На правах рукописи

Папин Александр Алексеевич

КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО - КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Красноярск

2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений ГОУ ВПО "Алтайский государственный университет" (г. Барнаул).

Научный консультант – $\boxed{\text{Академик РАН, профессор Монахов Валентин Николаевич}}$

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Андреев Виктор Константинович;

доктор физико-математических наук,
профессор Кучер Николай Алексеевич;

доктор физико-математических наук,
профессор Селезнев Вадим Александрович.

Ведущая организация:

Учреждение Российской академии наук Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук.

Защита диссертации состоится "____" ________ 2010 г. в _____ на заседании диссертационного совета ДМ 212.099.18 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660074, Красноярск, ул. Киренского, 26, ИКИТ СФУ, ауд. 115 (УЛК).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "____" _______ 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
к.ф.-м.н., доцент К.А. Кириллов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Актуальность теоретического исследования моделей механики многофазных сред обусловлена их широким применением к решению важных практических задач: поведение зерновой и угольной пыли, газированной нефти, капель и аэрозолей; горение топлива; образование кокса, сажи и дыма; движение суспензий и пузырьков в жидкостях; движение жидкостей и газов в пористых средах; процессы растворения и осаждения. Систематическому рассмотрению динамики многофазных сред посвящены монографии Р. И. Нигматулина (1987), Э. Орана (E. S. Oran) и Дж. Бориса (J. P. Boris) (1990), K. L. Rajagopal и L. Tao (1995), В. Н. Николаевского (1996). Система уравнений многофазного течения выводится из законов сохранения массы, импульса и энергии сплошной среды и, как правило, является недоопределенной. Для ее замыкания необходимо конкретизировать величины, описывающие внутрифазные и межфазные массовые, силовые и энергетические взаимодействия. Примерами такой конкретизации служат работы Н. Е. Жуковского, связанные с выводом уравнений фильтрации; Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица по гидродинамике жидкого гелия; С. С. Кутателадзе, М. А. Стыриковича, М. Е. Дейча и Г. А. Филиппова по газожидкостным системам; Н. Н. Яненко, Р. И. Солоухина по сверхзвуковым двухфазным течениям; Я. И. Френкеля, В. Н. Николаевского по деформированию водонасыщенных грунтов; В. Н. Доровского по моделям континуальной теории фильтрации, не использующим закон Дарси; С. К. Годунова по термодинамически согласованным моделям многофазных сред; K. Wilmanski по моделированию процессов сорбции в деформируемой пористой среде.

Во всех этих задачах имеются отличительные характеристики, которые делают невозможным единый подход к многофазному моделированию. Поэтому в настоящее время существует много различных моделей многофазных смесей. Все они являются весьма сложными как с теоретической точки зрения, так и в отношении их использования для решения конкретных задач.

Одна из таких моделей – модель фильтрации двух жидкостей в пористой среде возникла, в первую очередь, в связи с применением метода вытеснения нефти из пласта с помощью закачивания воды (газа) или специальных растворов. М. Маскет (M. Muskat, 1937) предложил обобщить закон Дарси на случай двух несмешивающихся жидкостей. В 1941 году М. Левереттом

(M. Leverett) было предложено учитывать скачок давлений на границе раздела жидкостей в виде некоторой функции капиллярного давления, зависящей от насыщенности порового пространства одной из жидкостей (формула Лапласа). Полученную математическую модель фильтрации многофазных жидкостей принято называть моделью Маскета –Леверетта. Интенсивные исследования задач фильтрации несмешивающихся жидкостей начались в 50-х годах и продолжаются до настоящего времени. Разработке физических основ и математическому моделированию процессов совместного движения жидкостей в пористой среде, а также исследованию математической корректности и разработке алгоритмов численного решения разнообразных задач двухфазной фильтрации посвящены работы С. Н. Антонцева, Г. И. Баренблатта, К. С. Басниева, Э. А. Бондаренко, В. В. Ведерникова, В. Л. Данилова, В .М. Ентова, Ю. П. Желтова, А. Ф. Зазовского, А. Н. Коновалова, В. Н. Монахова, В. Н. Николаевского, С. А. Христиановича, И. А. Чарного, М. И. Швидлера и др.

Исследование вопросов корректности модели Маскета-Леверетта было начато в работах С. Н. Антонцева, В. Н. Монахова и А. Н. Коновалова. Следует отметить, что с помощью специального выбора искомых функций уравнения модели Маскета–Леверетта преобразуются к квазилинейной системе составного типа, включающей одно равномерно эллиптическое уравнение и одно вырождающееся параболическое. Предварительный анализ линейной модели был проведен А. Н. Коноваловым. Г. В. Алексеев и Н. В. Хуснутдинова рассмотрели одномерную задачу, которая приводится к одному вырождающемуся параболическому уравнению (теория глобальных слабых решений вырождающихся параболических уравнений построена в работах О. А. Олейник, А. С. Калашникова, С. Н. Кружкова, Е. С. Сабининой, Ю. А. Дубинского, А. В. Иванова, H. W. Alt, E. Di Benedetto, Z. Chen и др.). В работах С. Н. Антонцева, В. Н. Монахова было доказано существование обобщенного решения в трехмерном нестационарном и стационарном случаях, а также установлен обобщенный принцип максимума, позволивший априори классифицировать все задачи на вырождающиеся и регулярные. Позднее были изучены дифференциальные свойства обобщенного решения двумерной регулярной задачи. Исследованию двумерной регулярной задачи в случае однородного грунта также посвящены работы С. Н. Кружкова и С. М. Сукорянского, в которых доказаны теоремы существования и устойчивости классического решения, обоснован приближенный метод решения плоской регулярной задачи и дана оценка его скорости сходимости.

Следует отметить, что если в двумерном регулярном случае результаты о разрешимости основных краевых задач имели вполне завершенный характер, а именно, было показано, что дальнейшая гладкость нестационарных и стационарных решений определяется гладкостью коэффициентов системы и гладкостью границы и граничных условий, то в трехмерном регулярном случае аналогичная ситуация имела место лишь в "малом" по времени, либо при всех конечных t, но при условии малости некоторых функциональных параметров системы. Позднее, в работах С. Н. Антонцева и автора был предложен способ, позволивший исследовать дифференциальные свойства обобщенного решения трехмерной задачи без предположений о малости.

Модели тепловой многофазной фильтрации используются при исследовании процессов тепломассопереноса в промерзающих и протаивающих грунтах (В. И. Васильев, А. М. Максимов, Е. Е. Петров, Г. Г. Цыпкин), при оценке вклада снежного покрова в формирование стока на речном водосборе (E. A. Anderson, Л. С. Кучмент, В. Н. Демидов, Ю. Г. Мотовилов), при распространении загрязнений в тающем снеге (A.C. Fowler). Особенностью этих моделей является обязательный учет фазовых переходов. Систематического исследования корректности задач тепловой многофазной фильтрации с учетом фазовых переходом еще не проводилось. Рассматриваемая в главе 3 настоящей диссертации задача тепломассопереноса в тающем снеге актуальна в связи с оценкой водного стока на водосборе, а также при оценке переноса загрязняющих веществ.

