ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕТА
на диссертацию Поисеевой Саргыланы Семёновны
«Группы с ограничениями на степени непреводимых характеров»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Зародившуюся в конце 19 столетия в трудах Фробениуса теорию представлений можно сравнить с методом координат, открытым Декартом. Она позволила рассматривать конкретные реализации абстрактных алгебраических систем, задавать и исследовать функции на этих системах. Развиваясь, сначала, как инструмент для доказательства теорем о конечных группах, самой известной из которых является теорема Бернсайда о разрешимости конечной группы, порядок которой делится только на два простых числа, с появлением теории модулярных представлений она оформилась в самостоятельную область исследований со своим кругом задач. Вопросы характеризации конечных групп с арифметическими условиями на степени характеров исследуются не впервые. Так в 1968 году Зейтц перечислил группы, имеющие единственное неодномерное представление. Ранее, Айзексом и Пассманом, задача классификации групп с двумя степенями неприводимых характеров была редуцирована к случаю групп с неабелевой силовской p-подгруппой и p-примарной наибольшей степенью неприводимого характера. В 2000-е годы в ряде работ Снайдера, Айзекса, Берковича, Дюрфи и Дженсен исследовалась задача описания групп G с неприводимым комплексным характером степени d и условием $|G| = d(d+e)$ для некоторого целого неотрицательного числа e. К этому же направлению можно отнести исследуемую в диссертации задачу изучения групп, порядки которых ограничены произведением положительной константы c на квадрат степени некоторого неприводимого характера. Выбор в диссертации константы c, равной двум, обусловлен анализом таблиц характеров конечных простых групп, представленных в Атласе. Оказалось, что простых групп, удовлетворяющих этому условию, со значеним константы $c \leq 2$, нет. Поэтому естественно возникла гипотеза о разрешимости групп, удовлетворяющих сформулированному условию с $c = 2$ или, в терминологии автора, — $LC(\Theta)$-групп. Перейдем к изложению содержания диссертации.

Диссертация изложена на 98 страницах и состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, состоящего из 37 источников и 11 публикаций автора по теме диссертации, заключения и приложений.

Во введении обосновывается актуальность исследуемых в диссертации вопросов, кратко излагается содержание работы, формулируются основные результаты, перечисляется апробация результатов.

В первой главе приведены необходимые сведения: опредления, обозначения, формулировки результатов из теории чисел, теории конечных груп (с акцентом на свойствах разрешимых групп, теоремах о пересечениях силовских подгрупп, нормальных замыканиях элементов), теории обыкновенных характеров (включая результаты по индуцированным характерам и теорию Клиффорда). Также приведён ряд результатов, касающийхся свойств характеров конечных простых групп и групп Фробениуса, и соотношений между порядками конечных простых групп их абелевых подгрупп и групп автоморфизмов.

В второй главе диссертации автор сначала с помощью несложного анализа соотношений ортогональности для главного характера $LC(\Theta)$-группы G и характера Θ получает, что Θ является точным и единственным неприводимым характером G наибольшей степени. Кроме этого, показано, что ограничение Θ на любую собственную нормальную подгруппу N группы G есть приводимый характер и $(|G/N|, \Theta(1)) \neq 1$. Более детальный анализ соотношений ортогональности позволил далее установить тривальность центра группы G, если она не является 2-группой, и доказать основной результат второй главы: если порядок $LC(\Theta)$-группы G не является степенью числа 2, то всякий неприводимый характер G входит в разложение Θ^2 с отличным от нуля коэффициетном (теорема 2.1.2).

Исследованию $LC(\Theta)$-группы G с абелевой силовской p-подгруппой и характером Θ p-примарной степени посвящена третья глава. Анализ первого соотношения ортогональности для Θ и изучение его ограничения на подгруппу $C_G(O_p(G))$ с помощью теории Клиффорда позволяют заключить, что $O_p(G) = 1$. Отсюда, с использованием теоремы Бродки, выводится совпадение силовской p-подгруппы P группы G со своим нормализатором, а значит, по теореме Бернсайда о переносе группа G является p-нильпотентной. Далее устанавливается (важная лемма 3.2.1) разложение G в полупрямое произведение подгруппы Фиттинга $F(G)$ и P, и разложение $F(G)$ в прямое произведение элементарных абелевых групп. Уточнением действия подгруппы P на $F(G)$ получается разложение G в прямое произведение групп Фробениуса известных порядков (теорема 3.1.2).

