Галуа, произвольные или заданные конечно порождаемые классы имеют конечные нижние окрестности с эффективно определяемыми классами (посредством конечных запрещающих множеств в предупорядоченных пространствах и конечных описаний в пространствах с замыканием Галуа). Введены сильно предупорядоченные пространства. Рассмотрены приложения найденных условий к различным функциональным и логическим пространствам, в том числе к пространствам дискретных функций с S -замыканием, введённым для описания классов функций, вычисляемых переключательными схемами. Построена теория Галуа для S -замыкания. Рассмотрим эти результаты подробнее.

Пространством называется пара $(P, ')$, где P — произвольное множество и $'$ — операция замыкания в системе его подмножеств (говорят проще — в множестве P). Пространство называется *финитарным*, если его замкнутыми классами являются всевозможные подалгебры некоторой универсальной алгебры.

Теорема 1.1 характеризует пространство с конечными нижними окрестностями для всех конечно порождаемых подмножеств как финитарное с конечной системой $\mathcal{S}(A)$ для всякого конечного подмножества A , где $\mathcal{S}(A)$ — система максимальных замкнутых подмножеств среди не включающих A .

Подмножество $A \subseteq P$ называется *компактным (слабо компактным)* в пространстве $(P, ')$, если всякая непустая направленная вверх система (соответственно цепь) \mathcal{C} подмножеств множества P , такая, что $A \subseteq (\cup \mathcal{C})'$, содержит в качестве элемента множество B , такое, что $A \subseteq B'$.

Теорема 1.2 характеризует подмножества A с конечными нижними окрестностями в произвольном пространстве как компактные (равносильно слабо компактные) с конечной системой $\mathcal{S}(A)$.

Далее изучаются предупорядоченные пространства.

Пусть в множестве P определено предупорядочение \trianglelefteq . Тройка $(P, ', \trianglelefteq)$ называется *предупорядоченным* пространством, если для любых элементов x и y из P выполняется импликация

$$(x \trianglelefteq y) \Rightarrow (\{x\}' \subseteq \{y\}').$$

Подмножество $A \subseteq P$ называется *наследственным*, если вместе с любым своим элементом b оно содержит всякий элемент a из P , такой, что $a \trianglelefteq b$. Пусть

$X \subseteq P$. Наименьшее по включению наследственное множество среди включающих X обозначается X_{\triangleleft} . Наибольшее по включению наследственное множество среди не пересекающихся с X обозначается $P \setminus X_{\triangleright}$ и множество X для него называется *запрещающим*. В приложениях задание наследственных и замкнутых классов конечными запрещающими множествами является эффективным.

Предупорядоченное пространство называется *сильно предупорядоченным*, если множество P является объединением направленной вверх системы \mathcal{N} конечных подмножеств и существует функция $\alpha : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$, такая, что для любых множеств $B_1 \in \mathcal{N}$, $B_2 = \alpha(B_1)$ и $X \subseteq P$ выполняется включение

$$X' \cap B_1 \subseteq (X_{\triangleleft} \cap B_2)'.$$

В этой ситуации будем говорить также, что предупорядочение \triangleleft и замыкание $'$ *сильно согласованы* посредством системы \mathcal{N} и функции α .

Теорема 1.3. *В финитарном сильно предупорядоченном пространстве всякое конечно порождаемое подмножество обладает конечной нижней окрестностью, каждый класс которой имеет конечное запрещающее множество.*

Верхней окрестностью множества X в пространстве называется система \mathcal{H} замкнутых классов, не включённых в X' , если всякий не включённый в X' замкнутый класс пространства можно сузить до класса из \mathcal{H} .

Теорема 1.4. *В сильно предупорядоченном финитарном пространстве замкнутый класс тогда и только тогда обладает конечной верхней окрестностью, когда он обладает конечным запрещающим множеством.*

Следствия 1.4 – 1.6 устанавливают сильную предупорядоченность относительно подстановки переменных трёх функциональных пространств — пространства P_E функций $f : E^n \rightarrow E$ с замыканием относительно операций суперпозиции, пространства Π_E предикатов $p : E^n \rightarrow \{И, Л\}$ с замыканием относительно операций конъюнкции, проектирования и подстановки переменных, а также пространства $P_{C,E}$ функций $f : E^n \rightarrow C$ с S -замыканием (где E и C — фиксированные конечные множества, а n принимает целые положительные значения). Рассмотрим подробнее последний результат.

Пусть заданы клоны $L \subseteq P_C, R \subseteq P_E$ и множества $O \subseteq P_{C,E}, U \subseteq P_{E,C}$. Положим $S = (L, O, R, U)$. Множество M функций из $P_{C,E}$ называется *S -замкнутым*, если

$$O \subseteq M, \quad LMR \subseteq M, \quad MUM \subseteq M.$$

При этом под «произведением» XU произвольных множеств X и U функций из соответствующих классов $P_{D,C}$ и $P_{C,E}$ понимается множество всех функций

$f(g_1(x), \dots, g_n(x))$, где f — n -местная функция из X , g_1, \dots, g_n — m -местные функции из Y , через x обозначен набор переменных x_1, \dots, x_m , а числа n и m принимают произвольные натуральные значения.

Будем обозначать через \trianglelefteq *предупорядочение* в множестве $P_{C,E}$ *относительно подстановки переменных*, при котором для функций v и w , зависящих соответственно от n и m переменных, неравенство $v \trianglelefteq w$ означает, что

$$v(x_1, \dots, x_n) = w(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) \text{ для некоторых } i_1, \dots, i_m \text{ из } \{1, \dots, n\}.$$

Имеет место

Следствие 1.6. *В множестве $P_{C,E}$ S -замыкание и предупорядочение относительно подстановки переменных сильно согласованы посредством системы \mathcal{N} и отображения α , где \mathcal{N} состоит из множеств $P_{C,E}^{(n)}$ при целых положительных n и $\alpha(P_{C,E}^{(n)}) = P_{C,E}^{(m)}$ для $m = |E|^n$.*

Здесь $P_{C,E}^{(n)}$ — множество функций из $P_{C,E}$ от n или менее переменных.

Установлено

Следствие 1.7. *Конечно порождаемый S -замкнутый класс имеет конечную нижнюю окрестность, классы которой обладают конечными запрещающими множествами.*

Введённое S -замыкание обобщает ряд известных замыканий и представляет самостоятельный интерес, так как S -замкнутыми классами являются классы функций, вычисляемых переключательными схемами.

Далее изучаются пространства с замыканием Галуа.

Пусть заданы непересекающиеся множества P и T и соответствие Галуа между системами их подмножеств, то есть для любого подмножества $X \subseteq P$ (и любого $X \subseteq T$) определено подмножество $X^+ \subseteq T$ (соответственно $X^+ \subseteq P$), причём

$$X \subseteq X^{++}, X \subseteq Y \Rightarrow X^+ \supseteq Y^+ \text{ и } X \subseteq Y \Rightarrow X^{++} \subseteq Y^{++}$$

если $X \cup Y \subseteq P$ или $X \cup Y \subseteq T$. Соответствие Галуа может быть определено отношением $\alpha \subseteq P \times T$, таким, что для любых $x \in P$ и $y \in T$:

$$(x, y) \in \alpha \Leftrightarrow x \in \{y\}^+ \Leftrightarrow y \in \{x\}^+.$$

В каждом из множеств P и T оказывается определённым замыкание $^{++}$, называемое замыканием Галуа. Пусть также в каждом из множеств определено предупорядочение \trianglelefteq , согласованное с замыканием Галуа в нём.

Множество X называется *описанием* Галуа-замкнутого класса X^+ . Галуа-замкнутый класс, обладающий конечным описанием, называется *конечно описуемым*.

Теорема 1.5. Пусть в предпорядоченном пространстве $(T,^{++}, \trianglelefteq)$ всякий Галуа-замкнутый класс с одноэлементным описанием обладает конечным запрещающим множеством. Тогда для любого Галуа-замкнутого класса этого предпорядоченного пространства наличие конечного запрещающего множества равносильно наличию конечного описания и равносильно наличию конечной верхней окрестности. В тех же условиях для любого Галуа-замкнутого класса пространства $(P,^{++})$ наличие конечного порождающего множества равносильно наличию конечной нижней окрестности.