После работы Л. Д. Ландау и Е. М. Лившица по гидродинамике жидкого гелия активизировались работы по созданию моделей, точнее учитывающих неоднородный характер состава реальных сред (в том числе – моделей фильтрации, не использующих эмпирический закон Дарси).

В диссертации рассматривается модель неизотермического движения двухфазной смеси в отсутствие фазовых переходов и с учетом скачка давлений (Х. А. Рахматулин, Р. И. Нигматулин, В. Н. Николаевский), являющаяся обобщением модели фильтрации Маскета-Леверетта двух вязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей. Вопрос о корректности начально-краевых задач о движении для таких моделей двухфазных смесей жидкостей (газов) исследован в значительно меньшей степени по сравнению с моделью Маскета-Леверетта или моделью вязкого газа. Это связано с существенным усложнением объекта исследования (модель усложняется, в частности, введением концентрации фазы, связывающей истинную и так называемую приведенную плотности). Однако имеется ряд моделей многофазных сред, для которых установлены результаты о разрешимости. Это модели многокомпонентной баротропной смеси (аналог многокомпонентного вязкого газа, понятие концентрации фазы не используется). В работах А. В. Кажихова, А. Н. Петрова, Г. Г. Доронина, Н. А. Ларькина, А. Н. Крайко для этих моделей исследована разрешимость начально-краевых задач и задачи Коши. В работах О. В. Воинова, В. В. Пухначева и А. Г. Петровой получены результаты о локальной разрешимости для уравнений движения эмульсии в поле микроускорений и термокапиллярных сил.

Диссертация посвящена математическому исследованию проблемы разрешимости начально - краевых задач для систем уравнений движений двухфазных жидкостей (газов).

Методы исследования.

При выводе результатов работы используются идеи и методы теории функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и рекомендаций достигается: использованием общих методов решения эволюционных краевых задач, изложенных, например, в монографиях О. А. Ладыженской, Ж. - Л. Лионса, С. Н. Антонцева, А. В. Кажихова, В. Н. Монахова; при доказательстве теорем существования основные усилия сосредоточены на получении априорных оценок, на основе которых с помощью известных теорем из анализа (метод последовательных приближений, принцип Банаха для сжимающих отображений или принцип Шаудера для вполне непрерывных операторов) либо методом Бубнова-Галеркина показывается разрешимость задач; формулировка результатов работы в виде математических теорем, которые сопровождаются строгими доказательствами.

Цель работы. Математическое исследование проблемы о разрешимости начально - краевых задач для систем уравнений двухфазных смесей жидкостей (газов) в различных функциональных пространствах.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются оригинальными как в теоретическом, так и в практическом аспектах. Впервые доказаны теоремы существования сильных и классических решений "в целом" по времени и входным данным для регулярных уравнений многомерной фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей (модель Маскета – Леверетта). Рассмотрены приближенные методы решения задач фильтрации и даны оценки скорости их сходимости. В рамках модели Маскета – Леверетта исследована автомодельная задача с фазовым переходом.

Впервые предпринято систематическое изучение уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси в отсутствие фазовых переходов и с учетом скачка давлений. Проведен анализ разрешимости начально – краевых задач и доказаны теоремы существования решений в различных функциональных пространствах.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Теоретическая и практическая ценность работы заключается в том, что:

— доказана глобальная разрешимость пространственной нестационарной регулярной задачи двухфазной изотермической фильтрации (модель Маскета - Леверетта) в классах С.Л. Соболева и Гельдера; рассмотрены приближенные методы решения нестационарной регулярной задачи изотермической двухфазной фильтрации и установлены оценки скорости их сходимости;

— доказана устойчивость и единственность решений пространственной нестационарной вырождающейся задачи двухфазной изотермической фильтрации; рассмотрен приближенный метод решения нестационарной вырождающейся задачи изотермической двухфазной фильтрации и дана оценка скорости его сходимости;

— доказано существование автомодельного решения задачи о движении консервативной примеси в тающем снеге; установлено, что решение обладает свойством конечной скорости распространения возмущений;

— доказана локальная по времени однозначная разрешимость в классе сильных и классических решений задачи о нестационарном неизотермическом одномерном движении двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей; доказана разрешимость "в малом" по начальным данным задачи о нестационарном изотермическом одномерном движении двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей; рассмотрен пример о разрешимости "в целом";

— доказана разрешимость в классе обобщенных решений задачи о нестационарном неизотермическом одномерном движении двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей;

— доказана локальная по времени теорема существования классического решения нестационарной неизотермической одномерной задачи о движении смеси твердых частиц и сжимаемого идеального газа; в случае постоянной температуры среды доказана разрешимость в классе сильных решений "в целом";

— полученные в диссертации результаты носят теоретический характер, они могут служить обоснованием численных методов решения начально - краевых задач для уравнений движения двухфазных смесей.

Апробация работы. Результаты по теме диссертации были доложены на:

- Всесоюзной школе-семинаре по качественной теории дифференциальных уравнений гидродинамики (Кемерово, 1986; Барнаул, 1989);
- сибирской конференции по неклассическим уравнениям математической физики (Новосибирск, 1995);
- сибирской школе - семинаре "Математические проблемы механики сплошных сред"(Новосибирск, 1997);
- сибирском конгрессе "ИНПРИМ-98", (Новосибирск, 1998);
- Всероссийской конференции "Математические методы в механике природных сред и экологии" (Барнаул, 2002);
- Всероссийской конференции "Задачи со свободными границами; теория, эксперимент, приложения" (Бийск, 2005, 2008);
- международной конференции "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященной 100-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа (Новосибирск, 2007);
- международной конференции "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященной 100-летию со дня рождения академика С. Л. Соболева (Новосибирск, 2008);
- Всероссийской конференции "Математика в приложениях", приуроченной к 80-летию академика С. К. Годунова (Новосибирск, 2009);
- Всероссийской конференции "Успехи механики сплошных сред", приуроченной к 70-летию академика В. А. Левина (Владивосток, 2009);

– региональных конференциях “Математика Алтайского края” (Барнаул, 1998 – 2010);

– семинаре Белгородского госуниверситета (Белгород, 2009) под руководством профессора А. М. Мейрманова;

– семинаре ИВМ СО РАН (Красноярск, 2010) под руководством профессора В. К. Андреева;

– семинаре ИГ СО РАН (Новосибирск, 20010) под руководством профессора В. В. Шелухина;

– семинаре Кемеровского госуниверситета (Кемерово, 2010) под руководством профессора Н. А. Кучера.

Публикации. Основные результаты диссертации получены автором и опубликованы в 22 работах. Из них 10 работ – в журналах из списка изданий, рекомендованных ВАК для опубликования основных результатов докторских диссертаций. В главу 2 вошли результаты, полученные в соавторстве с С. Н. Антонцевым. Из содержимого остальных совместных публикаций в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие автору.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разделенных на 23 параграфа, приложения, заключения и списка литературы. Объем работы – 255 страниц, библиография - 304 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертации, дается обзор современного состояния изучаемых проблем и приводится краткое изложение диссертации.

