ОТЗЫВ
оппонента на диссертацию
Сорокиной Марины Михайловны
«Формации конечных групп и их применения»,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

Рассматриваемая диссертация посвящена развитию теории формаций и её применений к исследованию и решению крупных проблем теории конечных непростых групп. По своему содержанию она полностью относится к теории групп, являющейся одним из центральных разделов современной алгебры. Таким образом, диссертация соответствует специальности 01.01.06, по которой она представляется к защите.

Основным объектом исследования в диссертации являются конечные группы и их формации (т.е. классы групп, замкнутые относительно гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений). Важность изучения классов конечных групп, отличных от таких стандартных, как нильпотентные, сверхразрешимые, разрешимые, p-группы или π-группы и т.п., была осознана благодаря появлению в 1963 году работы Гашюца, в которой он ввел понятие формации конечных групп. Последовавший за этой статьей поток исследований по теории формаций первоначально был направлен на изучение с помощью формаций подгруппового строения конечных групп, прежде всего разрешимых. Сразу же была выявлена важность локальных (насыщенных) формаций и довольно быстро был накоплен значительный опыт их применения в конечных разрешимых группах и их обобщениях для нахождения различных канонических классов сопряженных подгрупп ($\mathfrak{F}$-проекторов, $\mathfrak{F}$-нормализаторов, $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп и др.) аналогов силовских и холловых подгрупп, подгрупп Картера, системных нормализаторов Ф. Холла и др. Локальные формации также нашли широкое применение при исследовании расширений конечных групп, в частности, при решении проблем добавляемости и дополняемости в группе её нормальных подгрупп. Полученные результаты были изложены в монографиях Л.А. Шеметкова (1978 г.), Дёрка, Хоукса (1992 г.). Возникшие новые объекты и методы исследования в теории формаций конечных групп в дальнейшем были распространены на другие области алгебры: бесконечные группы, конечномерные алгебры Ли, мультикольца и др. алгебраические системы, см. монографии Л.А. Шеметкова и А.Н. Скибы (1989 г.), Мартина Диксона (1994 г.).

Отметим, что ранее в работах многих авторов (О.Ю. Шмидта, А.И. Мальцева, Б. Неймана и Х. Нейман, Р. Бэра, С.Н. Черникова, А.Г. Куроша, Б.И. Плоткина, А.Л. Шмелькина, А.Ю. Ольшанского и др.) был накоплен значительный концептуальный опыт и большой фактический материал изучения свойств алгебры классов (прежде всего бесконечных) групп, который требовал принципиально нового развития, применительно к классам конечных групп.

В 1978 году Л.А. Шеметков, синтезируя новейшие достижения теории классов конечных и бесконечных групп, в пленарном докладе, прочитанном на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп, предложил общую проблему классификации формаций конечных групп по заданным свойствам, в частности, по свойствам систем ее подформаций. В дальнейшем это направление развития теории классов конечных групп, расширенное и дополненное списком нерешенных проблем, неоднократно освещалась Л.А. Шеметковым и А.Н. Скибой в лекциях на различных международных конференциях, в их обзорных статьях и монографиях.

Исследования в этом направлении дали новый толчок развитию теории формаций, прежде всего методов их конструирования с помощью функций-спутников и изучения их алгебры. Возник целый ряд новых интересных типов формаций: n-кратно локальных, тотально локальных, ω-локальных, ω-композиционных и др. Проблемы, поставленные для них, привлекли внимание специалистов из разных стран и активно исследовались в течение последних тридцати лет в работах Л.А. Шеметкова, Дёрка, Хоукса, А.Н. Скибы, В.А. Ведерникова, С.Ф. Каморникова, В.Г. Сафонова, Н.Т. Воробьева, Баллестера-Болинше, Эсквейро, Го Вэньбиня, К.П. Шама и др. Полученные здесь результаты нашли отражение в монографиях по теории классов групп А.Н. Скибы (1997 г.) Го Вэньбиня (2000 г., 2015 г.), С.Ф. Каморникова и М.В. Селькина (2003 г.), Баллестера-Болиншеса и Эсквейро (2006 г.) и др. Вместе с этим А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым, начиная с 1999 года, на Гомельском алгебраическом семинаре ставится и регулярно обсуждается проблема о применении частично локальных, в частности, ω-локальных формаций к изучению подгруппового строения конечных непростых групп.