Теорема 1.6 характеризует пространства с замыканием Галуа и с конечными нижними окрестностями для всех конечно порождаемых классов следующим условием: при некотором предпорядочении двойственного пространства классы с одноэлементными описаниями имеют конечные запрещающие множества.

Далее в работе построена теория Галуа для S -замыкания.

Это сделано на основе обобщения классического соответствия Галуа $\text{pol}_E - \text{inv}_E$, определяемого отношением сохранения функцией из P_E предиката из Π_E и изученного Гейгером и Боднарчуком с соавторами, а также соответствия Галуа $\text{pol}_{C,E} - \text{inv}_{C,E}$, определяемого отношением сохранения функцией из $P_{C,E}$ 2-предиката из $\Pi_{C,E}$ и изученного Пиппенджером.

Сделаем необходимые определения. Пара предикатов p и q одинаковой арности из соответствующих множеств Π_C и Π_E называется 2-предикатом соответствующей арности. Множество всех 2-предикатов обозначается через $\Pi_{C,E}$. Говорят, что функция f из $P_{C,E}$ от n переменных сохраняет m -арный 2-предикат (p, q) из $\Pi_{C,E}$ (либо сохраняет предикат q из Π_E , если $E = C$ и $p = q$), если для любых наборов X_1, \dots, X_n , удовлетворяющих предикату q , набор $f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$, полученный последовательным вычислением значений функции f от строк матрицы (X_1^T, \dots, X_n^T) , удовлетворяет предикату p .

Через $\text{pol}_{C,E}(Y)$ (соответственно через $\text{pol}_C(Y)$) обозначается множество всех функций из $P_{C,E}$ (из P_C), сохраняющих все 2-предикаты из множества $Y \subseteq \Pi_{C,E}$ (предикаты из множества $Y \subseteq \Pi_C$). Через $\text{inv}_{C,E}(X)$ (соответственно через $\text{inv}_C(X)$) обозначается множество всех 2-предикатов из $\Pi_{C,E}$ (предикатов из множества Π_C), сохраняемых всеми функциями из множества $X \subseteq P_{C,E}$ (из $X \subseteq P_C$). Положим

$$\Pi_{C,E}^S = (\text{inv}_C(L) \times \text{inv}_E(R)) \cap \text{inv}_{C,E}(O) \cap \text{inv}_{E,C}^{[-1]}(U) \text{ и } \text{inv}_{C,E}^S(Y) = \Pi_{C,E}^S \cap \text{inv}_{C,E}(Y),$$

где через $\text{inv}_{E,C}^{[-1]}(U)$ обозначено множество 2-предикатов (q, p) , полученных перестановкой компонент в 2-предикатах (p, q) из класса $\text{inv}_{E,C}(U)$. Рассмотрим соот-

ветствие Галуа $\text{pol}_{C,E} - \text{inv}_{C,E}^S$, определяемое отношением сохранения функцией из $P_{C,E}$ 2-предиката из $\Pi_{C,E}^S$. Галуа-замкнутые классы функций описывает

Теорема 1.7. *Для любого множества N 2-предикатов из $\Pi_{C,E}^S$ множество $\text{pol}_{C,E}(N)$ является S -замкнутым классом функций из $P_{C,E}$. Для любого S -замкнутого класса $M \subseteq P_{C,E}$ имеет место равенство $M = \text{pol}_{C,E}(\text{inv}_{C,E}^S(M))$.*

Имеет место

Следствие 1.8. *Конечно порождаемый S -замкнутый класс имеет конечную нижнюю окрестность, классы которой имеют одноэлементные описания. Наличие конечного описания для S -замкнутого класса равносильно существованию для него конечного запрещающего множества и равносильно наличию конечной верхней окрестности.*

Галуа-замкнутые классы 2-предикатов характеризует

Теорема 1.8. *Для произвольного множества M функций из $P_{C,E}$ множество $\text{inv}_{C,E}^S(M)$ является S -замкнутым классом 2-предикатов. Для любого S -замкнутого класса N 2-предикатов верно: $N = \text{inv}_{C,E}^S(\text{pol}_{C,E}(N))$.*

В этой теореме множество 2-предикатов из класса $\Pi_{C,E}^S$, включающее все 2-диагонали, называется S -замкнутым, если оно содержит конъюнкцию любых двух своих 2-предикатов, вместе с любым своим 2-предикатом содержит все его проекции и все 2-предикаты, получаемые из него подстановкой переменных, а также вместе с любым своим m -местным 2-предикатом (p, q) содержит всякий m -местный 2-предикат (p', q') из $\Pi_{C,E}^S$, такой, что $p \supseteq p'$ и $q \subseteq q'$.

Теоремами 1.7 и 1.8 построена теория Галуа для S -замыкания, описывающая его как замыкание Галуа. Таким образом найдено единое обобщение ряда теорий Галуа (построенных: Гейгером и Боднарчуком с соавторами для клонов, Харнау для замкнутых классов, Пиппенджером для наследственных классов, Коуцейро и автором для классов, замкнутых подстановками функций из клонов), содержащее их в качестве частных случаев и имеющее собственные приложения в теории переключательных схем.

Результаты первой главы позволяют получить в качестве следствий известные теоремы о функциональной полноте и предикатно описываемых клонах и их аналоги для S -замкнутых классов. Последнее обстоятельство предоставляет возможность, ранее затруднённую, решения проблем полноты и выразимости в пространствах дискретных функций, вычисляемых переключательными схемами. Именно, в силу следствий 1.7 и 1.8 проблема выразимости конечно порождаемого множества таких функций имеет решение в виде конечной нижней окрестности, классы которой имеют конечные запрещающие множества и описания.

Результаты первой главы получены в следующих работах автора: теоремы 1.1 и 1.2 — в [10], теоремы 1.3 – 1.6 — в [8], следствия 1.4 – 1.6 — в [8, 22], теоремы 1.7 и 1.8 — в [24] на основе [6]. Предварительные результаты получены в [19, 20, 21].

Вторая глава называется «Клоны с мажоритарной функцией и их обобщения». В ней в связи с проблемой конечной порождаемости в качестве обобщения клонов с мажоритарной функцией выделено новое семейство клонов, конечно порождаемых в ряде случаев. Введённые в рассмотрение клоны с (c, d) -подклонами охарактеризованы свойствами их функций и инвариантных предикатов, установлена возможность (c, r) -разложений в них. Получены следующие результаты.

Через $\text{pol}_E^*(Y)$ обозначается множество частичных функций вида $f : E^n \rightarrow E \cup \{*\}$, сохраняющих все предикаты из множества $Y \subseteq \Pi_E$. Для клона K , такого, что $\text{inv}_E(K) = \text{inv}_E \text{pol}_E^*(Y)$, множество Y называется *и-описанием*. И-описания клонов играют существенную роль при выявлении свойств конечной порождаемости (что показано во второй главе) и при решении проблем полноты (это показано в четвёртой главе).

В первом разделе приводится лемма Б. А. Ромова о доопределении, используемая для нахождения и-описаний. Далее приводится теорема Бейкера и Пиксли, характеризующая клоны с мажоритарными функциями, а также уточняющая её

Теорема 2.1, необходимая для последующего обобщения.