В **главе 1** приводятся некоторые известные сведения из теории функций, функционального анализа и дифференциальных уравнений, которые используются в процессе исследований.

Глава 2 посвящена исследованию корректности начально-краевых задач для трехмерных уравнений фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей (плотности ρ_1^0, ρ_2^0 постоянны) при постоянной температуре в потоке и в отсутствие фазовых переходов (модель Маскета-Леверетта).

В основе математической модели лежат уравнения сохранения массы каждой фазы

$$\frac{\partial \overline{m}\rho_i^0 s_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i^0 \vec{v}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad 0 < s_i^0 \leq s_i \leq 1 - s_j^0 < 1, \quad i \neq j, \tag{2}$$

и обобщенный закон Дарси

$$\vec{v}_i = -K_0 \frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i} (\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь p_i, $\vec{v}_i$, s_i – соответственно искомые давления, скорости фильтрации (связанные со скоростями $\vec{u}_i$ движения частиц жидкостей формулой $\vec{v}_i = \overline{m} s_i \vec{u}_i$) и насыщенности в каждой фазе; $\overline{m}$ – пористость, K_0 – тензор фильтрации, $\overline{k_{0i}}$ – относительные фазовые проницаемости, μ_i – коэффициенты динамической вязкости, s_i^0 – значения остаточных насыщенностей, при достижении которых движение фазы прекращается ($\overline{k_{0i}}(s_i^0) = 0$). Фазовые давления p_i различаются на величину капиллярного скачка $p_c(x, s_1)$, являющегося убывающей функцией s_1

$$p_2 - p_1 = p_c(x, s_1), \quad \frac{\partial p_c}{\partial s_1} < 0. \tag{4}$$

Известны различные постановки задачи о фильтрации двухфазной жидкости. Дугласом, Писменом и Рэкфордом в качестве искомых брались потенциалы $\Phi_i = p_i + \rho_i g h$, ($\vec{g} = g \nabla h$). Теми же авторами использовались переменные $P = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$ и $R = (\Phi_1 - \Phi_2)/2$. В плоском случае А. Н. Коновалову принадлежит постановка задачи в переменных s_1 и ψ (ψ – функция тока суммарного течения). Наиболее эффективным при качественном исследовании системы (1) – (4) оказалось использование С. Н. Антонцевым и В. Н. Монаховым в качестве искомых функций насыщенности s и “приведенного” давления p:

$$s = (s_1 - s_1^0)\lambda, \quad \lambda = (1 - s_1^0 - s_2^0)^{-1}, \quad s \in [0, 1],$$

$$p = p_1 + \int_s^1 \frac{\partial p_c}{\partial \xi} \frac{k_{02}}{(k_{01} + k_{02})} d\xi + \rho_1^0 g h.$$

При такой замене система (1) – (4) сводится к следующей эквивалентной системе для s и p:

$$m \frac{\partial s}{\partial t} = div(K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + \vec{f}_0) \equiv -div \vec{v}_1(s, p), \tag{5}$$

$$div(K\nabla p+\vec{f})\equiv -div\vec{v}=0. \qquad (6)$$

Коэффициенты последней выражаются через функциональные параметры исходной системы, причем

$$m=\overline{m}\lambda>0, \quad a=-\frac{\partial p_c}{\partial s}\frac{k_{01}k_{02}}{k}, \quad K=K_0k, \quad k=k_{01}+k_{02}, \quad k_{0i}=\frac{\overline{k_{0i}}}{\mu_i}.$$

Тензор фильтрации $K_0(x)$ предполагается симметричным и положительно определенным. Фазовые проницаемости k_{0i} неотрицательны и их сумма k положительна.Поэтому $a(x,s)>0$ при $s\in(0,1)$ и $a(x,0)=a(x,1)=0$, т.е. система (5), (6) состоит из равномерно эллиптического уравнения для p и вырождающегося при $s=0$ и $s=1$ параболического уравнения для s.

В качестве основной краевой задачи для исследования взята следующая физическая постановка: фильтрация неоднородной жидкости происходит в конечной многосвязной области Ω переменного $x=(x_1,x_2,x_3)$, граница S которой состоит из нескольких достаточно гладких и несвязных компонент, а $(0,T)$ - произвольный конечный интервал изменения времени и $Q_T=\Omega\times(0,T)$, $S_T=S\times(0,T)$. Уравнения (5), (6) дополняются граничными и начальными условиями:

$$p=p_0(x,t), \quad s=s_0(x,t), \quad (x,t)\in S_{2T}, \qquad (7)$$

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=Q(x,t), \quad \vec{v}_1\cdot\vec{n}=b(s)Q(x,t), \quad (x,t)\in S_{1T}, \qquad (8)$$

$$s(x,0)=s_0(x,0), \quad x\in\Omega. \qquad (9)$$

Здесь $S_1\cup S_2=S$, $b(s)=k_{01}k^{-1}$, а $\vec{n}$ – внешняя нормаль к границе S. В том случае, когда $S\equiv S_1$, закон сохранения смеси в области Ω приводит к следующему необходимому условию

$$\int\limits_{\Omega}p(x,t)dx=\int\limits_{S}Q(x,t)d\gamma=0, \quad t\in[0,T]. \qquad (10)$$

Отметим, что в задачах о вытеснении нефти водой, участок S границы S_1 соответствует эксплуатационным и нагнетательным скважинам с известным расходом смеси Q, а также участкам непротекания $S_o\subset S_1$ (т.е. в (8) следует считать, что $Q=0$ на S_0). Участок S_2 отвечает заданным границам с неоднородной неподвижной жидкостью (например, с воздухом на кровле нефтяного пласта или с грунтовыми водами на его подошве).

В случае, если $0 < s(x,t) < 1$ и, следовательно, $a(x,s) > 0$, задача (5) – (10) называется регулярной. Если же $s(x,t)$ может достигать значений $s = 0, s = 1$, то задача называется вырождающейся (эти свойства обеспечиваются принципом максимума, установленным в ранних работах С. Н. Антонцева и В. Н. Монахова).

Основным результатом главы 2 является доказательство существования сильного и классического решений и обоснование приближенных методов решения регулярной задачи. В случае вырождения для обобщенного решения установлена устойчивость по начальным данным, единственность и обоснован приближенный метод решения.

В п. 2.1 дается постановка основной краевой задачи фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей и формулируются используемые в дальнейшем известные результаты для регулярных и вырождающихся задач фильтрации, установленные в работах С. Н. Антонцева и В. Н. Монахова, С. Н. Кружкова и С. М. Сукорянского, а также формулируются основные результаты главы. Теорема 2.1.1 содержит результат С. Н. Антонцева и В. Н. Монахова о существовании обобщенных решений пространственной задачи фильтрации.

