

ОТЗЫВ  
официального оппонента на диссертацию  
Шишкной Ольги Андреевны  
**«Многочлены Бернулли от нескольких переменных  
и многомерный аналог формулы  
Эйлера – Маклорена»,**  
представленную на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 01.01.01 – вещественный,  
комплексный и функциональный анализ

Династия швейцарских ученых Бернулли имеет в своем составе по крайней мере восемь представителей, которые оставили заметный след в истории точных наук. Среди академиков Петербургской Академии наук пятеро представителей семьи Бернулли. Многие открытия даже сейчас кажутся нам нереальными, недоказуемыми, но и как все гениальное – простыми.

Один из представителей династии, Якоб I Бернулли доказал, так называемую, теорему Бернулли – частный случай закона больших чисел, имеющего большое значение в теории вероятностей и ее приложениях к статистике; построил математическую модель для описания серии независимых испытаний (схема Бернулли). При изучении свойств чисел Я. Бернулли встретился с суммированием степеней натуральных чисел. Я. Бернулли составил таблицу фигурных чисел, указал их свойства и на основании отмеченных свойств нашел формулы для сумм степеней натуральных чисел. Последовательность, которую открыл выдающийся швейцарский математик Якоб Бернулли, играет в математике важную роль, что объясняется ее связью с вопросами суммирования функций, производящими функциями, простыми числами, а также другими задачами. В 30 годах 18 века, опираясь на числа Бернулли, Леонардом Эйлером и независимо от него Колином Маклореном была получена формула, позволяющая выражать дискретные суммы значений функции через интегралы и производные от функции. Полученная формула называется формулой суммирования Эйлера – Маклорена и дает возможность находить многие асимптотические разложения. В частности известная формула Стирлинга может быть получена с помощью этой формулы.

Интерес к числам Бернулли и формуле Эйлера – Маклорена не ослабевает и по настоящее время. В. И. Арнольд, в одной из своих последних работ (1992 года) выяснил, что классические числа Эйлера и Бернулли управляют топологией бифуркационных диаграмм и классификацией морсификаций простых особенностей гладких функций, с одной стороны, и комбинаторикой зеркал групп, порожденных отражениями, – с другой. В 1850 году немецкий математик Эрнст Куммер, опираясь на числа Бернулли, получил важный результат, относящийся к проблеме существования решения в целых числах уравнения Ферма – проблеме Ферма. Хотя результат этот и не решал полностью проблемы, тем не менее, он и по сей день остается одним из самых

значительных, полученных в этом направлении (решении великой теоремы Ферма). Имеются многочисленные одномерные обобщения чисел Бернулли. Например, в работе Ё. Ониши 2011 года вводятся, так называемые, универсальные числа Бернулли, позволяющие усилить результат Куммера.

Развитие таких областей многомерного комплексного анализа, как теория многомерных вычетов и интегральных представлений, а также построение теории многомерных разностных уравнений позволило построить многомерные обобщения чисел Бернулли и теоремы Эйлера – Маклорена.

Настоящая диссертация Шишкиной Ольги Андреевны является первой работой в этом направлении. Диссертация состоит из введения, двух глав (каждая глава содержит 4 параграфа), заключения и списка литературы (60 наименований). Работа изложена на 80 страницах. Перейдем к рассмотрению основных результатов.

Во введении диссертации дается достаточно интересная историческая справка по многочленам Бернулли и формуле Эйлера – Маклорена. Затем кратко приводятся основные свойства классических чисел и многочленов Бернулли, которые в первой главе планируется обобщать на многомерный случай. Далее приводятся необходимые определения и краткое содержание глав диссертации.

В первой главе вводятся многомерные числа Бернулли, ассоциированные с рациональным конусом, и соответствующие им многомерные многочлены Бернулли. Строится представление многочленов Бернулли через оператор Тодда и переносятся основные свойства классических (одномерных) многочленов Бернулли для многомерного случая.