Дальнейшим обобщением является

Теорема 2.2. Пусть M_1 и M_2 — клоны функций из P_E , такие, что $M_1 \subseteq M_2$. Пусть также $N_1 = \text{inv}_E(M_1)$, $N_2 = \text{inv}_E(M_2)$ и $d \geq 1$. Следующие условия равносильны:

- (1) имеет место равенство $N_1 = \text{inv}_E \text{pol}_E^*(N_2 \cup N_1^{(d)})$;
- (2) имеет место включение $N_1 \subseteq \text{inv}_E \text{pol}_E^*(N_2 \cup \Pi_E^{(d)})$;
- (3) для всякой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ из M_2 существует такая функция $t_f(x_1, \dots, x_{n+d+1})$ в M_1 , что для любого i , $1 \leq i \leq d+1$, выполняется тождество

$$f(x) = t_f(x, f(x), \dots, f(x), x_{n+i}, f(x), \dots, f(x)),$$

где через x обозначен набор переменных x_1, \dots, x_n и переменная x_{n+i} находится на $(n+i)$ -м месте функции t_f ;

- (4) для любого предиката $p(x_1, \dots, x_l)$ из N_1 , зависящего от $l > d$ переменных, и любого (равносильно некоторого) подмножества $U \subseteq \{1, \dots, l\}$, содержащего $|U| > d$ элементов, найдётся предикат $q(x_1, \dots, x_l)$ в N_2 , такой, что

$$p(x_1, \dots, x_l) \equiv q(x_1, \dots, x_l) \wedge \bigwedge_{i \in U} \exists x_i p(x_1, \dots, x_l).$$

В условиях (1) – (4) из теоремы 4.2 клон $M_1 \subseteq M_2$ называется d -подклоном клона M_2 , функция m_f называется *специальной для f* , переменные x_1, \dots, x_n называются *внутренними* для функции m_f . Клоны с d -подклонами представляют интерес в связи с проблемой конечной порождаемости в силу следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть M_1 — d -подклон клона M_2 функций из P_E . Если клон M_1 конечно порождаемый, имеет порядок n_1 и степень m_1 , то клон M_2 также конечно порождаемый, его порядок не превосходит $\max\{n_1, |E|^d - 1\}$, а степень не превосходит $\max\{m_1, d\}$.*

Здесь *порядком* конечно порождаемого клона M называется наименьшее натуральное число n , такое, что функции, зависящие не более, чем от n переменных, порождают клон M так, что $M = [M^{(n)}]$. *Степенью* конечно порождаемого клона M называется наименьшее натуральное число m , такое, в некоторой нижней окрестности клона M всякий клон K описывается некоторым предикатом p_K , зависящим не более, чем от m переменных, как $K = \text{pol}_E(p_K)$.

Понятие d -подклона иллюстрирует

Пример 2.1. В этом примере устанавливается, что 2-подклонами являются монотонные части MI^d и MI^∞ в клонах I^d d -неразделённых и I^∞ неразделённых булевых функций, причём для функции f из I^∞ специальную функцию m_f в MI^∞ всегда можно выбрать с не более, чем одной существенной внутренней переменной.

Последнее замечание примера 2.1 получает следующее обобщение.

Для целого неотрицательного числа c и целого положительного числа $d \geq 2$ клон M_1 называется (c, d) -подклоном клона M_2 и оба эти клона называются (c, d) -клонами, если клон M_1 является d -подклоном клона M_2 и для любой функции f из M_2 специальную функцию m_f в клоне M_1 можно выбрать с не более чем c существенными внутренними переменными. Выбирая число c из расширенного натурального ряда, пополненного наибольшим элементом ∞ , всякий d -подклон будем считать (c, d) -подклоном при $c = \infty$. В связи с проблемой конечной порождаемости клонов представляет интерес

Теорема 2.4. *Для любых натуральных c и d , где $d \geq 2$, всякий (c, d) -клон конечно порождаемый. Его порядок не превосходит $\max(|E|^d - 1, c + d + 1)$, а степень не превосходит $\max(|E|^{c+1}, d + 2)$.*

Утверждение данной теоремы было известно ранее лишь при $c = 0$ в части, касающейся конечной порождаемости.

Далее в работе получена предикатная характеристика (c, d) -клонов.

Будем говорить, что n -местная функция $f(x_1, \dots, x_n)$ из P_E сохраняет по

набору своих переменных x_{i_1}, \dots, x_{i_c} , где $\{i_1, \dots, i_c\} \subseteq \{1, \dots, n\}$, m -арный 2-предикат (p, q) , если для любых наборов X_1, \dots, X_n из E^m верно следующее: всякий раз когда наборы X_{i_1}, \dots, X_{i_c} удовлетворяют предикату q , набор $f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$, полученный последовательным выписыванием значений функции f , вычисленных от строк матрицы (X_1^T, \dots, X_n^T) , удовлетворяет предикату p .

Набор y из E^m будем называть *особым* набором m -арного предиката p , если этот набор не удовлетворяет предикату p , но для любого числа $i, 1 \leq i \leq m$, найдётся удовлетворяющий предикату p набор, отличающийся от набора y только i -й координатой. Если при этом предикат p совпадает с предикатом q , либо получен из него проектированием, возможно неоднократным, то 2-предикат $(E^m \setminus \{y\}, p)$ будем называть *2-редукцией* предиката q (через $E^m \setminus \{y\}$ обозначен m -арный предикат, область истинности которого совпадает с одноимённым множеством).

Имеет место

Теорема 2.5. Пусть c и d — натуральные числа, такие, что $d \geq 2$, и M_1 — d -подклон клона M_2 функций из R_E . Пусть также множество Y предикатов из Π_E является u -описанием клона M_2 так, что $\text{inv}_E(M_2) = \text{inv}_E \text{pol}_E^*(Y)$. Тогда равносильны условия:

- (1) клон M_1 является (c, d) -подклоном клона M_2 ;
- (2) для любого $r > d$ всякая функция из M_2 по некоторому набору своих переменных, содержащему не более c переменных, сохраняет все r -арные 2-редукции предикатов из Y ;
- (3) для любого $r > d$ всякая частичная функция из R_E^* , имеющая доопределение в клоне M_2 , по некоторому набору своих переменных, содержащему не более c переменных, сохраняет все r -арные 2-редукции предикатов из Y .

Далее изучаются (c, r) -разложения (c, d) -клонов, при $c = 0$ аналогичные чистым и при $c = r$ близкие к смешанным id -разложениям, введённым в работах С. С. Марченкова и изучавшимся также в работах А. Б. Угольниковца.

Говорят, что клон M_2 (c, r) -разлагается над клоном M_1 , если для любой функции f из M_2 , зависящей от $n \geq r$ переменных, найдутся $l \leq c$ чисел i_1, \dots, i_l в множестве $\{1, \dots, n\}$ и функция g в клоне M_1 , зависящая от $l + \binom{r}{2}$ переменных, такие, что

$$f(x) = g(x', f(x_2^1), \dots, f(x_r^1), \dots, f(x_{i_1+1}^i), \dots, f(x_r^i), \dots, f(x_r^{r-1})),$$

где через x обозначен набор переменных x_1, \dots, x_n , через x' обозначен набор переменных x_{i_1}, \dots, x_{i_l} , через x_j^i при $1 \leq i < j \leq r$ обозначен набор переменных $x_1, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n$. Доказана

Теорема 2.6. *Для любых натуральных d и r , таких, что $d \geq 2$ и $r = |E|^d + 1$, и любого c из расширенного натурального ряда всякий клон функций из $P_E(c, r)$ -разлагается над любым своим (c, d) -подклоном.*

Ранее был известен аналог этой теоремы для чистых id -разложений и клонов с мажоритарной функцией (что соответствует случаю $c = 0$ в теореме 2.6).

Результаты второй главы опубликованы в следующих работах автора: теоремы 2.1 – 2.4 — в [4], теоремы 2.5 и 2.6 — в [7].

Третья глава называется «Квазимонотонные функции на полурешётке». При описании асинхронных управляющих систем средствами полурешёточной модели, предложенной Г. П. Агибаловым, изменяющиеся их состояния, упорядоченные по степени неопределённости, рассматриваются как элементы верхней полурешётки, а для описания их функционирования используются полурешёточные функции из различных классов: квазимонотонные (для формулирования задачи синтеза), монотонные (для точного описания функционирования системы), точечные и минимальные точечные (для точного описания базисных элементов), слабо существенные. Таким образом, актуальны рассматриваемые в третьей главе проблемы эффективного задания указанных классов и форм представления их функций и рассматриваемые в дальнейшем проблемы полноты и выразимости в них. В третьей главе найдены и-описания клонов квазимонотонных и слабо существенных квазимонотонных функций, а также их монотонных частей. Установлены некоторые свойства классов точечных и минимальных точечных функций на полурешётке. В связи с проблемами синтеза асинхронных автоматов сформулирована задача выделения максимальных подклонов в этих классах, предложена конструкция таких подклонов. Установлены условия и предложены методы для формульного представления минимальных точечных функций на трёхэлементной полурешётке, на произвольной дистрибутивной точечной полурешётке. Рассмотрим эти результаты подробнее.