В п. 2.2 изучается сформулированная в п. 2.1 задача при заданном распределении насыщенности. Теоремы 2.2.1 и 2.2.2 содержат результаты С. Н. Антонцева и В. Н. Монахова о диффреренциальных свойствах "приведенного" давления $p(x,t)$ и, в частности, свойство гельдеровской непрерывности p по пространственным переменным. Используя непрерывность p, устанавливается справедливость ряда лемм подготовительного характера. Полученные здесь априорные оценки для "приведенного" давления используются в дальнейшем при рассмотрении совместной задачи.

В пункте 2.3 доказано существование сильного решения "в целом" (теорема 2.1.2) , что является обобщением соответствующего результата работы С. Н. Антонцева и В. Н. Монахова, в которой аналогичное решение получено "в малом". Следует также отметить, что предлагаемый способ получения сильного решения, в отличии от работы С. Н. Антонцева и В. Н. Монахова, не использует непрерывность насыщенности.

В п. 2.4 доказывается теорема существования классического решения пространственной регулярной задачи фильтрации и исследуется его дальнейшая гладкость (теоремы 2.1.3, 2.1.4). Основой доказательства этой теоремы является получение оценки постоянной Гельдера насыщенности "в целом" по времени. В двумерном случае эта оценка, ввиду свойств "приведенного" давления, следует из известных результатов для квазилинейных параболических уравнений (см. например, монографию О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова и Н. Н. Уральцевой). В трехмерном же случае непосредственно воспользоваться указанными результатами уже не представляется возможным, ввиду сильной нелинейной связи уравнений. Поэтому предлагается иной способ получения оценки $||s||_{C^\alpha(Q_T)}$, основанный на использовании непрерывности p и совместном рассмотрении уравнений для s и p. Указанный способ позволяет получить оценку $||s||_{C^\alpha(Q_T)}$ при любом числе пространственных переменных, а также для эллиптико-параболических систем более общего вида.

В п. 2.5 доказана теорема существования слабого решения линейной задачи фильтрации (теорема 2.1.5) и показано, что дальнейшая его гладкость определяется лишь гладкостью коэффициентов системы, а также гладкостью границы и граничных условий (теоремы 2.1.6, 2.1.7). На основе этой теоремы рассмотрены два приближенных метода решения пространственных регулярных задач и оценена их скорость сходимости. В каждом из методов на промежуточном шаге решается линейная дифференциальная задача, которая может быть аппроксимирована разностной. Для решений разностных схем также установлены оценки скорости их сходимости к решению исходных нелинейных уравнений (теорема 2.1.8).

В п. 2.6 изучается "слабо" вырождающаяся задача, а именно рассматривается случай, когда априори известно, что коэффициент $a(x, s)$ в параболическом уравнении (5) в начальный момент времени суммируем с некоторой отрицательной степенью $-q$. Тогда оказывается, что при определенных условиях на коэффициенты вырождающегося параболического уравнения при всех конечных $t > 0$ функция $[a(x, t)]^{-1}$ принадлежит $L_q(\Omega)$ (теорема 2.1.9). На основе этой оценки доказываются теоремы об устойчивости по начальным данным и единственность обобщенных решений (теорема 2.1.10), а также устанавливается оценка скорости сходимости решений ε - регуляризованной задачи к обобщенному решению исходной (теорема 2.1.11). Рассмотрен приближенный метод решения вырождающейся задачи и оценена его скорость сходимости (теорема 2.1.12). При получении этих результатов используются полученные автором глобальные априорные оценки старших производных решений вырождающихся квазилинейных параболических уравнений.

В **третьей главе** на основе модели Маскета–Леверетта рассматривается задача о распространении загрязнений в тающем снеге. Снег рассматривается как пористая среда, твердый каркас которой составляют неподвижные частички льда. В процессе таяния в пористой среде происходит совместное движение воды и воздуха, т.е. снег является трехфазной средой, состоящей из воды ($i = 1$), воздуха ($i = 2$) и льда ($i = 3$). Доказана теорема существования автомодельного решения типа простой волны (теорема 3.1.1.). Установлено, что решение обладает свойством конечной скорости распространения возмущений. Важность подобных исследований отмечал профессор В. И. Юдович в работе "Одиннадцать великих проблем математической гидродинамики" – проблема G1: построить математические модели сплошных сред, включающие фазовые переходы (кипящая вода, сегнетоэлектрики, которые могут превращаться в диэлектрики, жидкие кристаллы).

В п. 3.1 дается постановка задачи о движении воды и воздуха в тающем снеге. В основу математической модели положены уравнения сохранения массы для каждой из фаз с учетом фазовых переходов

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + div(\rho_i \vec{u}_i) = \sum_{j=1}^{3} I_{ji}, \quad i = 1, 2, 3, \quad I_{ji} = -I_{ij}, \quad \sum_{i,j=1}^{3} I_{ij} = 0,$$

уравнения двухфазной фильтрации Маскета-Леверетта для воды и воздуха

$$\vec{v}_i = -K_0 \frac{k_{oi}}{\mu_i}(\nabla p_i + \rho_i^0 \vec{g}), \quad i = 1, 2, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \quad \sum_{i=1}^{2} s_i = 1,$$

и уравнение теплового баланса снега (в пренебрежении сублимацией и обменом массами между водой и воздухом):

$$(\sum_{i=1}^{3} \rho_i^0 c_i \alpha_i)\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\sum_{i=1}^{2} \rho_i^0 c_i \vec{v}_i)\nabla\theta = div(\lambda_c \nabla\theta) + \nu\frac{\partial \rho_3^0 \alpha_3}{\partial t}.$$

Здесь I_{ji} – интенсивность перехода массы из j-й в i-ю составляющую в единице объема в единицу времени; $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ($\alpha_1 = ms_1$, $\alpha_2 = ms_2$ $\alpha_3 = 1 - m$); m – пористость снега; s_1, s_2 – насыщенности воды и воздуха; θ – температура среды ($\theta_i = \theta$, $i = 1, 2, 3$); $c_i = const > 0$ – теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; $\nu = const > 0$ – удельная теплота плавления льда; λ_c – теплопроводность снега.

Эта система дополняется гипотезами $\vec{u}_3 = 0$ (частицы льда неподвижны, структура льда как сплошной среды не уточняется), $I_{12} = 0$, $I_{23} = 0$, $I_{31} = I_{31}(\theta)$, $\rho_i^0 = \rho_i^0(\theta)$, $i = 1, 2, 3$.

После определения s_i, θ, p_i и $\vec{v}_i$ можно рассмотреть задачу о движении консервативной примеси, обусловленном переносом водной фазой и диффузией. Этот процесс описывается уравнением конвективной диффузии:

$$S + \frac{\partial}{\partial t}(ms_1\sigma) + div(\sigma\vec{v}_1 - D\nabla\sigma) = 0.$$

Здесь σ – концентрация примеси, $\vec{v}_1$ – скорость фильтрации воды, S – источник, учитывающий возможное отложение (поступление) примеси. Для D и S используются следующие зависимости: $D = \eta + \lambda_0|\vec{v}_1|$, $\eta = const > 0$ – коэффициент молекулярной диффузии, $\lambda_0 = const > 0$ – параметр дисперсии; $S = -\Gamma s_1(\sigma_* - \sigma)$, $\Gamma = const > 0$, $\sigma_* = const \in [0, 1]$.

