На правах рукописи

**ПАНЮШКИН ДЕНИС НИКОЛАЕВИЧ**

# ГРУППЫ ШУНКОВА, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ РАЗЛИЧНЫХ ГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск-2010

Работа выполнена в Красноярском государственном аграрном университете

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
доцент Кузнецов Александр Алексеевич

Официальные оппоненты:

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор Мазуров Виктор Данилович

доктор физико-математических наук,
профессор Беляев Виссарион Викторович

Ведущая организация:

Институт вычислительного моделирования
СО РАН

Защита диссертации состоится 17 декабря 2010 года в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 212.099.02 при Сибирском федеральном университете по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета.

Автореферат разослан "____" ноября 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета ___________ Бушуева Н.А.

# Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** Результаты, представленные в диссертации, относятся к традиционному для созданной В.П. Шунковым школы направлению, связанному с исследованием групп с различными условиями конечности и, в частности с такими, ставшими уже классическими, объектами, как группы Шункова:

*Группа называется группой Шункова, если в каждом ее сечении по конечной подгруппе, включая единичную, любая пара сопряженных элементов простого порядка порождает конечную подгруппу.*

При этом в этих исследованиях используется понятие насыщенности бесконечной группы заданным множеством групп. Понятие насыщенности группы некоторыми системами групп ввел в 1993 г. А.К. Шлепкин [14]:

*Группа $G$ насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из $G$ содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$. Пусть группа $G$ насыщена группами из некоторого множества $\mathfrak{M}$, и для любой группы $X \in \mathfrak{M}$ в $G$ найдется подгруппа $L$, изоморфная $X$. В этом случае будем говорить, что $G$ насыщена множеством групп $\mathfrak{M}$, а само множество $\mathfrak{M}$ будем называть насыщающим множеством групп для $G$.*

Изучение периодических групп, насыщенных множеством, состоящим из конечных простых неабелевых групп, связано с попыткой обобщить известный результат Кегеля, Беляева, Боровика, Хартли и Томаса о локально конечных группах, обладающих локальными покрытиями группами лиева типа на произвольные периодические группы [1]. В терминах насыщенности это обобщение оформлено в виде вопроса 14.101 в Коуровской тетради [2], который поставил А.К. Шлепкин:

*Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа конечного ранга?*

Частичным решениям этого вопроса посвящен ряд работ О.В. Васильевой, Д.В. Лыткиной, В.Д. Мазурова, А.Г. Рубашкина, А.И. Созутова, Л.Р. Тухватуллиной, К.А. Филиппова, А.К. Шлепкина [4–12, 14–21].

Понятие насыщенности оказалось востребованным и в том случае, когда насыщающее множество состоит не обязательно из конечных простых неабелевых групп. В частности, Бернсайдовы группы $B(m, n)$ достаточно большого четного периода $n$ не локально конечны и насыщены прямыми произведениями групп диэдра, взятых в конечном числе [3, 22].

А.Г. Рубашкиным и К.А. Филипповым [8] изучалась периодическая группа $G$, насыщенная конечными группами диэдра. Доказана локальная конечность такой группы при условии, что она либо ограниченного периода, либо финитно-аппроксимируема. В случае, если $G$ не локально конечная группа, установлена следующая её факторизация $G = ABC = ACB = BCA = CBA$, где $A$ – локально конечный диэдр, а $B, C$ – локально циклические подгруппы. Вопрос о существовании такой группы до сих пор открыт. В связи с этим А.К. Шлепкиным был поставлен следующий вопрос:

*Локально конечны ли группы конечного периода и конечного 2-ранга, насыщенные прямыми произведениями групп диэдра?*

Изучение периодических групп, насыщенных прямыми произведениями различных групп, с одной стороны, продиктовано потребностями характеризации локально конечных простых групп лиева типа в связи с упомянутым выше вопросом 14.101 из Коуровской тетради. С другой стороны, эти исследования оказались интересными и востребованными в связи с указанными выше направлениями комбинаторной теории групп и вопросом А.Ю. Ольшанского:

*Существует ли периодическая не локально конечная группа, насыщенная прямыми произведениями циклических групп простого порядка?*

**Цель работы.** Исследование периодических групп Шункова, насыщенных прямыми произведениями проективных специальных линейных групп размерности два на абелевы группы.

**Основные результаты.**

1. Доказана локальная конечность периодических групп Шункова, насыщенных прямыми произведениями циклических $2'$-групп на группы $L_2(2^n)$ (теорема 1).

2. Доказана локальная конечность периодических групп Шункова, насыщенных прямыми произведениями циклических 2-групп на группу $L_2(5)$ (теорема 2).

3. Доказана локальная конечность периодических групп Шункова, насыщенных прямыми произведениями конечных элементарных абелевых 2-групп на группу $L_2(5)$ (теорема 3).