Пусть L — конечная верхняя полурешётка с упорядочением \leq и наибольшим элементом \top , не являющаяся решёткой, E — множество её минимальных элементов, $q(L)$ — максимальная мощность минимального по включению подмножества без нижней грани в L . Рассматриваются функции из множества P_L .

Прежде всего, найдены и-описания клона M_L *монотонных* функций на верхней полурешётке L (то есть функций, сохраняющих её упорядочение \leq), клона Q_L *квазимонотонных* функций (имеющих монотонную миноранту), клона Φ_L *слабо существенных квазимонотонных* функций (имеющих одноместную монотонную миноранту), а также клона $\Phi_L \cap M_L$ *слабо существенных монотонных* функций.

Пусть

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(m)}(x_1, \dots, x_m) &\equiv \exists x(x \leq x_1 \wedge \dots \wedge x \leq x_m), \\ \varepsilon^{(m,r)}(x_1, \dots, x_{rm}) &\equiv \\ &\equiv \varepsilon^{(m)}(x_1, \dots, x_m) \vee \varepsilon^{(m)}(x_{m+1}, \dots, x_{2m}) \vee \dots \vee \varepsilon^{(m)}(x_{(r-1)m+1}, \dots, x_{rm}).\end{aligned}$$

Теорема 3.1. *Имеют место равенства*

$$\text{inv}_L(Q_L) = \text{inv}_L \text{pol}_L^*(\varepsilon^{(q(L))}), \quad \text{inv}_L(M_L) = \text{inv}_L \text{pol}_L^*(\leq, \varepsilon^{(q(L))}).$$

Теорема 3.2. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned}\Phi_L &= \text{pol}'_L(\varepsilon^{(q(L))}), \\ \text{inv}_L(\Phi_L) &= \text{inv}_L \text{pol}_L^*(\varepsilon^{(q(L),1)}, \varepsilon^{(q(L),2)}, \dots), \\ \text{inv}_L(M_L \cap \Phi_L) &= \text{inv}_L \text{pol}_L^*(\leq, \varepsilon^{(q(L),1)}, \varepsilon^{(q(L),2)}, \dots).\end{aligned}$$

Теорема 3.1 согласуется с тем, что клоны M_L и Q_L содержат мажоритарную функцию от $q(L) + 1$ переменных и являются конечно порождаемыми (это известно из работ Деметровича), а в соответствии с теоремой 3.2 монотонная часть является 2-подклоном в клоне Q_L и $(1, 2)$ -подклоном в клоне Φ_L ; в частности, клоны $M_L \cap \Phi_L$ и Φ_L являются $(1, 2)$ -клонами и, следовательно, конечно порождаемые. В диссертации монотонная мажоритарная функция и специальные монотонные функции для слабо существенных квазимонотонных функций указаны явно. Сформулированные свойства в том числе открывают возможности для решения задач синтеза в указанных клонах на основе (c, r) -разложения функций.

Далее изучаются точечные функции.

Функция f от n переменных называется *точечной*, если для любого набора a из множества L^n в полурешётке L выполняется соотношение

$$f(a) = \sum_{a'} f(a'),$$

где суммирование ведётся по всем наборам a' из E^n , таким, что $a' \leq a$. Точечная функция, сохраняющая множество E , называется *минимальной точечной*. Классы точечных и минимальных точечных функций обозначаются через T_L и $\text{min}(T_L)$ соответственно. Устанавливаются некоторые свойства этих классов.

Теорема 3.3 устанавливает, что точечные функции с одинаковым числом переменных образуют полурешётку.

Теорема 3.4 устанавливает критерий точечности, откуда получается

Следствие 3.3, утверждающее о существовании в любом базисе последовательности схем сложности $O(|L|^n)$ и глубины $O(n^2)$ для распознавания точности заданной векторно n -местной функции из P_L .

Схему линейной сложности можно получить также методом А. А. Вороненко и методом В. Б. Алексеева.

Далее формулируется задача выделения замкнутых классов точечных и минимальных точечных функций, представляющая интерес для синтеза схем без состязаний. В силу следующих теоремы 3.5 и следствия 3.4 эта задача в значительной степени сводится к описанию максимальных таких классов.

Теорема 3.5. *Каждый замкнутый класс точечных функций из T_L включён в некоторый максимальный такой класс; множество последних конечно.*

Следствие 3.4. *Каждый замкнутый класс минимальных точечных функций из $\min T_L$ включён в некоторый максимальный такой класс; множество последних конечно.*

Построены примеры максимальных клонов в множествах T_L и $\min T_L$ в случае, когда L есть полурешётка интервалов решётки (E, \preceq) .

В этом случае элементами полурешётки L являются интервалы $[a, b]$ решётки E , где a и b — элементы из E , такие, что $a \preceq b$. При этом в множестве L определены два упорядочения — полурешёточное \leq и решёточное \preceq , такие, что

$$[a, b] \leq [c, d] \Leftrightarrow (c \preceq a \text{ и } b \preceq d), \quad [a, b] \preceq [c, d] \Leftrightarrow (a \preceq c \text{ и } b \preceq d)$$

для элементов a, b, c и d из E , таких, что $a \preceq b$ и $c \preceq d$. Доказано

Следствие 3.7. *Пусть (L, \preceq) — решётка и (L, \leq) — полурешётка интервалов решётки (E, \preceq) . Клоны $\text{pol}_L(\preceq, \leq)$ и $\text{pol}_L(\preceq, \leq, E)$ являются максимальными по включению среди включённых в соответствующие классы T_L точечных и $\min T_L$ минимальных точечных функций.*

Далее рассматриваются проблема форм представления в классе $\min T_L$.

Прежде всего, явно описывается класс функций на трёхэлементной полурешётке $\tilde{E}_2 = \{0, 1, \top\}$ (непустых подмножеств множества $E_2 = \{0, 1\}$), вычисляемых формулами в каноническом базисе из операций \neg, \vee, \wedge (— это точечные продолжения на полурешётку \tilde{E}_2 одноимённых булевых операций) и дизъюнктивными формами различного вида. Рассматриваемый случай трёхэлементной полурешётки — принципиально важный, поскольку наборами её элементов описываются динамические (то есть изменяющиеся и в разной степени определённые) состояния комбинационных схем с двоичными статическими (то есть неизменными и полностью определёнными) состояниями.

Понадобятся некоторые определения. Для набора $x = (x_1, \dots, x_n)$ переменных и набора $a = (a_1, \dots, a_n)$ значений из множества $\{0, 1, \perp, \top\}$ положим

$$x^a = x_1^{a_1} \wedge \dots \wedge x_n^{a_n},$$

где $x_i^{a_i}$ есть $\neg x_i, x_i, 1$ или $x_i \wedge \neg x_i$ при соответствующем значении a_i , равном $0, 1, \top$ или \perp . Для непустого множества A наборов a^1, \dots, a^m из множества $\{0, 1, \perp, \top\}^n \setminus \{\top\}^n$ формулу

$$x^{a^1} \vee \dots \vee x^{a^m}$$

будем обозначать через x^A и будем называть *дизъюнктивной формой* или *дф*.

Для подмножества $K \subseteq \tilde{E}_2^n$ через $\perp K$ обозначим множество всех наборов из \tilde{E}_2^n , не имеющих нижнюю грань с любым набором из K .

Сначала рассматриваются дф, в которых конъюнкции не содержат повторяющихся переменных. Такие дф будем называть *днф*.