В п. 3.2 изучается сформулированная в пункте 3.1 задача в автомодельной постановке. Для скоростей фильтрации воды и воздуха получены конечные формулы, для температуры и давлений – представления. Насыщенность воды находится из решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с вырождением на решении. Особенностью исходной постановки задачи является необходимость обоснования для насыщенности воды еще и условия на бесконечности $(s_1(-\infty) = 0)$. Для преодоления этих трудностей используется метод ε - регуляризации и устанавливается свойство конечной скорости распространения возмущений (лемма 3.2.3). Сначала рассматривается вспомогательная задача. При каждом $\varepsilon > 0$ локальная разрешимость задачи Коши следует из теоремы Пикара. В силу доказанного в лемме 3.2.2 физического принципа максимума для насыщенности локальное решение может быть продолжено на любой конечный интервал. Кроме того, имея равномерные по ε оценки, на основе теоремы Арцела можно осуществить предельный переход при $\varepsilon \to 0$. Затем свойства решения задачи для насыщенности уточняются для такого интервала, на котором структура правой части уравнения для насыщенности позволяет установить свойство конечной скорости распространения возмущений (лемма 3.2.3). Последнее позволяет получить результат теоремы 3.1.1.

В п. 3.3 доказано существование автомодельного решения задачи о движении динамически нейтральной примеси в тающем снеге. Установлен физический принцип максимума для концентрации (теорема 3.1.2.).

В четвертой главе для одномерной начально-краевой задачи о движении двухфазной теплопроводной смеси вязких несжимаемых жидкостей доказывается существование и единственность сильного и классического решений "в малом" по времени. В случае постоянной температуры среды устанавливается разрешимость "в малом" по начальным данным и рассматривается пример разрешимости "в целом".

В п. 4.1 даются постановки задач и формулируются основные результаты, а также излагается схема доказательства утверждений.

Модель одномерного неизотермического движения двухфазной смеси несжимаемых фаз в отсутствие фазовых переходов и с учетом скачка давлений имеет вид

$$\frac{\partial(\rho_i^0 s_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i^0 s_i v_i) = 0, \quad i = 1, 2, \tag{11}$$

$$\rho_i^0 s_i \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu_i \; s_i \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) = -s_i \frac{\partial p_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i^0 s_i g, \tag{12}$$

$$s_1 + s_2 = 1, \quad \varphi_1 = K(v_2 - v_1), \quad \varphi_2 = -\varphi_1, \quad p_2 - p_1 = p_c(s_1, \theta), \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{2} c_i \rho_i^0 s_i (\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi \frac{\partial \theta}{\partial x}). \tag{14}$$

Здесь (x, t) – эйлеровы координаты, $x \in \Omega = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $t \in I = \{t \mid 0 < t < T = const > 0\}$; v_i, s_i, p_i – соответственно скорость, объемная концентрация и давление i-й фазы; θ – абсолютная температура среды ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$); g – внешняя сила; постоянные $\rho_i^0 > 0$, $\mu_i > 0$, $c_i > 0$ – соответственно истинная плотность, коэффициент динамической вязкости и теплоемкость i-й фазы при постоянном объеме; коэффициент взаимодействия фаз $K(s_1)$, коэффициент теплопроводности смеси $\chi(s_1)$ и разность давлений $p_c(s_1, \theta)$ – заданные функции. Искомыми являются функции $(s_i(x, t), v_i(x, t), p_i(x, t), \theta(x, t))$.

Следует отметить, что аналогичная система уравнений возникает при моделировании совместного движения несмешивающихся жидкостей в пористой среде и, следовательно, является обобщением модели фильтрации Маскета-Леверетта двух вязких несжимаемых несмешивающихся жидкостей. При использовании системы (11) – (14) для описания процесса фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в недеформируемой пористой среде нужно предполагать, что насыщенная двухфазной жидкостью пористая среда является трехфазной системой, состоящей из пористой недеформируемой матрицы, объемная концентрация которой равна $s_3 = 1 - \overline{m}$ ($\overline{m}$ – пористость, $v_3 = 0$) и двух взаимопроникающих жидкостей с объемными концентрациями $s_1 = \overline{m}s$ и $s_2 = \overline{m}(1-s)$, где s – фазовая насыщенность первой жидкостью порового пространства ($\sum_{j=1}^{3} s_j = 1$).

Для системы (11) – (14) рассматриваются следующие начальные условия

$$
\begin{gathered}
v_i(x,t)\big|_{t=0} = v_i^0(x), \quad s_1(x,t)\big|_{t=0} = s^0(x), \\
\theta(x,t)\big|_{t=0} = \theta^0(x), \quad x \in [0,1].
\end{gathered} \tag{15}
$$

На границах $x = 0$, $x = 1$ заданы тепловой режим и скорости

$$
\begin{gathered}
\tfrac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\big|_{x=0} = 0, \quad v_i(x,t)\big|_{x=0} = 0, \\
\tfrac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\big|_{x=1} = 0, \quad v_i(x,t)\big|_{x=1} = 0, \quad t \in [0,T].
\end{gathered} \tag{16}
$$

Дополнительное условие для однозначного определения $p_1(x,t)$ берется в виде

$$
\int\limits_0^1 p_1(x,t)dx = 0. \tag{17}
$$

Относительно функций $s^0(x)$, $\theta^0(x)$ предполагается выполнение неравенств следующего вида:

$$
\begin{gathered}
0 < m_0 \le s^0(x) \le M_0 < 1, \\
0 < k_1^{-1} \le \theta^0(x) \le k_1 < \infty
\end{gathered} \tag{18}
$$

для всех $x \in [0,1]$ и при фиксированных постоянных m_0, M_0, k_1.

При исследовании (11) – (17) большую роль играет вспомогательная задача, которая строится следующим образом. Поделив уравнения неразрывности на постоянные ρ_i^0 и сложив полученные равенства, приходим к соотношению $s_1(x,t)v_1(x,t) + s_2(x,t)v_2(x,t) = 0$. Исключая в уравнениях (12) производные давлений, получим

$$
\begin{gathered}
\rho_1^0 \left(\tfrac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \tfrac{\partial v_1}{\partial x}\right) - \tfrac{1}{s_1}\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu_1\ s_1 \tfrac{\partial v_1}{\partial x}\right) - \tfrac{K}{s_1}(v_2 - v_1) - \rho_1^0 g = \\
= \rho_2^0 \left(\tfrac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \tfrac{\partial v_2}{\partial x}\right) - \tfrac{1}{s_2}\tfrac{\partial}{\partial x}\left(\mu_2\ s_2 \tfrac{\partial v_2}{\partial x}\right) - \tfrac{K}{s_2}(v_1 - v_2) - \rho_2^0 g + \tfrac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial x}.
\end{gathered} \tag{19}
$$