В четвертой главе автор исследует строение $LC(\Theta)$-группы G со степенью Θ, равной произведению двух простых чисел p и q, где $q \leq p$. В случае, когда $p = q$ удаётся получить описание таких групп. Показано (теорема 4.1.1), что $LC(\Theta)$-группа G с неприводимым характером Θ степени p^2, p — простое, является прямым произведением групп Фробениуса порядков $p(p+1)$, либо $p = 2$ и $|G| \in \{20, 32\}$. Доказательство указанного результата редуцируется к рассмотренному в третьей главе случаю абелевой силовской p-подгруппы, при этом появляются исключения — группы порядков 20 и 32. Когда p и q различны, удаётся доказать p-разрешимость G (теорема 4.1.2) и существование в G нормальной абелевой подгруппы индекса pq (теорема 4.1.3). Доказательство обоих теорем технически сложное. Так, в доказательстве теоремы 4.1.2 сначала проводится редукция к случаю, когда силовская p-подгруппа G является циклической простого порядка. Затем перечисляются все конечные простые группы с силовской подгруппой простого порядка p, мощности которых не превосходят числа $2p^4$, и показывается, что они не могут встречаться в качестве композиционных факторов группы G. В основе доказательства теоремы 4.1.3 лежит исследование средствами теории Клиффорда ограничений характера Θ на подгруппы $O_{p',p}(G)$ и $O_{p'}(G)$. В качестве одного из промежуточных результатов здесь получается альтернатива: либо $|G| \in \{54, 72\}$, либо $|G| = pqm$, где $(pq, m) = 1$.

В пятой главе установлена p-разрешимость $LC(\Theta)$-группы G с неприводимым характером Θ степени p^2q, p, q — простые числа, $q < p$, и доказано существование в G абелевой нормальной подгруппы индекса p^2q (теоремы 5.1.1 и 5.1.2). Здесь, в отличие от предыдущей главы, автору для анализа возникшающих в процессе доказательства случаев уже потребовалось привлечь тонкие результаты В.И. Зенкова о пересечениях силовских p-подгрупп в конечных группах, теорему Л.С. Казарина о нормальном замыкании элемента простого порядка в конечной группе, уточнение теоремы Клиффорда для случая, когда фактор-группа подгруппы инерции по нормальной подгруппе — циклическая.

В заключении формулируются вопросы, указывающие направления для дальнейших исследований.

Перечисленные выше результаты и отмеченные средства, используемые для их доказательства, позволяют сделать вывод о том, что автор освоил такие сложные разделы теории конечных групп как теория характеров, теория конечных простых групп, овладел набором приёмов и методов из перечисленных разделов. Как и всякий объемный труд, диссертация не свободна от опечаток (например, стр. 25, 3-й абзац сверху: должно быть $|\Theta(t_0)| = \Theta(1)$ вместо $\Theta(t_0) = |\Theta(1)|$; стр. 72, 2-й абзац сверху: должно быть $\varepsilon_n^i = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ вместо $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$) которые, впрочем, не затрудняют понимание. Допущены небрежности в формулировках определений. Так в определении 2.1.1 $LC(\Theta)$-группы на страницах 8 и 22 условие $G \neq 1$ излишне. Не указано условие порождаемости группы G подгруппами H и K в определении 1.2.2 полупрямого произведения на странице 12 (равенство $G = H \rtimes K$ фиксирует обозначение). В определении 1.3.20 на странице 19 объект, обозначаемый буквой H, не определён. Следующее замечание касается оценки автором некоторых из представленных результатов. Перед формулировками теорем 4.1.1, 4.1.3. 5.1.2 говорится, что они дают описание групп с указанными в теоремах свойствами. С этим можно согласиться в случае, когда речь идет о теореме 4.1.1, и то, если бы были перечислены, например, с помощью GAP, все $LC(\Theta)$-группы порядков 20 и 32. Это же относится и к возникающим в процессе доказательств группам порядков 54, 72. Однако сложно согласиться с такими утверждениями перед теоремами 4.1.3 и 5.1.2, скорее, в них устанавливается важное свойство характеризующее строение исследуемых групп. Кстати, в формулировке основных положений выносящихся на защиту во введении говорится именно об описании строения.

Диссертация С.С. Поисеевой представляет собой законченную научную работу. Полученные в диссертации результаты являются достоверными, новыми и актуальными, они вносят существенный вклад в теорию характеризации конечных групп их характерами. Список литературы хорошо отражает содержание предмета диссертационного исследования. По теме диссертации опубликовано 4 статьи в изданиях рекомендованных ВАК РФ, 2 из которых — в соавторстве с научным руководителем, и 6 публикаций в материалах и трудах конференций.

Считаю, что диссертация С.С. Поисеевой «Группы с ограничениями на степени неприводимых характеров» полностью соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, удовлетворяет всем требованиям, предъявленным ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор, Саргылана Семёновна Поисеева, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент: Колесников Сергей Геннадьевич

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева» кафедра безопасности информационных технологий, заведующий кафедрой, доктор физико-математических наук, доцент.

15.03.2018 г

Почтовый адрес:

660037, Сибирский федеральный округ, Красноярский край, г. Красноярск, проспект им. газеты Красноярский рабочий, дом 31.

Телефон: +7 (913) 574-72-36.

E-mail: sgkolesnikov@sibsau.ru

Подпись Колесникова удостоверяю

Начальник УК СибГАУ

г.Красноярск

УПРАВЛЕНИЕ КАДРОВ