ОТЗЫВ

официального оппонента
на диссертацию САБОДАХ Ирины Валерьевны
**«Вложения конечных групп
в бесконечные группы с условиями конечности»,**
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Исторически вопросы о вложениях конечных групп в бесконечные группы с условиями конечности приобрели актуальность в связи с исследованиями знаменитой проблемы Бернсайда о локальной конечности периодических групп. Так классическая теорема В.П.Шункова утверждает, что периодическая группа, содержащая инволюцию, централизатор которой конечен, обязана быть локально конечной. С другой стороны, благодаря глубоким работам Адяна, Новикова, Григорчука, Ольшанского, Лысёнка, Иванова и других авторов, известны примеры периодических не локально конечных групп с весьма бедным строением вложенных в них конечных подгрупп.

Плодотворным понятием, позволяющим изучать влияние конечных подгрупп на строение и свойства периодических групп и, шире, групп с условиями конечности, оказалось понятие насыщающего множества, введенное в 1993 году А.К.Шлёпкиным. Говорят, что группа G *насыщена группами* из данного множества $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа группы G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$. Наличие насыщающего множества конечных групп несет в себе важную информацию о группе и позволяет вычислить многие её важные арифметические параметры (например, спектр). Наложение на группу дополнительных условий конечности часто позволяет перенести на группу некоторые свойства групп насыщающего множества, иногда охарактеризовав данную группу с точностью до изоморфизма. Так из работ В.Д.Мазурова, Д.В.Лыткиной, А.С.Мамонтова, А.А.Кузнецова, Э.Ябары и других авторов известны примеры конечных групп H, распознаваемых по спектру в классе всех групп. И если, скажем, периодическая группа G насыщена множеством, состоящим только из одной такой группы H, то с необходимостью G и H изоморфны. Понятие насыщающего множества естественным образом обобщает на произвольные группы понятие локального покрытия, играющего важную роль при изучении локально конечных групп. Разумеется, условие насыщенности группы конечными подгруппами из данного множества $\mathfrak{M}$ и само может рассматриваться как дополнительное естественное условие конечности.

Изучение групп, обладающих насыщающим множеством, сформировалось в последние годы самостоятельное направление в теории периодических групп и групп с условиями конечности, представленное такими авторами, как А.К.Шлёпкин, А.И.Созутов, А.Г.Рубашкин, Д.В.Лыткина, К.А.Филиппов, Л.Р.Тухватуллина, А.А.Кузнецов, Д.Н.Панюшкин, А.А.Шлёпкин, А.А.Дуж и другие. В рамках направления получены сильные и яркие результаты. Исследователями сформулирован ряд открытых вопросов, критически значимых для направления. Одним из таких вопросов является проблема А.К.Шлёпкина (Коуровская тетрадь, вопрос 18.113): пусть $\mathfrak{M}$ – конечное множество конечных простых неабелевых групп; верно ли, что периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, изоморфна одной из групп множества $\mathfrak{M}$?

К этому же направлению относится и диссертационная работа И.В.Сабодах.

Перечислю главные результаты диссертации.

Доказано (теорема 1), что периодическая группа, насыщенная группами из некоторого конечного множества $\mathfrak{H}$ конечных групп, сама принадлежит $\mathfrak{H}$ в случае, когда централизатор силовской 2-подгруппы в любой группе из $\mathfrak{H}$ является 2-группой. Этот результат существенным образом усиливает теорему Шлёпкина и Рубашкина 2004 г., в которой требовалась дополнительно простота групп из $\mathfrak{H}$ и использовалась классификация конечных простых групп, в которых силовская 2-подгруппа содержит свой централизатор (Кондратьев, Мазуров, 2003 г.). Теорема 1 диссертации из известных результатов использует, по-существу, лишь теорему Шункова о локальной конечности периодических групп, содержащих инволюцию с конечным централизатором.

Как следствие теоремы 1, установлено (теорема 2), что если L — прямое произведение конечных простых групп, в каждой из которых централизатор силовской 2-подгруппы не содержит нетривиальных элементов нечетных порядков, то всякая периодическая группа, насыщенная множеством $\{L\}$, изоморфна L. Данный результат также обобщает упомянутую теорему Шлёпкина и Рубашкина 2004 г.

Доказано (теорема 3), что периодическая группа, насыщенная группами конечного подмножества множества $\mathfrak{M}$, сама принадлежит $\mathfrak{M}$ в случае, когда $\mathfrak{M}$ — множество групп, являющихся прямыми произведениями элементарной абелевой 2-группы на конечную простую группу L, которая либо изоморфна одной из групп $L_3(q)$ или $U_3(q)$, либо нечетные порядки элементов в централизаторе силовской 2-подгруппы группы L не превосходят 3. Данный результат объединяет и обобщает известные ранее результат Рубашкина и Шлёпкина 2004 года о периодических группах, насыщенных конечным множеством неабелевых простых групп, в которых нечетные порядки элементов в централизаторе силовской 2-подгруппы не превосходят 3, и результат Лытктной, Тухватуллиной и Филиппова 2008 года о группах, насыщенных конечным множеством групп вида $L_3(q)$ или $U_3(q)$.