Теорема 3.6. указывает условия, при которых произвольная функция вычисляется заданной днф, откуда получается

Следствие 3.8. *Функция f из множества $\text{pol}_2(\leq, E_2, \{\top\})$, зависящая от n переменных, тогда и только тогда вычисляется некоторой днф, когда выполняются условия $f^{-1}(0) = \perp f^{-1}(1)$ и $f^{-1}(1) \neq \emptyset$.*

В частности, всякая отличная от констант 0 и 1 минимальная точечная функция f вычисляется сокращённой днф

$$x^K, \text{ где } K = \max(f^{-1}(1), \leq);$$

и в отличие от двоичного случая это единственная тупиковая дф для функции f , минимальная как по числу конъюнкций, так и по суммарному числу букв в них.

Далее рассматриваются дф, в которых любая конъюнкция содержит все переменные, причём хотя бы одну дважды — с отрицанием и без него. Такие дф называются далее *дф с повторениями*.

Теорема 3.7. указывает условия, при которых произвольная функция вычисляется заданной дф с повторениями, откуда получается

Следствие 3.9. *Всякая функция $f : \tilde{E}_2^n \rightarrow \{0, \top\}$ из класса $\text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2, \{\top\})$ вычисляется некоторой дф с повторениями.*

Теорема 3.8. указывает условия, при которых произвольная функция вычисляется дф x^C , где $C \subseteq (\tilde{E}_2^n \setminus \{\top\}^n) \cup (\{0, 1, \perp\}^n \setminus \{0, 1\}^n)$, с конъюнкциями двух типов, откуда получается

Следствие 3.10. *Имеют место равенства классов:*

$$[\vee, \wedge, \neg] = \text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2, \{\top\}) \quad \text{и} \quad [0, 1, \vee, \wedge, \neg] = [\min T_{\tilde{E}_2}] = \text{pol}_{\tilde{E}_2}(\leq, E_2).$$

Далее изучается проблема форм представления в классе $\min T_L$, где L — дистрибутивная точечная полурешётка. В частности, на основе предложенного метода формульного представления установлено, что класс $\min T_L$ порождается своими двухместными функциями. Рассмотрим подробнее этот результат.

Полурешётка L называется *дистрибутивной*, если таковой является решётка $L' = L \cup \{\perp\}$, полученная присоединением наименьшего элемента \perp . Полурешётка называется *точечной*, если каждый её элемент является суммой некоторых минимальных её элементов. К числу дистрибутивных точечных относится полурешётка \tilde{E}_k непустых подмножеств множества $E_k = \{0, \dots, k-1\}$. Наборами её элементов описываются динамические состояния схем с k -ичными статическими состояниями.

Пусть в дистрибутивной точечной полурешётке L выделено подмножество $C \subseteq L$, включающее все минимальные элементы полурешётки и называемое *специальным*, а для каждого элемента c из специального множества C задана *c -специальная* функция — двухместная квазимонотонная функция $*_c$ из Q_L со свойствами

- 1) $x *_c x = x$ для всех x из L ;
- 2) $x *_c (x + c) = (x + c) *_c x = x$ для всех x из L таких, что $xc = \perp$.

В диссертации предлагается рекурсивный метод разложения для формульного представления квазимонотонных функций из Q_L в базисах, содержащих все слабо существенные функции из Φ_L и набор специальных функций $*_c, c \in C$, а также для представления минимальных точечных функций из $\min T_L$ в бинарных базисах, содержащих одноместные функции из $\min T_L^{(1)}$ и набор специальных функций из $\min T_L^{(2)}$. На основании предложенного метода установлена

Теорема 3.9. *Пусть L — дистрибутивная точечная полурешётка. Тогда*

$$Q_L = [\Phi_L \cup (\min T_L)^{(2)}], \quad \min T_L \subseteq [(\min T_L)^{(2)}].$$

Отдельно рассмотрен случай полурешётки \tilde{E}_k непустых подмножеств множества $E_k = \{0, 1, \dots, k-1\}$.

Теорема 3.10. *Пусть $L = \tilde{E}_k$. Тогда*

$$Q_L = [\Phi_L \cup \{\vee\}], \quad \min T_L \subseteq [(\min T_L)^{(1)} \cup \{\vee\}].$$

Здесь дизъюнкция есть точечная функция, ограничение которой определено на множестве $E_k = \min(\tilde{E}_k)$ как $x_1 \vee x_2 = \max(x_1, x_2)$.

Результаты третьей главы получены автором в работах [23] (теоремы 3.1 и 3.2), [12] (следствие 3.7) и [25] (остальные теоремы и следствия) на основании результатов более ранней работы [1]. Некоторые предварительные результаты получены в [15, 18, 23].

Четвёртая глава называется «Проблема полноты в слабо центральном клоне». В ней установлены различные условия максимальности подклонов (произвольных и слабо центральных); рассмотрены приложения полученных условий в некоторых случаях. Решена проблема полноты в слабо центральном клоне, описываемом наследственной системой множеств, при суперпозиции со всеми слабо существенными функциями. Тем самым, в частности, решена проблема полноты при суперпозиции со слабо существенными функциями в клоне квазимонотонных функций на произвольной полурешётке и в (предполном) клоне, описываемом нетривиальным центральным, вполне рефлексивным и симметричным предикатом.

Напомним некоторые определения. Пусть множество A функций из P_L включает все селекторы. Клоны, включающие множество $A \subseteq P_L$, называются A -клонами. Проблема A -полноты в клоне B , где $A \subseteq B$, состоит в описании всех порождающих A -клон B подмножеств $X \subseteq B$, порождающих его с использованием операций суперпозиции и функций из множества A так, что $B = [X \cup A]$. Инструментом решения этой проблемы является *критериальная для A -клона* (иначе — A -критериальная для клона) B система. Так называется система \mathcal{S} A -клонов, собственным образом содержащихся в клоне B , если всякий A -клон, собственным образом содержащийся в клоне B , можно расширить до некоторого клона из \mathcal{S} . A -критериальная система \mathcal{S} называется *безызбыточной*, если она не содержит пары сравнимых по включению клонов и совпадает тогда с системой $\mathcal{S}(A, B)$ всех максимальных A -клонов среди строго содержащихся в B , в остальных случаях лишь включённой в \mathcal{S} . Представляют интерес условия, позволяющие выделять клоны A -критериальной системы (по-возможности конечной и безызбыточной).

Сначала рассмотрен наиболее общий случай $A = S_L$.

Предложено для решения проблемы полноты в клоне B использовать множество $\Lambda(B)$ предикатов из Π_L , обладающих свойствами B -предельности по проектированию, отождествлению, сужению и симметризации. Это означает, что всякий предикат p из $\Lambda(B)$ инвариантен для клона B , а всякий отличный от p предикат, полученный из него проектированием, отождествлением переменных, сужением (— пересечением с некоторым инвариантным для клона B предикатом) или симметризацией (— пересечением с перестановочно эквивалентным предикатом) уже инвариантен для клона B . Доказана

Теорема 4.1. Система клонов $B \cap \text{pol}_L(p)$, где $p \in \Lambda(B)$, является критериальной для клона B . Эта система конечная, если клон B конечно порождаемый.

В качестве средства выделения подклонов в клоне, в том числе максимальных при решении проблем полноты, предложено наряду с предикатными описаниями

использовать предикатные и-описания и расширенные и-описания. При этом множество Y предикатов, инвариантных для клона C , называется его *и-описанием* в клоне B , таком, что $C \subseteq B$, если любая частичная функция, имеющая доопределение в клоне B и сохраняющая предикаты из Y , имеет доопределение в клоне C . Возможны другие равносильные определения для и-описания, указанные в диссертации. И-описание Y называется *расширенным*, если оно вместе с любым своим предикатом p содержит всякий неинвариантный для B предикат без фиктивных переменных, который можно получить из предиката p отождествлением переменных и удалением фиктивных переменных.

