УТВЕРЖДАЮ
Проректор МГУ имени
М.В. Ломоносова,
д-р физ.-мат. наук, профессор
А.А. Федянин
«15» 12 2015

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ НА ДИССЕРТАЦИЮ МИХАЛКИНА ЕВГЕНИЯ НИКОЛАЕВИЧА АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК ПО СПЕЦИАЛЬНОСТИ 01.01.01- ВЕЩЕСТВЕННЫЙ, КОМПЛЕКСНЫЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Целью диссертации является исследование решений общих алгебраических уравнений и их дискриминантных множеств. Указанное уравнение всегда можно привести к виду

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \ldots + x_1 y - 1 = 0\,, \tag{1}$$

зафиксировав два коэффициента. Отправной точкой для данной диссертации, как и для многих других работ по алгебраическим уравнениям, служит представление его решений в виде гипергеометрических рядов (или кратных интегралов), найденное Меллином. В диссертации найдено (и это главный результат **первой главы**) новое интегральное представление для решений уравнения (1) в виде ветвящегося интеграла по отрезку. Указанный интеграл корректно определен в дополнении к особому множеству, являющемуся объединением двух гиперповерхностей.

Вторая глава посвящена исследованию свойств сходимости интегрального представления, полученного в первой главе. Это представление задает решение $y(x)$ уравнения (1) в виде степенного ряда, сходящегося в некоторой области D. В рассматриваемой главе изучается группа монодромии указанного решения вблизи области D. Она порождается преобразованиями, задаваемыми аналитическими продолжениями решений $y(x)$ вокруг особого множества $S = \partial D \cap \nabla$, где ∇ – дискриминантное множество, совпадающее с множеством нулей дискриминанта Δ уравнения (1). Оказывается, указанное особое множество S состоит из n компонент $S^{(0)}, \ldots, S^{(n-1)}$, имеющих вещественную размерность $n-2$. Главным результатом второй главы является теорема, описывающая особенности ветвей решений уравнения (1). Она утверждает, что при продолжении через границу ∂D, каждая из таких ветвей $y_j(X)$ приобретает ветвление второго порядка вдоль пары множеств $S^{(j)}, S^{(j+1)}$.

Помимо разложения решений $y(x)$ уравнения (1) в виде степенного ряда получено разложение его степеней $y^\mu(x)$ в виде рядов Пюизо и описание областей их сходимости.

В **третьей главе** проводится подробное исследование дискриминанта уравнения (1) и его нулевого множества ∇, называемого иначе дискриминантным множеством. Начало исследованию этого множества было положено трудами Гильберта, который ввел стратификацию ∇ подмножествами $\mathcal{M}^j$, так что

$$\nabla = \mathcal{M}^2 \supset \ldots \supset \mathcal{M}^n,$$

где каждое из множеств $\mathcal{M}^{j+1}$ содержится в множестве особых точек предыдущего множества $\mathcal{M}^j$, а дополнение $\mathcal{M}^j \setminus \mathcal{M}^{j+1}$ состоит только из неособых точек и точек простых самопересечений.

Страты $\mathcal{M}^j$ тесно связаны с так называемыми A-дискриминантными множествами, введенными Гельфандом, Зелевинским и Капрановым. Напомним их определение. Для этого рассмотрим вместо уравнения (1) алгебраическое уравнение от k неизвестных $y = (y_1, \ldots, y_k)$ вида

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha y_1^{\alpha_1} \ldots y_k^{\alpha_k} = 0 \tag{2}$$

где коэффициенты $a_\alpha \in \mathbb{C}^A$ нумеруются индексами $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ из некоторого фиксированного множества $A \subset \mathbb{Z}^k$. Рассмотрим множество всех a_α, для которых уравнение (2) имеет критические точки $y \in (\mathbb{C} \setminus 0)^k$ и обозначим его замыкание через ∇_A. Это и есть A-дискриминантное множество уравнения (2). Классическое дискриминантное множество ∇ отвечает случаю $k = 1$, $A = \{0, 1, \ldots, n\}$. Основная теорема третьей главы утверждает, что существует (вполне явное) мономиальное преобразование, отождествляющее страты $\mathcal{M}^2, \ldots, \mathcal{M}^n$ с некоторыми A-дискриминантными множествами $\nabla_{A_2}, \ldots, \nabla_{A_n}$, где $\nabla_{A_2} = \nabla$.

