ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Тимофеенко Ивана Алексеевича «Порождающие мультиплеты инволюций линейных групп над кольцом целых чисел», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Построение в группах систем образующих, удовлетворяющим тем или иным ограничениям, является традиционной задачей в теории групп. К этому кругу вопросов относится и проблема поиска порождающих наборов инволюций. Эту задачу для различных классов групп рассматривали М. К. Тамбурини, Дж. Уилсон, Г. Малле, Я. Саксл, Т. Вайгель, Дж. Уорд, Ф. Далла Вольта, А. Вагнер, В. Д. Мазуров, Я. Н. Нужин и его ученики. Идеологически близкая, как по постановке, так и по применяемым методам решения, задача о (2,3)-порождении восходит к работам Ф. Клейна, Р. Фрике, Дж. Миллера. В последние десятилетия существенные результаты в этом направлении были получены в работах М. К. Тамбурини, М. Либека, А. Шалева, Л. Ди Мартино, М. Пеллегрини, Г. Малле, Ф. Любека, Г. Хигмана, М. Кондера, Н. А. Вавилова, оппонента и других авторов. Поэтому актуальность выбранной темы диссертации не вызывает сомнений.

К настоящему времени наиболее полные ответы удается получить на вопрос о порождении наборами инволюций конечных простых групп и близких к ним. Более общая задача для случая групп Шевалле (в том числе, классических серий) над конечнопорожденными кольцами остается менее исследованной. Одной из особенностей рассматриваемых задач является то, что решение для групп достаточно большого лиевского ранга оказывается проще. Связано это с тем, что чем больше ранг, тем больше имеется подходящих наборов образующих, и их удается выбрать единообразно для всех достаточно больших рангов. Случай групп малых рангов (к нему обычно относятся и группы Шевалле исключительных серий) оказывается гораздо сложнее. Здесь приходится решать две весьма трудные задачи. Во-первых, надо предъявить потенциальные образующие, а их поиск или построение довольно сложны. Во-вторых, доказательство того, что найденные наборы инволюций порождают всю рассматриваемую группу, требует гораздо больше усилий. Обычно приходится показывать, что какие-то хорошо известные системы образующих можно выразить через рассматриваемые инволюции. Однако такие формулы оказываются весьма громоздкими, их нельзя записать за один шаг, и непросто найти. На этом пути ситуация с группами Шевалле малых рангов осложняется еще и тем, что никаких единых методов нет, то есть для каждого типа системы корней вычисления приходится проводить заново.

Наметившийся в последние десятилетия прогресс в решении подобных задач связан, в том числе, с тем, что к поиску образующих и к построению доказательств порождения удается привлечь компьютерные вычисления. Это позволяет существенно ускорить поиск. При этом важно, что окончательное доказательство остается компьютерно независимым, то есть может быть в принципе проверено человеком.

В диссертации И. А. Тимофеенко решаются несколько новых и важных задач в этом направлении. Основным предметом исследования является задача о порождении инволюциями матричных групп (в том числе исключительных типов) над кольцами целых чисел и целых гауссовых чисел. Остановимся подробнее на содержании диссертации. Диссертация состоит из введения, в котором дан подробный обзор текущего состояния рассматриваемых проблем, трех глав, списка литературы и приложения, в котором приведены коды программ, использовавшихся при компьютерных вычислениях. Список использованной литературы содержит 47 наименований.

В первой главе рассматривается вопрос о порождении тремя инволюциями линейных групп размерности 2 над кольцами целых и целых гауссовых чисел. В случае кольца целых чисел ответ дан в теореме 1. Показано, что группа $PGL_2(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны, а группа $GL_2(\mathbb{Z})$ порождается тремя инволюциями, но не порождается тремя инволюциями, две изкоторых перестановочны. Группы $SL_2(\mathbb{Z})$ и $PSL_2(\mathbb{Z})$ не порождаются никаким множеством инволюций. Кроме того, для групп $GL_2(\mathbb{Z})$ и $PGL_2(\mathbb{Z})$ найдено минимальное число порождающих инволюций, произведение которых равно 1 (эти числа равны 6 и 5, соответственно). Для групп над кольцом $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ показано, что $SL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ и $GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ не порождаются никаким множеством инволюций, $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ порождается тремя инволюциями, но не порождается тремя инволюциями, линейные прообразы которых перестановочны.