Складывая уравнения (12) и используя (11), выводим

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \sum_{i=1}^{2}\{\frac{\partial}{\partial x}(\mu_i s_i \frac{\partial v_i}{\partial x} - \rho_i^0 s_i v_i^2) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i^0 s_i v_i) + \rho_i^0 s_i g\} - s_2\frac{\partial p_c(s_1,\theta)}{\partial x}. \quad (20)$$

Поэтому в качестве искомых можно взять, например, функции s_1, v_1, p_1, θ, удовлетворяющие уравнению (11) при $i = 1$ и уравнениям (14), (19), (20). Учитывая вид уравнения (19) и условия (15), вместо v_1 удобно ввести функцию $u(x,t) = \beta_1 v_1(x,t) - \beta_2 v_2(x,t)$, $\beta_i = \mu_i/\mu$, $i = 1,2$, $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Тогда

$$v_1(x,t) = \frac{1-s(x,t)}{a_\mu(s)}u(x,t), \quad v_2(x,t) = -\frac{s(x,t)}{a_\mu(s)}u(x,t),$$

$$s(x,t) \equiv s_1(x,t), \quad s_2(x,t) = 1 - s(x,t), \quad a_\mu(s) = \beta_1(1-s) + \beta_2 s.$$

Подставляя v_1 и v_2 в уравнения (11), (14), (19), (20) и в условия (15),(16), приходим к следующей задаче для функций $s(x,t)$, $u(x,t)$, $p_1(x,t)$, $\theta(x,t)$:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a(s)u) = 0, \quad a(s) = \frac{s(1-s)}{a_\mu}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\frac{\partial}{\partial x}(b_0(s)\frac{\partial u}{\partial x}) + \nu_1\frac{b_0(s)}{a_\mu^3(s)a(s)}u(\frac{\partial s}{\partial x})^2 + \frac{b_0(s)K}{\rho^0 a_\mu(s)s(1-s)}u =$$
$$= -a_2(s)u\frac{\partial u}{\partial x} + \nu(b_0(s)\frac{a'(s)}{a(s)} - b_0'(s))\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} - a_3(s)u^2\frac{\partial s}{\partial x} + \quad (22)$$
$$+ b_0(s)g_0 + \frac{b_0(s)}{\rho^0}\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\mu_1 s\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1-s}{a_\mu(s)}u) - \mu_2(1-s)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{s}{a_\mu(s)}u) - \rho^0\frac{a_\rho(s)}{a_\mu(s)}a(s)u^2) -$$
$$-(\rho_1^0 - \rho_2^0)\frac{\partial}{\partial t}(a(s)u) + \rho^0 a_\rho(s)g - (1-s)\frac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial x}, \quad (23)$$

$$\chi_0(s)\frac{\partial \theta}{\partial t} + c_0 a(s)u\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\chi(s)\frac{\partial \theta}{\partial x}), \quad (24)$$

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u(x,t)\big|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0,$$

$$\int_0^1 p_1(x,t)dx = 0, \quad t \in [0,T], \quad (25)$$

$$u\big|_{t=0} = u^0(x) \equiv \beta_1 v_1^0(x) - \beta_2 v_2^0(x), \quad s\big|_{t=0} = s^0(x),$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta^0(x), \quad x \in [0,1].$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\nu = \mu/\rho^0, \quad \rho^0 = \rho_1^0 + \rho_2^0, \quad \nu_1 = \nu\beta_1\beta_2, \quad b_0(s) = \frac{a_\mu(s)}{a_\rho(s)},$$

$$a_\rho(s) = \alpha_1(1-s) + \alpha_2 s, \quad \alpha_i = \frac{\rho_i^0}{\rho^0}, \quad i = 1, 2;$$

$$a_1(s) = \frac{\alpha_1(1-s)^2 - \alpha_2 s^2}{a_\mu^2}, \quad a_1'(s) \equiv \frac{da_1}{ds},$$

$$a_2(s) = b_0(s)a_1(s) + a(s)\frac{b_0'(s)}{b_0(s)},$$

$$a_3(s) = \frac{1}{2}a_1'(s)b_0(s) + a'(s)\frac{b_0'(s)}{b_0(s)}, \quad g_0 \equiv (\alpha_1 - \alpha_2)g,$$

$$\chi_0(s) = c_1\rho_1^0 s + c_2\rho_2^0(1-s), \quad c_0 = c_1\rho_1^0 - c_2\rho_2^0.$$

Следует отметить, что при $s \in [0,1]$ все эти функции являются ограниченными.

Основная трудность при доказательстве разрешимости задачи (21) – (25) связана с сильной нелинейностью уравнений (21), (22). Поэтому возникает необходимость привлечения дополнительного уравнения для производной $\frac{\partial s}{\partial x}$. Для получения дополнительного уравнения производные $\frac{\partial v_i}{\partial x}$ выразим из уравнений (11) и подставим в уравнения (12). Получим ($\rho_i = \rho_i^0 s_i$)

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_i R_i) + \frac{\partial}{\partial x}(s_i v_i R_i) = -s_i\frac{\partial p_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i g, \tag{26}$$

где

$$R_i = \rho_i^0 v_i + \frac{\mu_i}{s_i}\frac{\partial s_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2.$$

Введем функцию $R(x,t)$, положив

$$R(x,t) = R_1(x,t) - R_2(x,t) = \frac{\mu}{a(s)}\frac{\partial s}{\partial x} + b(s)u, \quad b(s) \equiv \rho^0\frac{a_\rho}{a_\mu}.$$

Исключая в (26) давления p_1 и p_2, приходим к следующему уравнению для $R(x,t)$:

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial R}{\partial t} + U(s,u)\tfrac{\partial R}{\partial x} = -\tfrac{1}{2\mu}a''(s)a(s)uR\,(R - b(s)u) - \tfrac{K}{a(s)a_\mu^2}u - \\ -\tfrac{\delta}{\mu}\tfrac{a(s)}{a_\mu^2}u\left(\tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\beta_1(1-s)-\beta_2 s}{\mu a_\mu^2}u(R - b(s)u)\right) + \rho^0 g_0 + \tfrac{\partial p_c(s,\theta)}{\partial x}.\end{gathered} \tag{27}$$

Здесь $U(s,u) \equiv a'(s)u$, $a''(s) = -2\frac{\beta_1\beta_2}{a_\mu^3}$, $\quad \delta = \mu_2\rho_1^0 - \mu_1\rho_2^0$. Кроме того

$$R\mid_{t=0} = \frac{\mu}{a(s^0(x))}\frac{\partial s^0(x)}{\partial x} + b(s^0(x))u^0(x) \equiv R^0(x). \tag{28}$$

Система уравнений (21) – (24) является системой составного типа, состоящей из гиперболического уравнения для $s(x,t)$ и параболических уравнений для $u(x,t)$ и $\theta(x,t)$. После нахождения функций s, u, θ давление p_1 определяется из равенства (23).