Сформулированная теорема позволяет получить явное описание стратов $\mathcal{M}^2, \ldots, \mathcal{M}^n$, отвечающих уравнению (1), в терминах параметризации Горна–Капранова.

Четвертая глава посвящена исследованию особых точек алгебраических гиперповерхностей $V \subset (\mathbb{C} \setminus 0)^k$, определяемых уравнениями (2). Они задаются решениями уравнения (2), ограниченного на A-дискриминантное множество ∇_A. Основным результатом этой главы является описание указанных особых точек в терминах параметризации Горна–Капранова.

Итак, основными результатами диссертации по нашему мнению являются:

(1) Новое интегральное представление для решений общего алгебраического уравнения в виде ветвящегося интеграла по отрезку.
(2) Описание монодромии решения общего алгебраического уравнения в окрестности области сходимости ее ряда Меллина. Разложение в ряд Пюизо степеней указанной функции.
(3) Описание стратификации дискриминантного множества общего алгебраического уравнения в терминах A-дискриминантных множеств.
(4) Описание особых точек алгебраических гиперповерхностей, задаваемых общими алгебраическими уравнениями, в терминах параметризации Горна–Капранова.

Основные результаты автора опубликованы в 12 статьях, из которых 5 в центральных математических журналах. В том числе, в 3 статьях без соавторов (2 статьи в "Сибирском математическом журнале", одна — в "Известиях вузов. Математика"). Две статьи опубликованы с соавторами (статья в "Математическом сборнике" с А.К.Цихом и одна статья — в "Трудах МИАН" с И.А.Антиповой). В обеих статьях проведено четкое разделение между собственными результатами автора и результатами, полученными совместно с соавторами. Основные результаты диссертации своевременно опубликованы и получены лично соискателем.

К достоинствам диссертации следует отнести большое количество конкретных примеров и детально разобранных частных случаев, часть из которых вынесена в отдельные параграфы. Наличие таких примеров абсолютно необходимо, учитывая технический характер некоторых результатов. Необходимо отметить, что диссертация хорошо написана и текст тщательно выверен, что является ее несомненным достоинством.

К недостаткам диссертации следует отнести то, что в формулировках основных результатов отсутствуют прямые ссылки на работы, в которых эти результаты опубликованы.

Диссертация производит солидное впечатление и вносит новый вклад в исследование решений общих алгебраических уравнений, их дискриминантов и особенностей. Все ее результаты опубликованы с полными доказательствами, большей частью в центральных математических журналах. Автореферат правильно отражает содержание диссертации, а она сама удовлетворяет п.9 Положения о порядке присуждения ученых степеней. Считаем, что Е.Н.Михалкин заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – "Вещественный, комплексный и функциональный анализ".

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ, протокол № 5 от 11.12.2015 г.

ФГБОУ ВО
"МГУ им. М.В. Ломоносова"
д-р физ.-мат. наук, профессор,
кафедра теории функций и функционального анализа,
профессор Белошапка Валерий Константинович

д-р физ.-мат. наук, профессор,
кафедра теории функций и функционального анализа,
профессор Сергеев Армен Глебович

академик РАН, д-р физ.-мат. наук, профессор,
кафедра теории функций и функционального анализа,
зав. кафедрой Кашин Борис Сергеевич

Подписи Б.С.Кашина, В.К.Белошапки и А.Г.Сергеева — заверяю.

И.о.декана механико-математического факультета МГУ, д-р физ.-мат. наук,
профессор, Чубариков Владимир Николаевич