Наиболее интересными, с моей точки зрения, являются результаты второй главы. В ней автор доказывает, что присоединённые группы Шевалле $G_2(\mathbb{Z})$, $E_6(\mathbb{Z})$, $E_7(\mathbb{Z})$, $E_8(\mathbb{Z})$. порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Соответствующие образующие находятся в явном виде. Эти результаты представлены в теоремах 2 и 3. Доказательство представляет собой весьма удачную комбинацию теоретического исследования и компьютерных вычислений в группах Шевалле и в их матричных представлениях. При этом автор демонстрирует как глубокое понимание свойств и структуры рассматриваемых групп, так и прекрасное владение современными средствами компьютерной алгебры. Все результаты представлены в виде, удобном для проверки. Для удобства читателя в приложении представлены коды программ, использовавшихся при вычислениях в группах Шевалле, и их подробное описание. В частности, эти программы позволяют вычислять в символьном виде коммутаторы элементов, представленных в виде произведения нескольких корневых или диагональных элементов.

В третьей главе автор доказывает, что группы $SL_6(\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(p)$ для простых p порождаются тремя инволюциями (предложения 3.2.1 и 3.3.1, соответственно). Выбор этих групп не случаен и объясняется тем, что случай групп $SL_6(\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(\mathbb{Z})$ не покрывался методами прежних работ М. К. Тамбурини и Я. Н. Нужина. Автору удалось найти удачную модификацию этой техники, позволяющую дать положительный ответ на вопрос для рассматривемых групп. Стоит отметить, что вид построенных образующих для групп $SL_{10}(p)$ не зависит от p, поэтому в дальнейшем было бы интересно ответить на вопрос порождают ли эти матрицы, рассматриваемые как матрицы над кольцом $\mathbb{Z}$ всю группу $SL_{10}(\mathbb{Z})$. Однако эта задача может потребовать весьма громоздких вычислений и явно выходит за рамки диссертации.

В этой главе автору, возможно, следовало бы отметить, что для совершенных групп (2,2,2)-порождение следует из (2,3)-порождения. А (2,3)-порождение групп $SL_n(\mathbb{Z})$, $n = 6$, 10 было недавно доказано. Для $n = 6$ этот результат содержится в работе оппонента [36], а случай $n = 10$ разобран в малодоступном препринте [M. Vsemirnov. On $(2,3)$-generation of small rank matrix groups over integers // Quaderni del Seminario Matematico di Brescia.— 2008.— No. 30.— P. 1–15]. Кроме того, доказательство (2,3)-порожденности групп $SL_{10}(p^k)$ также содержится в препринте [E. Gencheva, Ts. Genchev, K. Tabakov // (2,3)-generation of the special linear groups of dimensions 9, 10 and 11.— arxiv.org/pdf/1412.8631v5.pdf]. Однако хочу подчеркнуть, что тройки порождающих инволюций, найденные автором в диссертации, являются принципиально новыми и отличны от тех, что получаются из сведения к (2,3)-образующим. Более того, предложенное автором доказательство (2,2,2)-порождения рассматриваемых групп обладает существенным достоинством: технически оно гораздо проще, чем доказательство (2,3)-порождения.

После прочтения диссертации у меня сложилось убеждение, что перед нами уже сложившийся молодой ученый, прекрасно владеющий методами исследований в рассматриваемой области . И будет замечательно, если автор не остановится на достигнутом, а продолжит свои исследования и после защиты диссертации.

В целом, текст написан ясным языком, и читателю довольно легко ориентироваться в материалах диссертации. Основное содержание каждой из глав предваряется введениями, в которых автор приводит необходимые сведения и обозначения. В случае использования результатов других работ, автор корректно их цитирует и приводит полную библиографическую информацию в списке использованной литературы.

К сожалению, в оформлении диссертации имеются отдельные недостатки. Среди недочетов такого рода укажу следующие.

- Страница 5, строки 19–21. Не удается расшифровать смысл фразы «Число $n(G)$ среди знакопеременных групп и спорадических групп количество групп, для которых число $n_c(G)$ равно 6, увеличилось на два ».

- На странице 14 достаточно рассмотреть только 2 (а не 4) типа слов из подгруппы M. Первый тип совпадает со вторым, а третий — с четвертым.

- В формулировке леммы 1.3.4 на странице 20 фраза «Тогда справедливо равенство $\alpha^{-1}\gamma\alpha = \beta^{-1}\gamma\beta$»является заключением леммы, а не частью условия 2. Поэтому это предложение следует начинать с новой строки.

- Страница 13, строка 19. В название трансвекций рассматриваемого вида обычно добавляют *элементарные*. Это же замечание относится и к терминологии на странице 20 в строках 11–12.

- В формулировках леммы 1.3.5 и предложения 1.3.6 условие «две инволюции перестановочны» следует заменить на «две инволюции, линейные прообразы которых перестановочны в $GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$».

- На странице 23 вместо доказательства предложения 1.3.6 приведен текст, относящийся к доказательству предложения 1.3.7. На самом деле, для доказательства предложения 1.3.6 (в указанной в предыдущем замечании формулировке) надо использовать результат леммы 1.3.5.