Данная система близка по структуре системе уравнений вязкого газа в случае зависимости вязкости от плотности, но в большей степени нелинейна из-за наличия квадрата производной концентрации в уравнении для u и $a(s)$ – в уравнении неразрывности. Другое отличие, усложняющее исследование задачи, состоит в знаконеопределенности давлений p_1 и p_2 (или p – в схеме с общим давлением).

Выводу вспомогательной системы (21) – (24) и уравнения для производной насыщенности (27) посвящен п. 4.2.

В п. 4.3 излагается доказательство локальной теоремы существования сильного классического решений вспомогательной задачи. Доказательство использует метод Галеркина и проводится в таких классах, в которых возможен переход к исходной задаче. В итоге приходим к результату теоремы 4.1.1. о локальной по времени разрешимости задачи (11) – (17) в классе сильных и классических решений.

В п. 4.4 содержится доказательство теоремы единственности обобщенного решения. Доказательство опирается на вспомогательную задачу (21) – (25), (27), (28).

В п. 4.5 рассматривается изотермическое движение смеси двух вязких несжимаемых жидкостей с общим давлением (схема Х. А. Рахматулина), которое описывается системой (11) – (17) при условиях: $p_c(s_1,\theta) = 0$, $p_1 = p_2 = p$. Начальные и граничные условия для s_i, v_i имеют вид (15), (16). Для этой задачи доказывается существование решения "в целом" по времени, но при малых начальных данных (теорема 4.1.2). В основе доказательства теоремы 4.1.2. лежат априорные оценки, независящие от промежутка существования локального решения. При этом наиболее важным этапом является доказательство того факта, что норма $||u(x,t)||_{C(Q_T)}$ мала, если малы соответствующие начальные данные.

В п. 4.6 для системы (11) – (13) при условиях

$$p_1 = p_2 = p,\ p_c = 0,\ \theta = const,\ g = 0, K = const > 0,$$

$$\mu_i = \overline{\mu}_i |\frac{\partial v_i}{\partial x}|^\alpha,\ \alpha = const \geq 0,\ \overline{\mu}_i = const > 0$$

рассматривается автомодельное решение типа бегущей волны, т.е. предполагается, что $s_i = s_i(\xi)$, $v_i = v_i(\xi)$, $p = p(\xi)$, $\xi = x - ct$, $c = const$, $\xi \in (0, \infty)$, причем $(i = 1, 2)$

$$v_i(0) = v_i^0,\ s_1(0) = s^0,\ \lim_{\xi \to \infty} v_i(\xi) = u^+,\ \lim_{\xi \to \infty} s_1(\xi) = s^+.$$

На основе теоремы Шаудера доказана глобальная классическая разрешимость начально-краевой задачи изотермического движения двухфазной смеси в автомодельной постановке (теорема 4.1.3).

В пятой главе рассматривается параболическая регуляризация задачи одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых теплопроводных жидкостей. На основе равномерных по параметру регуляризации оценок устанавливается существование обобщенного решения на любом конечном интервале времени. Исследования в этой главе в основном следуют идеям главы 4, однако получение равномерных по параметру регуляризации оценок является принципиальным отличием от исследований, проведенных в главе 4.

В пункте 5.1 дается постановка задачи и формулируются основные результаты, а также излагается схема доказательства утверждений. Теорема 5.1.1. содержит результат о существовании обобщенного решения на любом конечном интервале времени. Доказательство этой теоремы опирается на вспомогательную ε - регуляризованную задачу (аналог задачи (21) – (25)):

$$\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(a(s^\varepsilon)u^\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial x^2} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \nu \frac{\partial}{\partial x}(b_0(s^\varepsilon)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}) + \nu_1 \frac{b_0(s^\varepsilon)}{a_\mu^3(s^\varepsilon)a(s^\varepsilon)} u^\varepsilon (\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x})^2 + \frac{a_0(s^\varepsilon)}{a^{1+\beta}(s^\varepsilon)} u^\varepsilon =$$

$$= -a_2(s^\varepsilon) u^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x} + \varepsilon \frac{b_0'(s^\varepsilon)}{b_0(s^\varepsilon)} u^\varepsilon \frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial^2 x} + \nu (b_0(s^\varepsilon)\frac{a'(s^\varepsilon)}{a(s^\varepsilon)} - \tag{30}$$

$$-b_0'(s^\varepsilon))\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x} - a_3(s^\varepsilon)(u^\varepsilon)^2 \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x} + b_0(s^\varepsilon) g_0 + \frac{b_0(s^\varepsilon)}{\rho^0}\frac{\partial p_c(s^\varepsilon, \theta^\varepsilon)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial p_1^\varepsilon}{\partial x}=\sum_{i=1}^2\{\frac{\partial}{\partial x}(\mu_i s_i^\varepsilon\frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x}-\rho_i^0 s_i^\varepsilon (v_i^\varepsilon)^2+\varepsilon\rho_i^0 v_i^\varepsilon\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x})-$$
$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho_i^0 s_i^\varepsilon v_i^\varepsilon)-\varepsilon\frac{\partial v_i^\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial s_i^\varepsilon}{\partial x}+\rho_i^0 s_i^\varepsilon g\}-(1-s^\varepsilon)\frac{\partial p_c(s^\varepsilon,\theta^\varepsilon)}{\partial x}, \tag{31}$$

$$\sum_{i=1}^2 c_i\rho_i^0 s_i^\varepsilon(\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}+v_i^\varepsilon\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x})=\frac{\partial}{\partial x}(\chi(s^\varepsilon)\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x}),\quad v_i^\varepsilon=v_i^\varepsilon(s^\varepsilon,u^\varepsilon), \tag{32}$$

$$u^\varepsilon\mid_{S_T}=0,\quad \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial x}\mid_{S_T}=0,\quad \frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial x}\mid_{S_T}=0,\quad \int\limits_0^1 p_1^\varepsilon(x,t)dx=0,$$
$$u^\varepsilon\mid_{t=0}=u^0(x),\quad s^\varepsilon\mid_{t=0}=s^0(x),\quad \theta^\varepsilon\mid_{t=0}=\theta^0(x). \tag{33}$$

Здесь $\varepsilon>0$ – фиксированное число.

В пункте 5.2 кратко излагается доказательство локальной теоремы 5.1.2 существования сильного и классического решений задачи (29) – (33).

В пункте 5.3 содержится подробный вывод первого энергетического неравенства для решений вспомогательной задачи, а также оценки сверху и снизу для концентрации и температуры, не зависящие от параметра регуляризации ε и величины $[0,t_0]$.

В пункте 5.4 осуществляется процедура доказательства оценок для старших производных, входящих в систему уравнений вспомогательной задачи. При этом наиболее важным этапом является вывод равномерных по ε и t_0 оценок для вторых производных функции $\mu_1 v_1^\varepsilon(x,t)-\mu_2 v_2^\varepsilon(x,t)$. На основе этих оценок локальное решение вспомогательной задачи продолжается на любой конечный интервал времени $[0,T]$.