Необходимые и достаточные условия максимальности подклона, заданного расширенным и-описанием, даёт

Теорема 4.2. Пусть K и B — клоны функций из P_L , такие, что $K \subset B$, а множество Y предикатов из $\text{inv}_L(K) \setminus \text{inv}_L(B)$ является расширенным и-описанием клона K в клоне B . Тогда равносильны условия:

- 1) клон K не является максимальным подклоном клона B ;
- 2) включения $K \subset B \cap \text{pol}_L(q) \subset B$ выполняются для некоторого предиката

$$q = q_0 \cap q_1 \cap \dots \cap q_l,$$

где предикат q_0 инвариантен для клона B , а предикаты q_1, \dots, q_l перестановочно эквивалентны некоторым предикатам из Y .

Использование теоремы 4.2 иллюстрирует

Пример 4.1. Пусть s — подстановка на множестве L простого порядка p без неподвижных точек. В примере 4.1 показано, что расширенное и-описание клона $\text{pol}_L(\gamma_s)$ s -самодвойственных функций из P_L , сохраняющих график γ_s подстановки s , составляют предикаты γ_{s^i} , $1 \leq i \leq p-1$. На основании этого с использованием теоремы 4.2 установлена максимальность в P_L подклона $\text{pol}_L(\gamma_s)$, известная ранее из теоремы Розенберга.

Далее выделен частный случай, имеющий многочисленные приложения.

B -предельный по проектированию, симметризации и сужению предикат называется *B -простым*, если он один составляет и-описание некоторого подклона в клоне B (тогда расширенное и-описание). Доказана

Теорема 4.3. Пусть предикат p является B -простым. Тогда подклон $B \cap \text{pol}_L(p)$ является максимальным в B . Также в этом случае для любого B -предельного по проектированию и отождествлению предиката q равенство $B \cap \text{pol}_L(p) = B \cap \text{pol}_L(q)$ означает перестановочную эквивалентность предикатов p и q , в частности, влечёт B -простоту предиката q .

Использование этой теоремы иллюстрируют

Примеры 4.2 – 4.6. В примерах 4.2 – 4.5 установлено, что P_L -простым является: график подстановки на L , разлагающейся в произведение независимых циклов длины 2; предикат нетривиального отношения эквивалентности на L ; предикат решёточного порядка; отличный от диагонали центральный, симметричный и вполне рефлексивный предикат. В примере 4.6 установлено, что предикат полурешёточного упорядочения \leq множества L является B -простым, если $B \in \{Q_L, \Phi_L\}$, откуда следует максимальность монотонных частей в клонах Q_L и Φ_L .

Далее проблема полноты изучается для слабо центральных клонов.

Элемент c из множества L будем называть *слабо центральным* для m -местного предиката p из Π_L , если замена любой компоненты в любом удовлетворяющем предикату p наборе значением c приводит к набору, удовлетворяющему предикату p . Предикат, для которого элемент c является слабо центральным, назовём *c -слабо-центральным* предикатом. Предикат, для которого некоторый элемент является слабо центральным, сам называется *слабо центральным*. Доказана

Лемма 4.4. *Для произвольного клона K функций из P_L следующие условия равносильны:*

- (1) *всякую частичную функцию из P_L^* , имеющую доопределение в клоне K , можно доопределить до функции из K значением c ;*
- (2) *клон K вместе с любой функцией f содержит и всякую функцию $g \geq_c f$;*
- (3) *клон K описывается посредством некоторого множества Y c -слабо-центральных предикатов из Π_L , такого, что $K = \text{pol}_L(Y)$.*

Здесь неравенство $g \geq_c f$ означает, что функция g получается из функции f заменой некоторых её значений значением c .

Клон K , для которого выполняются условия (1) – (3) леммы 4.4, называется *слабо центральным* или, точнее, *c -слабо-центральным*. Иными словами, произвольный клон является *c -слабо-центральным*, если он включает (наименьший по включению такой) клон $\text{pol}_L(W_L^c)$, описываемый множеством W_L^c всех *c -слабо-центральных* предикатов и совпадающий в двоичном случае с одним из клонов неразделённых либо разделённых булевых функций. В диссертации установлены некоторые свойства слабо центральных клонов, связанные с конечной порождаемостью и предикатонной описуемостью, рассмотрены примеры.

Пусть $\Lambda(A, B)$ — множество инвариантных для A и одновременно B -предельных по проектированию, отождествлению, сужению и симметризации предикатов.

Лемма 4.5 устанавливает B -простоту предикатов из множества $\Lambda(A, B)$ для слабо центрального клона A . Имеет место

Теорема 4.4. Пусть A и B — c -слабо-центральные клоны, такие, что $A \subseteq B$. Тогда клоны $B \cap \text{pol}_L(q)$, $q \in \Lambda(A, B)$, составляют безызбыточную A -критериальную систему для клона B . Для любых предикатов p и q из множества $\Lambda(A, B)$ равенство клонов $B \cap \text{pol}_L(p) = B \cap \text{pol}_L(q)$ равносильно перестановочной эквивалентности предикатов p и q .

Важное семейство составляют слабо центральные клоны, описываемые наследственными системами множеств.

Пусть $\tilde{\varepsilon}$ — система подмножеств множества L , обладающая свойствами

(1) (свойство наследственности) если некоторое множество принадлежит системе $\tilde{\varepsilon}$, то и всякая его часть принадлежит $\tilde{\varepsilon}$;

(2) (свойство слабой центральности для c) если множество H принадлежит системе $\tilde{\varepsilon}$, то множество $H \cup \{c\}$ также принадлежит ей.

Говорят, что функция f из P_L , зависящая от n переменных, сохраняет систему $\tilde{\varepsilon}$, если для любого натурального m , любых наборов X_1, \dots, X_n из L^m и набора $X_0 = f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$ (значений функции f , вычисленных от строк матрицы (X_1^T, \dots, X_n^T)), множество \tilde{X}_0 принадлежит системе $\tilde{\varepsilon}$ всякий раз, когда множества $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ принадлежат ей. (Здесь для произвольного набора $A = (A_1, \dots, A_m)$ через \tilde{A} обозначается множество $\{A_1, \dots, A_m\}$.) Функции из P_L , сохраняющие систему $\tilde{\varepsilon}$, составляют c -слабо-центральный клон, обозначаемый через $Q_L(\tilde{\varepsilon})$.

Функцию f назовём слабо существенной, если для некоторого i , $1 \leq i \leq n$, для любого натурального m и любых наборов X_0, \dots, X_n из L^m , таких, что $X_0 = f^{[m]}(X_1, \dots, X_n)$ множество \tilde{X}_0 принадлежит системе $\tilde{\varepsilon}$ всякий раз, когда множество \tilde{X}_i принадлежит ей. Слабо существенные функции из P_L составляют c -слабо-центральный клон, включённый в $Q_L(\tilde{\varepsilon})$ и обозначаемый через $\Phi_L(\tilde{\varepsilon})$.

Клоны $Q_L(\tilde{\varepsilon})$ и $\Phi_L(\tilde{\varepsilon})$ представляют интерес благодаря своим приложениям. В том числе они совпадают с клонами Q_L квазимонотонных и Φ_L слабо существенных квазимонотонных функций на полурешётке L , если в качестве системы $\tilde{\varepsilon}$ взять систему всех подмножеств с нижней гранью в полурешётке L . Кроме того, показано, что (предполный по теореме Розенберга) клон функций из P_L , описываемый отличным от диагонали центральным, вполне рефлексивным и симметричным предикатом, совпадает с клоном $Q_L(\tilde{\varepsilon})$ для некоторой системы $\tilde{\varepsilon}$. Имея ввиду указанные приложения клонов $Q_L(\tilde{\varepsilon})$ и $\Phi_L(\tilde{\varepsilon})$, далее будем использовать для них соответствующие обозначения Q_L и Φ_L ; вместо $q(\tilde{\varepsilon})$ будем писать $q(L)$.

Далее решена проблема Φ_L -полноты в клоне Q_L .