Целью рассматриваемой диссертации М.М. Сорокиной является дальнейшее развитие и решение открытых проблем отмеченных выше направлений теории конечных групп и их формаций на основе предложенного В.А. Ведерниковым в 1999 г. и разрабатываемого в его научной школе принципиально нового функционального подхода к изучению формаций групп. Он состоит в рассмотрении наряду с функциями-спутниками, дополнительной функции-направления, задаваемой как отображение множества всех простых чисел (класса всех простых конечных групп) во множество всех непустых формаций Фиттинга.

Сказанное выше позволяет утверждать, что тематика диссертации М.М. Сорокиной является актуальной.

Перейдем к анализу содержания диссертации. Вообще отличительной особенностью диссертации М.М. Сорокиной является ее целостность по форме и содержанию, все изложение подчинено решению выделенных в результате тщательного анализа литературных источников пяти связанных между собой Проблем (A) – (E), отражающих основные линии развития теории формаций и их приложений в последние 50 лет. Все основные результаты распределены по четырем главам.

Глава 1 является ключевой в диссертации. В параграфе 1.1 излагается разработанная автором в нераздельном сотрудничестве с профессором В.А. Ведерниковым теория ω-веерных формаций, в частности, веерных формаций, если множество ω простых чисел совпадает с множеством всех простых чисел **P**.

Пусть $f:\omega \cup \{\omega'\} \to$ {формации групп}, где $f(\omega') \neq \varnothing$, $g:\mathbf{P} \to$ {формации групп}, $\delta:\mathbf{P} \to$ {непустые формации Фиттинга} – функции, называемые соответственно ωF-функцией, $\mathbf{P}F$-функцией и $\mathbf{P}FR$-функцией. Формация $\omega F(f, \delta) = (G \in \mathfrak{E} \mid G/O_\omega(G) \in f(\omega')$ и $G/G_{\delta(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$ называется ω-веерной формацией с направлением δ и ω-спутником f. Рассматривая в качестве δ конкретные $\mathbf{P}FR$-функции, автор получает и изучает различные типы ω-веерных (веерных) формаций, среди которых находятся не только хорошо известные ω-локальные (локальные), но и новые: ω-полные, ω-специальные, ω-центральные и другие формации.

При построении ω-веерных формаций и исследовании их применений важную роль играют ω-спутники таких формаций, результаты о которых также излагаются в 1.1, где рассматриваются важные виды ω-спутников. Здесь отметим теорему 1.1.6, в которой установлено существование единственного минимального ω-спутника ω-веерной формации с направлением δ, удовлетворяющим условию $\delta_0 \leq \delta$, и дано его описание. В параграфах 1.2-1.4 найдены применения ω-веерных формаций с направлением δ_1 (ω-локальных формаций) к изучению дополняемости корадикалов в группах. При этом широкое использование получили свойства введенных в рассмотрение в параграфе 1.2 f_ω-центрального и f_ω-эксцентрального главных факторов группы. Ключевую роль здесь играет теорема 1.2.1, устанавливающая условия, при которых $\mathfrak{F}$-корадикал группы G не содержит определенных G-главных f_ω-центральных факторов для ω-локальной формации Фиттинга $\mathfrak{F}$. В параграфе 1.3 находятся условия применения ω-локальной формации $\mathfrak{F}$ к доказательству существований дополнений к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. Особо отметим теорему 1.3.4, в которой найдены условия существования ω-дополнения, нормализующего некоторую силовскую подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$, к $\mathfrak{F}$-корадикалу $G^{\mathfrak{F}}$ в любом расширении группы G.

В параграфе 1.4 получено решение Проблемы (А) (проблема Виландта 1958 г.) о дополняемости в конечной группе G $\mathfrak{F}$-корадикала $G^{\mathfrak{F}}$ без условия абелевости его силовских подгрупп для ω-локальной (локальной) формации Фиттинга $\mathfrak{F}$. С этой целью было введено определение $\omega\mathfrak{F}$-нормализатора группы G, являющееся обобщением системного нормализатора Холла, $\mathfrak{F}$-нормализатора Картера-Хоукса для разрешимых групп и Л.А. Шеметкова для произвольных групп. С помощью этого понятия в теореме 1.4.2 установлены достаточные условия, при которых $\omega\mathfrak{F}$-нормализаторы группы G являются ω-дополнениями её $\mathfrak{F}$-корадикала. В качестве следствий теоремы 1.4.2 получен ряд результатов о дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости его силовских подгрупп.