- Неудачное обозначение на странице 47, строка 10 снизу: $t_{i-1i}(t)$. Здесь t используется и как символ для обозначения трансвекции и как параметр.

- На странице 60 неудачное построение фразы «...элементы $x_r(1)$ лежат в подгруппе M для всех $r \in \Phi$, которые в силу леммы 3.2.1 порождают всю группу $SL_6(\mathbb{Z})$». С точки зрения русского языка эта фраза означает, что корни порождают группу, тогда как автор, конечно, хотел сказать, что группу порождают корневые элементы $x_r(1)$.

Автор не всегда последователен в изложении материала диссертации.

- На странице 6 упоминается $(2, 2\times 2)$-порождаемость, но формальное определение появляется только на стр. 13. Более того, на стр. 13 и далее используется двойственное обозначение $(2\times 2, 2)$.

- Во втором абзаце на странице 13 слово «действительно» вводит читателяв заблуждение. На самом деле утверждение этого абзаца является самостоятельным, а не поясняет предыдущий текст.

- На странице 14 утверждается, что лемма 1.1.1 справедлива для любого евклидова кольца. Строго говоря, тогда надо рассматривать элементарные трансвекции $t_{ij}(k)$, $k \in K$, а не только $t_{ij}(1)$,как было в лемме 1.1.1.

- Обозначение $\Phi(\mathbb{Z})$ впервые появляется в лемме 2.1.2 на странице 27, но определение дается только на странице 28.

- На странице 27 в доказательстве леммы 2.1.2 автор ссылается на [17, с. 107, следствие 3], однако точная формулировка этого утверждения из [17] появляется далее на странице 28 в виде леммы 2.1.5.

- Элементы Кокстера определяются на странице 28, однако впервые этот термин используется уже на странице 27.

- На странице 28 фраза о порождении подгруппы $H(\mathbb{Z})$ появляется дважды: перед формулировкой леммы 2.1.5 и сразу после неё.

- На странице 29 в формулировке леммы 2.1.7 сопряженный элемент $w_{c_1}^w$ понимается как $ww_{c_1}w^{-1}$, тогда как в других разделах диссертации для сопряжения используется двойственный вариант. Например, $\eta^\delta = \delta^{-1}\eta\delta$ в главе 3 на стр. 52.

- В начале странице 31 упоминается вид элементов $h_a(-1)$ и $h_{2a+2b}(-1)$ в матричном представлении группы $G_2(K)$. Однако само представление (точнее, вид образующих корневых элементов $G_2(K)$ в этом представлении) определяется только в конце страницы.

- В главе 2 на стр. 26 элементы n_r определялись как $n_r(1)$. В главе 3 на стр. 47 используется другое определение, а именно $n_r = n_r(-1)$, тогда как в последующих вычислениях (стр. 54–60), по-видимому, вновь используется $n_r = n_r(1)$. На основной результат это не влияет, так как рассматриваемые элементы являются взаимно-обратными, однако требует от читателя некоторых усилий при проверке вычислений и попытке разобраться в обозначениях. Дополнительную сложность вызывает тот факт, что в отличие от традиционных обозначений книги Картера, в которых корневым элементам для положительных корней соответствуют верхне-треугольные трансвекции, автор ставит в соответствие положительным корням нижне-треугольные трансвекции. Из-за этого получается некоторая несогласованность определений используемых в этом разделе диссертации (проблему согласования можно решить любым из трех способов: сменить знаки корней у всех рассматриваемых элементов $x_r(t)$, сменить знаки корней у всех $n_r(t)$ или определять n_r как $n_r(1)$. При этом матричные вычисления в диссертации абсолютно верные и не вызывают сомнений.

Кроме того, диссертация содержит многочисленные опечатки. Приведу список тех из них, что мне удалось обнаружить.

- Страница 5, строка 6. Дважды повторяется слово «вопрос ».

- Страница 5, строка 10. Должно быть «также »вместо «так же».

- Страница 6, строка 1. Должно быть $PSU_3(2^{2m})$.

- Страница 10, строка 3. Неудачный разрыв формулы.

- Страница 10, строка 2. Очевидно, что речь должна идти о *неабелевых* простых группах.

- Страница 13, строка 19. Поскольку здесь речь идет о произвольном кольце K, а не только о $\mathbb{Z}$, то должно быть $k \in K$.

- Страница 21, строка 3. Должно быть $t, u \in \mathbb{C}$, а не $t, u \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$.

- Страница 21, строка 6. Должно быть «с точностью до сопряжения в $GL_2(\mathbb{C})$».

- Страница 27, строки 12–13. Должно быть $\Phi(\mathbb{Z})$ вместо $\Phi(\mathbb{K})$.

- Страница 27, строка 4 снизу. Должно быть «одним из элементов».