Для набора $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из L^m обозначим через $U(Y)$ систему всех таких подмножеств $u \subseteq \{1, \dots, m\}$, что множество $\{Y_i | i \in u\}$ не принадлежит системе

$\tilde{\varepsilon}$; через $U_0(Y)$ обозначим систему минимальных по включению подмножеств из $U(Y)$; определим m -местный предикат ρ_Y как $\rho_Y(X) \equiv U(X) \subset U(Y)$.

Будем называть j -ю компоненту Y_j набора Y *несущественной*, если для любого подмножества $u \subseteq \{1, \dots, m\}$ выполняется равносильность

$$u \cup \{j\} \in U(Y) \Leftrightarrow u \in U(Y).$$

Будем называть *подобными* i -ю и j -ю компоненты Y_i и Y_j набора Y , если для любого подмножества $u \subseteq \{1, \dots, m\}$ выполняется равносильность

$$u \cup \{i\} \in U(Y) \Leftrightarrow u \cup \{j\} \in U(Y).$$

Будем называть их различными подобными компонентами при $i \neq j$.

Обозначим через Υ_L множество всех таких наборов Y из L^m (при произвольных натуральных m), что выполняются условия:

- (1) $|U_0(Y)| > 1$;
- (2) набор Y не содержит несущественной компоненты;
- (3) если в наборе Y имеются различные подобные компоненты и набор Y' получен из набора Y удалением любой из них, то $|U_0(Y')| = 1$.

Критерий Φ_L -полноты в клоне Q_L даёт

Теорема 4.5. *Клоны $Q_L \cap \text{pol}_L(\rho_Y)$, где $Y \in \Upsilon_L$, составляют безызбыточную Φ_L -критериальную систему для клона Q_L .*

Для наборов $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ и $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ из Υ_L равенство

$$Q_L \cap \text{pol}_L(\rho_Y) = Q_L \cap \text{pol}_L(\rho_Z)$$

имеет место тогда и только тогда, когда $n = m$ и для некоторой подстановки α на множестве чисел $1, \dots, n$ верно, что $U(Y) = U(Z_\alpha)$, где $Z_\alpha = (Z_{\alpha(1)}, \dots, Z_{\alpha(n)})$.

Далее получены мощностные оценки построенной безызбыточной Φ_L -критериальной системы в классе Q_L квазимонотонных функций на полурешётке $L = \tilde{E}_k$ (в индексах обозначаемой через \tilde{k}).

Теорема 4.6. *При $k \geq 2$ имеют место неравенства:*

$$\frac{2^{2^k}}{4k!} - \frac{(2^{2^k})^{3/4}}{4(k-2)!} \leq |\mathcal{S}(\Phi_{\tilde{k}}, Q_{\tilde{k}})| \leq \frac{2^{2^k}}{4k!} + \frac{(2^{2^k})^{3/4}}{4}.$$

В частности, при $k \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическое соотношение

$$|\mathcal{S}(\Phi_{\tilde{k}}, Q_{\tilde{k}})| \sim \frac{2^{2^k}}{4k!}.$$

Результаты четвёртой главы опубликованы в следующих работах автора. Теоремы 4.1 – 4.3 получены в [9], теоремы 4.4 и 4.5 — в [11], теорема 4.6 — в [5] на основании более раннего результата [2]. Предварительные результаты получены в [13, 14, 15, 17].

Пятая глава называется «Проблемы полноты для трёхзначных квазимонотонных функций». В ней рассматриваются функции из $P_{\tilde{2}}$ (здесь и далее в индексах вместо \tilde{E}_2 пишем $\tilde{2}$) на трёхэлементной полурешётке $\tilde{E}_2 = \{0, 1, \top\}$, решаются проблемы выразимости множества $\min T_{\tilde{2}}$ в классе $M_{\tilde{2}}$, проблемы полноты в классах $M_{\tilde{2}}$ и $Q_{\tilde{2}}$.

Через A и B обозначаются классы $\text{pol}_{\tilde{2}} \alpha$ и $\text{pol}_{\tilde{2}} \beta$ функций из $P_{\tilde{2}}$, сохраняющих соответствующие предикаты

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) \equiv [\varepsilon^{(2)}(x_1, x_2) \vee \varepsilon^{(2)}(x_1, x_3)] \wedge \varepsilon^{(2)}(x_2, x_3) \text{ и } \beta(x_1, x_1) \equiv (x_1, x_2) \neq (0, 1).$$

Через $C_{0,\top}$, $C_{1,\top}$ и C_{\top} обозначаются классы $\text{pol}_{\tilde{2}}(\{0, \top\})$, $\text{pol}_{\tilde{2}}(\{1, \top\})$ и $\text{pol}_{\tilde{2}}(\{\top\})$. Критерий выразимости множества $\min T_{\tilde{2}}$ в классе $M_{\tilde{2}}$ даёт

Теорема 5.1. *Для произвольного множества F функций из $M_{\tilde{2}}$ тогда и только тогда имеет место включение $[F] \supseteq \min T_{\tilde{2}}$, когда множество F не включено ни в один из классов $A, B, C_{0,\top}, C_{1,\top}$ и C_{\top} .*

Через $C_{0,1}$ обозначается класс $\text{pol}_{\tilde{2}}(\{0, 1\})$ функций из $P_{\tilde{2}}$, сохраняющих унарный предикат $\{0, 1\}$. Критерий полноты в классе $M_{\tilde{2}}$ даёт

Теорема 5.2. *Произвольное множество функций из класса $M_{\tilde{2}}$ тогда и только тогда является полным в нём, когда оно не включено ни в один из классов $A, B, C_{0,\top}, C_{1,\top}, C_{\top}$ и $C_{0,1}$. Пересечения указанных классов с классом $M_{\tilde{2}}$ образуют шесть предполных в $M_{\tilde{2}}$ классов.*

Напомним, что в замкнутом классе K функций из P_L предполный класс, содержащий все одноместные функции из $K^{(1)}$, называется *классом Слупецкого*.

Критерий $Q_{\tilde{2}}^{(1)}$ -полноты в классе $Q_{\tilde{2}}$ даёт

Теорема 5.3. *Пусть $F \subseteq Q_{\tilde{2}}$. Система $F \cup Q_{\tilde{2}}^{(1)}$ тогда и только тогда полна в классе $Q_{\tilde{2}}$, когда она не включена в класс A . В частности, единственным классом Слупецкого в классе $Q_{\tilde{2}}$ является класс $Q_{\tilde{2}} \cap A$.*

Критерий полноты в классе $Q_{\tilde{2}}$ даёт

Теорема 5.4. *Произвольное множество квазимонотонных функций из класса $Q_{\tilde{2}}$ тогда и только тогда является полным в нём, когда оно не включено ни в один из классов $A, B, C_{0,\top}, C_{1,\top}, C_{\top}, C_{0,1}$ и $M_{\tilde{2}}$. Пересечения указанных классов с классом $Q_{\tilde{2}}$ образуют семь предполных в $Q_{\tilde{2}}$ классов.*

Теоремы 5.1 – 5.2 доказаны конструктивными методами, которые можно использовать в алгоритмах синтеза квазимонотонных, монотонных или минимальных точечных функций в произвольных базисах.

Результаты пятой главы получены в [3] на основе [16].

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В диссертации развивается математический аппарат для решения в пространствах дискретных функций проблем полноты и выразимости, эффективного описания и конечной порождаемости замкнутых классов, эффективного представления функций. Указанные проблемы решены в ряде новых случаев, представляющих интерес для синтеза дискретных управляющих систем различного вида, в том числе устойчивых к состязаниям. Перечислим основные результаты.

Установлены необходимые и достаточные условия существования конечных нижних окрестностей у произвольных или заданных конечно порождаемых классов произвольного пространства (теоремы 1.1 и 1.2) и пространства с замыканием Галуа (теоремы 1.5, 1.6).

Введены в рассмотрение сильно предупорядоченные пространства. Установлено существование в финитарных таких пространствах конечных нижних окрестностей у конечно порождаемых классов и конечных запрещающих множеств у классов с конечными верхними окрестностями (теоремы 1.3 и 1.4).

Установлена сильная предупорядоченность относительно подстановки переменных ряда функциональных пространств (следствия 1.4 – 1.6), в том числе пространства переключательных функций с S -замыканием.