В первом параграфе первой главы настоящей диссертации доказывается теорема 1, которая показывает, что введенные многомерные многочлены Бернулли, как и в одномерном случае, есть результат действия построенного многомерного оператора Тодда на мономы.

Во втором параграфе строится полиномиальный разностный оператор и операторы дифференцирования по направлению вектора. Опираясь на эти определения формулируется теорема 2, являющаяся многомерным аналогом основного свойства, состоящего в том, что многочлены Бернулли удовлетворяют разностному уравнению. Доказательство теоремы 2 использует методы теории производящих функций.

В третьем параграфе найден многомерный аналог формулы Бернулли в которой сумма значений в целых точках параллелотапа выражается через интеграл от многочленов Бернулли по параллелотопу с «переменной» вершиной.

В заключительном, четвертом параграфе первой главы приводятся доказательства многомерных аналогов следующих свойств многочленов Бернулли: формулы сложения и умножения аргументов, формула дополнения и формула дифференцирования.

Глава вторая посвящена вопросам суммирования функций нескольких дискретных аргументов. В первом параграфе второй главы, для случая

нимодулярного рационального конуса, используя методы теории многомерных разностных уравнений, вводится понятие дискретной первообразной, и доказывается дискретный аналог формулы Ньютона – Лейбница.

Во втором параграфе получен многомерный аналог формулы Эйлера–Маклорена для задачи суммирования целых функций экспоненциального типа по целым точкам рациональных параллелотопов. С помощью методов теории дифференциальных операторов бесконечного порядка построен необходимый для многомерного аналога формулы Эйлера – Маклорена оператор Тодда и обоснована сходимость функционального ряда, который участвует в этой формуле.

В третьем параграфе рассматривается обобщение результатов второго параграфа на случай, когда унимодулярность конуса не требуется.

В четвертом параграфе методы теории дифференциальных операторов бесконечного порядка использованы для нахождения решений разностных уравнений и обобщения формулы Эйлера – Маклорена на случай кратного суммирования по симплексу.

Как видно из изложенного, вторая глава настоящей диссертации использует результаты первой главы качестве инструментария. Этим достигается естественная связь между главами диссертации.

Сделаем некоторые замечания. Пропущено тире стр. 2 диссертации седьмая строка снизу, стр. 4 авторефера 3 строка снизу также пропущено тире, в списке литературы у автора Полякова стр. 77 неправильно указаны инициалы, определение

Эти замечания ни в коей мере не искажают смысла работы и не умаляют ее ценности.

Диссертация изложена грамотно, хорошим языком, аккуратно оформлена, а отмеченные недостатки нисколько не снижают ее ценности. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

В целом диссертация О.А. Шишкиной представляет собой завершенное исследование по актуальной тематике. Представленные в диссертации результаты являются новыми, принадлежат лично автору диссертации и обоснованы исчерпывающими доказательствами. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, четыре из которых в ведущих изданиях, рекомендованных ВАК.

На основании изложенного можно заключить, что диссертация О.А.Шишкиной «Многочлены Бернуlli от нескольких переменных и многомерный аналог формулы Эйлера – Маклорена», полностью соответствует п.9 «Положения о присуждении ученых степеней» от 24 сентября 2013 года №842 и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01. – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Считаю, что ее автор Шишкина Ольга Андреевна, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева», кафедра высшей математики, доцент, доцент,

кандидат физико-математических наук

*Е.И.Яковлев*

Яковлев Евгений Иосифович

01.12.2014.

Почтовый адрес: 660037, Российская Федерация, г.Красноярск, проспект имени газеты Красноярский рабочий 31, а/я 1075

Телефон: 2919119

E-mail: yei@nm.ru

Ученик магистра Е.Н.  
Яковлев

Магистр  
степени кандидата  
наук по специальности  
«Математика»  
Ольга Николаевна  
Яковлев

*Ольга Николаевна Яковлев*

01.12.2014.