Наиболее интересной, с точки зрения рецензента, является глава 2, которая посвящена развитию теории $\mathfrak{F}$-проекторов, $\mathfrak{F}$-покрывающих подгрупп и $\mathfrak{F}$-нормализаторов групп, являющихся обобщением силовских подгрупп, холловых подгрупп, подгрупп Картера, системных нормализаторов Холла и др. Параграфы 2.1–2.3 посвящены решению Проблемы (В) (проблема Дёрка-Хоукса, 1992 г.) о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса всех конечных разрешимых групп. Ранее различными авторами (Бейдлеман, Э.Ф. Шмигирев, Шмид, Л.А. Шеметков, В.Г. Сементовский, С.Ф. Каморников и др.) эта проблема рассматривалась в различных частных случаях для локальных формации. Для примитивно замкнутых гомоморфов (классов Шунка) важные результаты были получены в работах Ковачи, Эриксона, Фёрстера, Т.И. Васильевой и др. Отметим, что в отмеченных выше случаях на рассматриваемую формацию или гомоморф обязательно накладывалось свойство закнутости относительно фраттиниевых расширений (насыщенности). Диссертантом, используя понятие ω-веерной (ω-локальной) формации, а также ω-примитивно замкнутого или, кратко, ωP-замкнутого гомоморфа, впервые удалось ослабить это требование до ω-насыщенности. Параграф 2.1 является базовым в решении Проблемы (В). В нем введено понятие ωP-замкнутого гомоморфа и изучены его свойства. Здесь определено важное понятие ω-примитивной группы и доказана теорема 2.1.1, являющаяся расширением известной теоремы Бэра о примитивных группах.

В параграфах 2.2–2.3 введены понятия $\mathfrak{F}^{\omega}$-проектора и $\mathfrak{F}^{\omega}$-покрывающей подгруппы в конечной группе и получены свойства этих подгрупп (существование, инвариантность при определенных гомоморфизмах, сопряженность, вложение), теоремы 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4–2.3.7. Из данных результатов в случае, когда ω совпадает с множеством всех простых чисел, вытекают классические результаты Гашюца, Шунка, Эриксона и других авторов. Кроме того, отмеченные выше результаты в совокупности дают полное решение отмеченной выше Проблемы (В).

Параграфы 2.4–2.6 главы 2 посвящены решению Проблемы (Е): разработать теорию $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторов, где $\mathfrak{F}$ – произвольная ω-локальная формация. Параграф 2.4 имеет подготовительный характер. В нем вводятся важные понятия $\mathfrak{F}^{\omega}$-предельной и $\mathfrak{F}^{\omega}$-критических подгрупп и изучаются их свойства: леммы 2.4.1-2.4.4, которые используются при доказательстве основных утверждений следующих двух параграфов 2.5-2.6.

Центральное место занимает параграф 2.5, в котором определяется понятие $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатора и получены его основные свойства, определение 2.5.1 и теоремы 2.5.1-2.5.3. Подтверждением содержательности предложенной концепции $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатора является теорема 2.5.5, в которой для ω-локальной формации Фиттинга получены достаточные условия дополняемости $\mathfrak{F}$-корадикала группы G ее $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализаторами. Таким образом, теорема 2.5.5 вместе с ранее полученной теоремой 1.4.2 в совокупности дают полное решение проблемы Виландта (Проблемы (А)).

Отметим, что в качестве частных случаев результатов главы 2 получаются классические результаты о $\mathfrak{F}$-нормализаторах Картера, Хоукса и Л.А. Шеметкова, а также новые ранее неизвестные. Они также включают недавние результаты С.Ф. Каморникова и О.Л. Шеметковой.

Решению Проблемы (С) (проблема Л.А. Шеметкова 1978 г. изучения $\mathfrak{H}_{\theta}$-критических формаций, где $\mathfrak{H}$ – класс групп, θ – некоторая совокупность формаций) посвящены главы 3 и 4 диссертации. Напомним, формация $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{H}_{\theta}$-критической, если $\mathfrak{F} \in \theta$, $\mathfrak{F} \not\subset \mathfrak{H}$, но все собственные θ-подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе $\mathfrak{H}$. Данная проблема для различных конкретных θ решалась в многочисленных работах А.Н. Скибы и его учеников (В.Г. Сафонов, В.М. Селькин, И.Н. Сафонова и др.). При этом в качестве аппарата исследований дополнительно использовались понятия подгрупповых функторов, т.е. согласованных с изоморфизмами функций, выделяющих некоторые системы подгрупп, а также концепция А.Н. Скибы n-кратно локальных формаций.

Проблема (С) решена в параграфах 3.1-3.2 для n-кратно ω-веерных формаций с bp-направлением, теоремы 3.1.1 и 3.1.2; в параграфах 3.3 и 3.4 для τ-замкнутых ω-веерных формаций с направлением δ, теоремы 3.4.1 и 3.4.2. Интерес представляют результаты параграфа 3.2, где изучен частный случай критических n-кратно ω-веерных формаций с bp-направлением при $n = 1$.