- Страница 28, строки 10 и 13. Должно быть $H(\mathbb{Z})$ вместо H.

- Страница 30, строка 14. Должно быть $A_{ba} = -1$.

- Страница 31, строка 3 снизу. Должно быть

$$x_{2a+b}(t) = e + t(2e_{47} + e_{36} - e_{25} - e_{14}) - t^2 e_{17}.$$

- Страница 47, строки 12–13. Так как речь идет о $A_l(\mathbb{Z})$, то при определении $n_r(t)$ надо требовать $t \in \mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, а не $t \neq 0$.

- Страница 47, строка 10 снизу. Должно быть t_{i+1i} вместо t_{i-1i} (с учетом того, что далее положительным корням соответствуют нижне-треугольные матрицы).

- Страница 49. В определении χ множители $\beta\beta^{-1}$ можно сократить.

- Страница 50. В определении α_2 должен быть множитель $n_{r_3+r_4}$, а не $n'_{r_3+r_4}$

- Страница 52, строка 1. Должно быть $x_{r_2+r_3}$ вместо $xr_2 + r_3$.

- Страница 52. В определении η_4 должно быть $\eta_4 = \eta_2^\gamma$ вместо $\eta_4 = \eta_3^\gamma$

- Страница 54, вторая формула снизу. Должно быть $x^\beta_{r_1+r_2+r_3+r_4}(-1)$ вместо $x^\beta_{r_1+r_2+r_3+r_4}$.

- Страница 58, последняя формула и все формулы на странице 59. Пропущены аргументы. Должно быть $x^\beta_{r_4}(1)$ вместо $x^\beta_{r_4}$ и т.п.

- Страница 61, строки 3 и 4 снизу. Должно быть $\beta = n'_1 n'_3 n'_5 n'_7$, $\gamma = n'_2 n'_4 n'_6 n'_8$ вместо $\beta = n_1 n_3 n_5 n_7$, $\gamma = n_2 n_4 n_6 n_8$.

- Страница 62. Так как β — инволюция, то определение ρ_1 можно упростить: $\rho_1 = (\beta\alpha)^4$. Аналогичное замечание для ρ_3 на странице 63.

- Страница 64, строка 3. Второй множитель должен быть $x_{-r_7-r_8-r_9}(1)$, а не $x_{-r_7-r_8-r_9}(-1)$.

- Страница 64, строка 8. Должно быть $\phi_8 = \phi_7^{-1}\phi_4$ вместо $\phi_8 = \phi_7^{-1}\phi_3$.

- Страница 64, строка 10. Должно быть $x_{-r_7-r_8-r_9}(-2)$ вместо $x_{r_7-r_8-r_9}(-2)$.

- Страница 65, строка 14. Должно быть $x_{r_9}(1)x_{-r_9}(-1)x_{r_9}(1)$ вместо $x_{r_9}x_{-r_9}(-1)(1)x_{r_9}(1)$

- Страница 70, библиографическая ссылка [28]. Опечатка в фамилии Steinberg.

- Страница 71, библиографическая ссылка [39]. К сожалению, допущена досадная опечатка в названии журнала. Правильное название — «Сибирские электронные математические известия». При этом вся остальная библиографическая инофрмация верна, ссылка на электронный ресурс правильная, в автореферате название издания воспроизведено правильно.

- Страница 73, строка 7. Должно быть $k \in \mathbb{Z}^*$ вместо $k \in \mathbb{Z}$.

Однако все упомянутые недочеты носят технический характер. Они могут быть легко устранены и не снижают общего чрезвычайно благоприятного впечатления от диссертации.

Все основные результаты диссертации являются новыми и представляют значительный интерес для специалистов в области теории групп. Все результаты снабжены подробными доказательствами, а их достоверность не вызывает сомнений. Результаты получены автором в 2012–2017 гг. и неоднократно докладывались на всероссийских и международных конференциях. По теме диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 2 работы в рецензируемых научных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования и включенных в перечень ВАК рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук.

Автореферат диссертации правильно и полно отражает её содержание.

Считаю, что диссертация Ивана Алексеевича Тимофеенко «Порождающие мультиплеты инволюций линейных групп над кольцом целых чисел» соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», удовлетворяет всем требованиям, предъявленным ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор, Иван Алексеевич Тимофеенко, несомненно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент: Всемирнов Максим Александрович

04.12.2017

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук,
заместитель директора по научным вопросам,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН

Почтовый адрес: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, ПОМИ РАН
Телефон: (812) 312-40-58, (812) 571-55-78
E-mail: vsemir@pdmi.ras.ru

Подпись руки Всемирнова М.А.

УДОСТОВЕРЯЮ

Помощник директора
по кадрам ПОМИ РАН ____ Т.А.Долженкова

«04» декабря 2017 г.