4. Доказана локальная конечность периодических групп Шункова, насыщенных прямыми произведениями конечных элементарных абелевых 2-групп на группы $L_2(p)$ (теорема 4).

5. Описано строение нормализатора силовской 3-подгруппы периодической группы Шункова, насыщенной общими линейными группами размерности два над полями характеристики 3 (теорема 5).

**Методы исследования.** Методы локального анализа конечных групп адаптируются для исследования строения периодических групп.

**Научная новизна и практическая ценность.** Все результаты диссертационной работы являются новыми. Они носят теоретический характер. Результаты и методы работы могут быть использованы в теории групп и её приложениях.

**Апробация работы.** Результаты диссертации докладывались автором на "Мальцевских чтениях" (г. Новосибирск, 2009, 2010), на XLV Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс" (г. Новосибирск, 2009), на Международной конференции "Алгебра, логика и приложения" (г. Красноярск, 2010). Результаты диссертации обсуждались на Красноярском городском алгебраическом семинаре (СФУ) и на семинаре "Математические системы" (КрасГАУ).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в работах [23] - [28].

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы (34 наименования), занимает 66 страниц текста, набранного в пакете LaTeX. Нумерация теорем и лемм сквозная.

# Содержание работы

Диссертация состоит из четырех глав. В первой главе собраны вспомогательные факты, используемые в доказательстве основных результатов. Некоторые из них были получены в процессе работы и приведены с доказательствами.

Во второй главе диссертации изучаются периодические группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями циклических групп на группу $L_2(q)$, где $q = 2^n$. Получены следующие результаты:

**Теорема 1.** *Бесконечная периодическая группа Шункова $G$, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(q) \times \langle t_m \rangle \mid q = 2^n; n = 2, ...; m = 1, 2, ...\}$, где $(|L_2(q)|, |t_m|) = 1$, локально конечна и изоморфна прямому произведению $L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$, для некоторого локально конечного поля $Q$, а $V$ — локально циклическая группа без инволюций.*

**Теорема 2.** *Бесконечная периодическая группа Шункова $G$, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(5) \times \langle v \rangle\}$, где $|v| = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, локально конечна и изоморфна $L \times V$, где $L \simeq L_2(5)$, а $V$ — локально циклическая 2-группа.*

В третьей главе диссертации изучаются периодические группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями $L_2(q)$ на конечные элементарные абелевы 2-группы. Ранее К.А. Филипповым доказана локальная конечность периодической группы Шункова, насыщенной группами из множества $\Re = \{L_2(q) \times Z_2\}$, где $Z_2$ — группа порядка 2, $q = p^n$, $p$ — нефиксированное [13]. Попытка обобщить этот результат на произвольные периодические группы пока успехом не увенчалась. Как оказалось, для случая, когда $\Re = \{L_2(q) \times Z_2 \mid q = 2^n; \ n = 1, 2, ...\}$ , возник контрпример, противоречивость которого доказать не удается. Поэтому естественно рассмотреть группу, насыщенную похожими множествами групп, в каждой из которых силовская 2-подгруппа элементарная абелева либо содержит элементарную абелеву 2-группу сколь угодно большого ранга. Доказаны следующие результаты:

Пусть $I_n = \underbrace{Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{n \text{ раз}}$. Тогда верны следующие теоремы.

**Теорема 3.** *Бесконечная периодическая группа Шункова $G$, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(5) \times I_n \mid n = 1, 2, ...\}$, локально конечна и изоморфна $L_2(5) \times N$, где $N$ — бесконечная группа периода 2.*

**Теорема 4.** *Бесконечная периодическая группа Шункова $G$, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(p) \times I_n \mid n = 1, 2, ...\}$, где $p \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 8)$ — фиксированное простое число, локально конечна и изоморфна $L_2(p) \times N$, где $N$ — бесконечная группа периода 2.*

В четвертой главе изучаются группы Шункова, насыщенные группами $GL_2(3^n)$. Хорошо известно, какую роль играет структура централизатора инволюции при характеризации конечных простых неабелевых групп. Аналогичная ситуация складывается и при изучении бесконечных периодических групп, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. При изучении периодических групп, насыщенных группами $L_3(3^n)$, оказалось необходимым установление структуры централизатора инволюции. Как выяснилось, централизатор инволюции насыщен группами $GL_2(3^n)$.