Построена теория Галуа (теоремы 1.7 и 1.8) для пространств переключательных функций с S -замыканием, описывающая его как замыкание Галуа. Таким образом найдено единое обобщение ряда различных теорий Галуа, содержащее их в качестве частных случаев и имеющее собственные приложения в теории переключательных схем.

Перечисленные результаты содержат в качестве частных случаев ряд известных утверждений о клонах и некоторые не известные ранее их аналоги для S -замкнутых классов. Последнее обстоятельство предоставляет возможность, ранее затруднённую, решения проблем полноты и выразимости в пространствах дискретных функций, вычисляемых переключательными схемами.

В связи с проблемой конечной порождаемости выделено новое семейство конечно порождаемых клонов — содержащих конечно порождаемый d - или произвольный (c, d) -подклон при натуральном c (теоремы 2.2 – 2.4). Клоны с (c, d) -под-

клонами охарактеризованы свойствами инвариантных предикатов (теорема 2.5). Установлена возможность (c, r) -разложений клона над (c, d) -подклоном, известная ранее лишь в случае $c = 0$.

Найдены предикатные и-описания клонов квазимонотонных и слабо существенных квазимонотонных функций, монотонных частей этих клонов (теоремы 3.1, 3.2).

В связи с задачей выделения замкнутых классов в множествах точечных и минимальных точечных функций доказано, что в каждом из указанных двух множеств всякий замкнутый класс расширяется до некоторого максимального из конечного множества (теорема 3.5, следствие 3.4). Построены примеры максимальных таких клонов (следствие 3.7).

Явно описаны классы троичных функций, вычисляемых дизъюнктивными формами (теоремы 3.6 – 3.8 и следствия 3.8 – 3.9) и произвольными формулами в каноническом базисе (следствие 3.10). Конструктивно доказано, что класс минимальных точечных функций на дистрибутивной точечной полурешётке порождается двухместными функциями (теоремы 3.9 и 3.10).

Предложена конструкция критериальной системы, конечной для конечно порождаемого клона (теорема 4.1). Установлены необходимые и достаточные условия максимальной произвольных и слабо центральных подклонов, заданных расширенными и-описаниями (теоремы 4.2, 4.3, 4.4). На основе этого построена безызбыточная критериальная система в слабо центральном клоне, описываемом наследственной системой множеств, при суперпозиции со всеми его слабо существенными функциями (теорема 4.5). В частности, решена проблема полноты при суперпозиции со слабо существенными функциями в клонах квазимонотонных функций на полурешётке. В случае полурешётки всех непустых подмножеств k -элементного множества найдены асимптотически совпадающие верхние и нижние мощностные оценки построенной критериальной системы (теорема 4.6).

Для функций на трёхэлементной полурешётке найдены: безызбыточная нижняя окрестность множества минимальных точечных функций в клоне монотонных функций (теорема 5.1), безызбыточные критериальные системы в клонах монотонных (теорема 5.2) и квазимонотонных (теорема 5.4) функций.

Исследованный случай трёхэлементной полурешётки представляет особый интерес, так как функциями на ней описываются динамические состояния дискретных управляющих систем с двоичными статическими состояниями. А постановки рассматриваемых проблем полноты и выразимости возникают в силу полурешёточной модели на различных этапах проектирования таких систем.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] Парватов Н.Г. К синтезу формул, реализующих и представляющих квазимонотонные и монотонные функции на полурешётках подмножеств конечного множества // Вестник Томского государственного университета. 2000. В. 271. С. 111–115.
- [2] Агибалов Г.П., Парватов Н.Г. О полноте систем монотонных функций для реализации квазимонотонных функций на конечных полурешётках // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2002. Т. 9. № 4. С. 5–22.
- [3] Парватов Н.Г. Функциональная полнота в замкнутых классах квазимонотонных и монотонных трёхзначных функций на полурешётке // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2003. Т. 10. № 1. С. 61–78.
- [4] Парватов Н.Г. Замечания о конечной порождаемости замкнутых классов многозначных функций // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 1. 2004. Т. 11. № 3. С. 32–47.
- [5] Парватов Н.Г. Теорема о функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешётке // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 1. 2006. Т. 13. № 3. С. 62–82.
- [6] Парватов Н.Г. Наследственные системы дискретных функций // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. 2007. Т. 14. № 2. С. 76–91.
- [7] Парватов Н.Г. Клоны с мажоритарной функцией и их обобщения // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. № 3. С. 46–60.
- [8] Парватов Н.Г. Проблемы выразимости в решётке с замыканием // Дискретная математика. 2010. Т. 22. В. 4. С. 83–103.
- [9] Парватов Н.Г. О выделении максимальных подклонов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 1. С. 14–25.
- [10] Парватов Н.Г. Проблема нижних окрестностей в пространствах с замыканием и теорема о финитарности // Известия высших учебных заведений. Математика. 2011. № 2. С. 65–70.
- [11] Парватов Н.Г. О нахождении максимальных подклонов слабо центрального клона // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. № 5. С. 80 – 97.
- [12] Парватов Н.Г. Конструкция максимального клона точечных функций на полурешётке интервалов // Прикладная дискретная математика. 2011. № 4. С. 5–10.

- [13] Парватов Н.Г. О полноте систем монотонных функций для реализации квазимонотонных функций на конечных полурешётках // Новые информационные технологии в исследовании дискретных структур. Доклады третьей Всероссийской конференции с международным участием. (Томск, 2000 год) Научное издание. Томск: ТНЦ СО РАН, «Спектр», 2000. С. 70–74.
- [14] Парватов Н.Г. О полноте в классе квазимонотонных функций на конечных полурешётках // Материалы VII Международного семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 2001 г.). Часть I. М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2001. С. 114–117.
- [15] Парватов Н.Г. К синтезу комбинационных схем с заданным динамическим поведением из элементов произвольной функционально полной системы // Автоматизация проектирования дискретных систем. Материалы 4-й международной конференции (Минск, 2001 год). Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 2001. Т.2. С. 74–77.
- [16] Парватов Н. Г. Функциональная полнота в классах квазимонотонных и монотонных функций на трехэлементной полурешетке // Материалы XIII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Часть I, II. М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2002. С. 143–144.
- [17] Парватов Н.Г. О функциональной полноте в классе квазимонотонных функций на конечной полурешётке // Материалы XV Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Новосибирск, 18-23 октября 2004 г.). Под редакцией О. Б. Лупанова. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2004. С. 65–67.
- [18] Парватов Н.Г. О формах представления монотонных и квазимонотонных функций на трёхэлементной полурешётке // Материалы IX Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», посвящённого 75-летию со дня рождения О. Б. Лупанова (Москва, 18–23 июня 2007 г.). Под редакцией О. М. Касим-Заде. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2007. С. 170–173.
- [19] Парватов Н.Г. Проблема выразимости в полной решётке с замыканием // Материалы XVII Международной школы-семинара «Синтез и сложность управляющих систем» (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008 г.). Под редакцией О. Б. Лупанова. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2008. С. 127–130.
- [20] Парватов Н.Г. О некоторых свойствах операции замыкания, связанных с проблемами выразимости // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2008. № 3. С. 119–124.

- [21] Парватов Н.Г. Проблемы полноты и выразимости дискретных функций // Прикладная дискретная математика. 2009. № 2. С. 56–78.
- [22] Парватов Н.Г. Нижние и верхние окрестности в множестве с замыканием // Прикладная дискретная математика. 2009. № 3. С. 5–14.
- [23] Парватов Н.Г. Об инвариантах некоторых классов квазимонотонных функций на полурешётке // Прикладная дискретная математика. 2009. № 4. С. 21–28.
- [24] Парватов Н.Г. Соответствие Галуа для замкнутых классов дискретных функций // Прикладная дискретная математика. 2010. № 2. С. 10–16.
- [25] Парватов Н.Г. Точечные и сильно точечные функции на полурешётке // Прикладная дискретная математика. 2010. № 3. С. 22–40.