В пункте 5.5 излагаются результаты о компактности решений вспомогательной задачи. При этом важным этапом является лемма 5.5.1., в которой установлена равномерная сходимость последовательностей s^ε, u^ε, θ^ε и сильная сходимость в L_2 некоторых производных.

В приложении для системы уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной двухфазной смеси (газ - твердые частицы) в случае непостоянной истинной плотности газа ($\rho_2^0=\rho_2^0(p_2,\theta)$) доказана локальная разрешимость начально - краевой задачи (теорема 1). В случае постоянства истинных плотностей фаз установлена разрешимость "в целом" по времени (теорема 2).

Заключение содержит краткий перечень основных результатов, полученных в диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные результаты, полученные в настоящей работе, можно сформулировать следующим образом:

1. Для нестационарной регулярной пространственной задачи двухфазной изотермической фильтрации (модель Маскета-Леверетта) доказаны теоремы существования решений "в целом" в пространствах С.Л. Соболева и Гельдера; рассмотрены приближенные методы решения нестационарной регулярной задачи изотермической двухфазной фильтрации и установлены оценки скорости их сходимости.

2. Изучены дифференциальные свойства обобщенного решения нестационарной изотермической вырождающейся задачи двухфазной фильтрации, сформулированы условия устойчивости и единственности обобщенного решения; предложен приближенный метод решения и дана оценка его скорости сходимости.

3. Введено понятие обобщенного решения и доказана теорема его существования в автомодельной задаче о движении консервативной примеси в тающем снеге. Установлено, что решение обладает свойством конечной скорости распространения возмущений.

4. Впервые проведено систематическое исследование начально - краевых задач для одномерных уравнений неизотермического движения двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей. Доказана локальная по времени разрешимость в классе сильных и классических решений. Сформулированы условия единственности обобщенного решения. В случае постоянной температуры среды установлена разрешимость "в малом" по начальным данным в классе сильных решений. Рассмотрен пример о классической разрешимости "в целом".

5. На основе параболической регуляризации для нестационарной неизотермической одномерной задачи о движении двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей доказано существование обобщенного решения на любом конечном интервале времени.

6. Для нестационарной неизотермической одномерной задачи о движении смеси твердых частиц и сжимаемого газа доказана теорема существования классического решения "в малом" по времени. В случае постоянной температуре среды установлена разрешимость "в целом" в классе сильных решений.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

(публикации в журналах из списка ВАК)

1. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения задач двухфазной фильтрации // Докл. АН СССР.– 1979.–Т. 247, № 3.– С. 521-524.

2. Папин А.А., Мажирин А.П. Пример точного решения задачи о распределении ионизованной примеси в приповерхностной области полупроводника // ПМТФ. – 1998. – Т. 39, № 4. – С. 17-24.

3. Папин А.А. Существование решения “в целом” уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. 1.Постановка задачи и вспомогательные утверждения // Сиб.журн.индустр.математики. – 2006. – Т. 9, № 2 (26).– С. 116-136.

4. Папин А.А. Существование решения “в целом” уравнений одномерного неизотермического движения двухфазной смеси. 2.Результаты о разрешимости // Сиб.журн.индустр.математики. – 2006. – Т. 9, № 3 (27).– С. 111-123.

5. Папин А.А. Разрешимость модельной задачи тепломассопереноса в тающем снеге// ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 4. – С. 13-23.

6. Папин А.А. О локальной разрешимости краевой задачи тепловой двухфазной фильтрации // Сиб. журн. индустр. математики.– 2009. – Т. 12, № 1 (37)– С. 114-126.

7. Папин А.А. Разрешимость краевой задачи фильтрации двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей в пористой среде // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика.– 2009.– Т.9, Вып.2.– С. 80-87.

8. Papin A.A., Akhmerova I.G. Solvability of the system of equations of one-dimensional motion of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes. – 2010. – Vol. 87, № 2. – P. 230-243.

9. Papin A.A. On the uniqueness of the solutions of an initial boundary-value problem for the system of a heat-conducting two-phase mixture // Mathematical Notes.– 2010.– Vol. 87, № 4. –P. 594-598.

10. Папин А.А., Токарева М.А. Модельная задача о движении сжимаемой жидкости в вязкоупругой горной породе // Известия АлтГУ. – 2010. – Вып. 1 (65).– С. 35-37.

Прочие публикации

11. Антонцев С.Н., Папин А.А. Приближенные методы решения регулярных и вырождающихся задач двухфазной фильтрации // Динамика сплошной среды. – Новосибирск. – 1982, Вып. 54. – С. 15-48.

12. Галкина Е.Г., Папин А.А. Автомодельное решение уравнений фильтрации двух жидкостей с учетом зависимости их вязкостей от градиентов скорости // Сб. научн. трудов "Математические модели фильтрации и их приложения". Изд-во СО РАН, –Новосибирск. – 1999. – С. 71-77.

13. Папин А.А . Разрешимость “в малом” по времени уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – Новосибирск. – 1999, Вып. 114. – С. 64 -70.

14. Папин А.А. Разрешимость “в малом” по начальным данным уравнений одномерного движения двух взаимопроникающих вязких несжимаемых жидкостей // Динамика сплошной среды. – Новосибирск. – 2000, Вып. 116. – С. 73 -81.

15. Папин А.А., Аносова И.Г. Глобальная разрешимость модельной задачи о движении двух взаимопроникающих жидкостей. Стабилизация решения // Известия АлтГУ. – 2002. – Спец. выпуск.– С. 40-46.

16. Папин А.А. Автомодельное решение задачи солепереноса в тающем снеге // Известия АлтГУ. – 2006. – Вып. 1 (49).– С. 39-47.

17. Папин А.А. Разрешимость “в целом” уравнений одномерного движения газожидкостного слоя // Известия АлтГУ. – 2007. – Вып. 1 (53).– С. 34-38.

18. Папин А.А. Корректность начально-краевых задач для одномерных уравнений движения двухфазной смеси. – Барнаул: изд-во АлтГУ, 2007. – 126 с.

19. Papin A.A. Existence of a solution “in the large” to the equations of one-dimensional nonisothermic motion of a two-phase mixture. 1. Statement of the problem and auxiliary assertions // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2008. – Vol. 2, № 2.– P. 231 - 251.

20. Papin A.A. Existence of a solution “in the large” to the equations of one-dimensional nonisothermic motion of a two-phase mixture. 2. Statement of the problem and auxiliary assertions // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2008. – Vol. 2, № 3.– P. 301 - 321.

21. Папин А.А. Локальная разрешимость начально-краевой задачи для уравнений одномерного неизотермического движения газожидкостного слоя // Известия АлтГУ. – 2008. – Вып. 1 (57).– С. 29-34.

22. Папин А.А. Краевые задачи для уравнений двухфазной фильтрации (монография). – Барнаул: изд-во АлтГУ, 2009. –220 с.

Подписано в печать 2010 г.
Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 2,0. Тираж 120 экз.
ГОУ ВПО "Алтайского государственный университет"
656049, Барнаул, проспект Ленина, 61
Типография Алтайского государственного университета
656049 Барнаул, ул. Димитрова, 66