**Теорема 5.** *Пусть бесконечная периодическая группа Шункова $G$ насыщена группами из множества $\Re = \{GL_2(q) \mid q = 3^n; n = 1, 2, ...\}$, $S$ — силовская 3-подгруппа группы $G$. Тогда:*

1. *$S$ — счетная элементарная абелева 3-группа.*

*2.* $C_G(S) = S \times D$*, где* $D$ *— бесконечная локально циклическая группа и* $\pi(D) \cap \pi(S) = \varnothing$*.*

*3.* $N_G(S) = S \leftthreetimes (D \times R)$*, где* $R$ *— бесконечная локально циклическая группа, изоморфная группе* $D$ *и* $N_G(S) = C_G(S) \leftthreetimes R$*.*

*4.* $S \leftthreetimes R$ *— группа Фробениуса с неинвариантным множителем* $R$*, действующим регулярно и транзитивно на множестве неединичных элементов группы* $S$*.*

Доказательство теоремы 1, за исключением леммы 1, принадлежит автору. Доказательство теоремы 2, за исключением леммы 3, принадлежит автору. Теоремы 3, 4, 5 доказаны автором самостоятельно.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.А. Кузнецову за постановку задачи, помощь в работе и внимание с его стороны. Отдельная благодарность сотрудникам кафедры прикладной математики КрасГАУ: Л.Р. Тухватуллиной, К.А. Филиппову и А.А. Дуж, за ценные советы и полезные замечания при обсуждении моей работы, за доброжелательность и внимательное отношение.

# Литература


[1] Беляев В.В. Локально конечные группы Шевалле // Исследования по теории групп. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1984. – С. 39–50.

[2] Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. - Изд-е 17-е. – Новосибирск. – 2010. – 218 с.

[3] Лысёнок И.Г. Бесконечные бернсайдовы группы четного периода // Изв. РАН. Сер. матем. – 1996. – Т. 60. – С. 4–5.

[4] Лыткина Д.В. Строение группы, порядки элементов которой не превосходят числа 4 // Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2005. – №4. – С. 602–617.

[5] Лыткина Д.В. Периодические группы, насыщенные группой $U_3(9)$ // Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2006. – №5. – С. 32–34.

[6] Лыткина Д.В., Мазуров В.Д. Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$ // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, №5. – С. 520–535.

[7] Лыткина Д.В., Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных $L_2(q)$ и ее центральными расширениями // Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2006. – №5. – С. 35–45.

[8] Рубашкин А.Г., Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных $L_2(p^n)$ // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46, №6. – С. 1388–1392.

[9] Созутов А.И. О некоторых группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2004. – №3. – С. 101–110.

[10] Созутов А.И., Шлепкин А.К. О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72, №3. – С. 433–447.

[11] Тухватуллина Л.Р., Лыткина Д.В., Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49, №2. – С. 395–400.

[12] Тухватуллина Л.Р., Лыткина Д.В., Филиппов К.А. О периодических группах, насыщенных группами $U_3(2^n)$ //Алгебра и логика. – 2008. – Т. 47, №3. – С. 288–306.

[13] Филиппов К.А. Группы, насыщенные конечными неабелевыми группами и их расширениями: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Красноярск, 2006.

[14] Шлепкин А.К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сборник тезисов III междунар. конф. по алгебре, 23–28 авг. 1993. – Красноярск, 1993. – С. 369.

[15] Шлепкин А.К. О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37, №2. – С. 224–245.

[16] Шлепкин А.К. О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами $U_3(2^n)$ // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37, №5. – С. 606–615.

[17] Шлепкин А.К. Группы Шункова с дополнительными ограничениями: дис. ... д-ра. физ.-мат. наук. – Красноярск, 1998. – 163 с.

[18] Шлепкин А.К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами // Матем. труды. – 1998. – Т. 1, №1. – С. 129–138.

[19] Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простым группами // Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2004. – №2. – С. 96–100.

[20] Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. О группах, насыщенных конечным множеством групп // Сиб. матем. журн. – 2004. – Т. 45, №6. – С. 1397–1400.

[21] Шлепкин А.К., Рубашкин А.Г. Об одном классе периодических групп // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44, №1. – С. 11–119.

[22] Ivanov S.V. The free Burnside groups of sufficiently large exponents // Int. J. of Algebra and Computation. – 1994. – V. 4. – P. 2.

## Работы автора по теме диссертации


[23] Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(5)$ // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. – 2010. – Т. 10, вып.1. – С. 88–92.

[24] Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп // Труды ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 6, №2. – С. 177–185.

[25] Панюшкин Д.Н. Строение нормализатора силовской 3-подгруппы периодической группы Шункова, насыщенной конечными простыми группами $GL_2(3^n)$ // Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2009. – №7. – С. 48–51.

[26] Панюшкин Д.Н. О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(p)$ // Матем. сист. – Красноярск: КрасГАУ, 2009. – №8. – С. 68–73.

[27] Панюшкин Д.Н. Строение нормализатора силовской 3-подгруппы периодической группы Шункова, насыщенной группами $GL_2(3^n)$ // Сборник тезисов матем. XLVII междунар. науч. студ. конф. – НГУ. – Новосибирск, 2009. – С. 117.

[28] Панюшкин Д.Н., Тухватуллина Л.Р., Филиппов К.А. О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп

// Сборник тезисов VII междунар. школы-конф., посвященной 75-ию В.А. Белоногова. – ЮУрГУ. – Челябинск, 2008. – С. 90.