Перечисленные результаты серьезно усиливают известные ранее факты о группах с насыщающим множеством конечных групп и существенным образом продвигают изучение таких групп. Данные результаты являются основными положениями диссертации, выносимыми на защиту, и их доказательство составляет содержание второй и третьей глав (первая глава носит вспомогательный характер). Этих результатов по мнению оппонента было бы вполне достаточно для уровня кандидатской диссертации. Однако в четвертой главе диссертации дополнительно получена ещё серия утверждений о периодических группах Шункова с насыщающим множеством.

Теорема 5. Периодическая группа Шункова, насыщенная множеством групп вида $PGL_2(p^n)$, где p — фиксированное простое число, изоморфна $PGL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики p.

Теорема 6. Периодическая группа Шункова, насыщенная множеством групп вида $GL_2(p^n)$, где p — фиксированное простое число, изоморфна $GL_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики p.

(Формулировку теоремы 4 не привожу, поскольку ее можно рассматривать как частный случай теоремы 6.)

Ранее (2005 г.) Филипповым и Рубашкиным аналогичные утверждения были доказаны для периодических групп, насыщенных множеством групп вида $L_2(p^n)$ или $SL_2(p^n)$ для фиксированного простого p.

Отмечу некоторые недочеты работы.

Из определения множества $\mathfrak{R}$ (автореферат, стр. 3, 2-я снизу строка, стр. 4, 3-я сверху строка, и соответствующие места во введении к диссертации) неясно, является ли это множество одноэлементным и зависящим от параметров m, V и k или оно содержит элементы при всех возможных m, V и k.

Обозначение t_m на стр. 4 автореферата и стр. 4 диссертации не определено.

Последнее предложение во втором абзаце на стр. 5 автореферата грамматически несогласовано.

В автореферате заявленная цель — исследование групп, насыщенных расширениями конечных групп. Неясно, что понимается под расширениями конечных групп, ведь элементы насыщающего множества по определению — конечные группы.

В определении множества $\mathfrak{B}$ в автореферате (стр. 7 и 8) и в диссертации (стр. 8 и 26) вместо слов "... элементы нечетного порядка l..." следует писать "... нетривиальные элементы нечетного порядка...", а использование символа l следует исключить.

Формулировка предложения 1 на стр. 11 грамматически несогласована. Кроме того, предложения 1 и 3 было бы целесообразно поменять местами.

В диссертации используются разные символы для обозначения изоморфности групп (ср. обозначения на стр. 25 и 26).

Встречаются как пропущенные, так и лишние запятые.

К недостаткам оформления можно отнести также отсутствие точек над буквами "ё", включая случаи, где их использование является обязательным в соответствии с действующими правилами русского языка (например, в написании фамилий).

Замеченные недочёты легко устранимы и не влияют на высокую оценку результатов диссертации.

В целом же, диссертация И.В.Сабодах представляет собой законченное исследование на актуальную тему, имеющее существенное значение для изучения групп с условиями конечности. В работе получены нетривиальные обобщения и аналоги ряда известных результатов. Методы исследования в диссертации весьма разнообразны и оригинальны. Все утверждения снабжены доказательствами, корректность которых не вызывает сомнения. Работа написана хорошим языком. Автореферат достаточно правильно и полно отражает содержание диссертации. Все основные результаты своевременно опубликованы в трёх работах в изданиях, входящих в перечень ВАК. Кроме того, диссертация прошла солидную апробацию на различных международных математических конференциях, где результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались.

Таким образом, диссертация И.В.Сабодах "Вложения конечных групп в бесконечные группы с условиями конечности" соответствует п. 9 "Положения о порядке присуждения учёных степеней" и удовлетворяет всем необходимым требованиям, предъявляемых ВАК и Минобрнауки к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел. Считаю, что Ирина Валерьевна заслуживает присуждения искомой степени.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С.Л.Соболева Сибирского отделения Российской академии наук,
лаборатория теории групп,
ведущий научный сотрудник
доктор физико-математических наук,
доцент Ревин Данила Олегович

26.09.2014

Почтовый адрес: 630090, г. Новосибирск, ул. Академика Коптюга, д. 4.
Тел.: 8(383)363-45-40. E-mail: revin@math.nsc.ru

Подпись Д. О. Ревина заверяю. Учёный секретарь ИМ СО РАН
к.ф.-м.н. А. Ф. Воронин