В главе 4 построена теория Ω-расслоенных формаций конечных групп (решение Проблемы (D)) и найдено её применение к решению Проблемы (С). Понятие Ω-расслоенной формации является развитием уже ставшей классической концепции композиционной формации, предложенной и разработанной Л.А. Шеметковым и Бэром в 1972-1980 гг., а также введенного в 1999 г. А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым в качестве обобщения композиционной формации понятия L-композиционной формации, где L – некоторый класс простых групп. Отметим, что данные типы формаций являются примерами Ω-расслоенных формаций для заданных конкретных направлений. В параграфе 4.1 рассматриваются также другие примеры Ω-расслоенных формаций. В параграфе 4.2 изучаются максимальные подформации Ω-расслоенных формаций. Здесь центральным результатом является теорема 4.2.1, устанавливающая условия, при которых однопорожденная Ω-расслоенная формация имеет единственную максимальную Ω-расслоенную подформацию. В параграфе 4.3 исследованы свойства τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций, где τ – подгрупповой функтор. Здесь можно выделить красивую теорему

4.3.1, устанавливающую взаимосвязь между τ-замкнутостью Ω-расслоенной формации и τ-замкнутостью ее Ω-спутника. Наконец, в параграфе 4.4 в теоремах 4.4.1 и 4.4.2 решается Проблема (С) для τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций с заданным направлением (br-направлением).

Все содержащиеся в диссертации результаты, в том числе, которые автор вынес на защиту, являются абсолютно новыми. Впервые они были получены автором диссертации.

Все утверждения (теоремы, леммы, следствия), сформулированные в диссертации, снабжены подробными и полными доказательствами. Использованные на отдельных этапах рассуждений факты, не доказываемые в тексте, приведены с точными ссылками на публикации в рецензируемых научных изданиях (монографии, статьи в научных журналах), в которых они доказаны. Этим гарантирована полная обоснованность и достоверность всех содержащихся в диссертации результатов.

Результаты диссертации получены автором в 1999-2017 гг. и полностью опубликованы в 33 научных трудах. Основные положения и выводы диссертации опубликованы в 16 статьях из перечня ВАК России, из которых 10 входят в международные базы данных и системы цитирования. Диссертация прошла солидную апробацию на ведущих профильных семинарах (кафедра Высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова, «Алгебра и логика» Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Красноярский алгебраический семинар, семинар отдела алгебры и топологии Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Гомельский алгебраический семинар и др.), на Международных и Всероссийских конференциях.

Диссертационная работа имеет теоретический характер. Ее научная значимость следует хотя бы из того факта, что в ней содержится решение целого ряда крупных проблем, поставленных специалистами высокого международного уровня. Результаты диссертации, а также методы, разработанные для их доказательства, могут быть использованы (и уже используются) в дальнейших исследованиях по теории конечных непростых групп и их формаций, проводимых в научных центрах России, Республики Беларусь и других стран. Они могут быть использованы при чтении специальных курсов и подготовке курсовых, дипломных, диссертационных работ.

Работа хорошо оформлена, написана ясным языком. Из недостатков диссертации отметим следующие. В некоторых случаях нет единообразия в названии понятий, например, самонормализуемая нильпотентная подгруппа называется картеровой подгруппой (с. 4, 5) и подгруппой Картера (с. 7). На наш взгляд, расположение материала по главам не является оптимальным. В диссертационной работе известные используемые результаты вынесены отдельным параграфом в конце каждой главы и некоторые из них дублируются (например, на с. 80 и с. 132 [13] лемма 2, [18] лемма 1.44). Поэтому все вспомогательные результаты лучше было бы собрать в одной главе. Отметим, что центральные в работе концепции $\omega\mathfrak{F}$-нормализатора и $\mathfrak{F}^{\omega}$-нормализатора и основанные на них важные теоремы 1.4.2 и 2.5.5, решающие проблему Виландта (Проблема А) о дополнениях к $\mathfrak{F}$-корадикалам, расположены в различных главах, что приводит к необходимости дополнительных усилий для читателя в восприятии этого материала. Все отмеченные недочеты носят технический характер и не снижают общего весьма благоприятного впечатления о диссертации.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Подводя итоги, отметим следующее. Основными достижениями автора диссертации являются разработанные ею оригинальные функциональные методы построения формаций конечных групп, позволившие значительно продвинуться в понимании структурного строения конечных непростых групп, в частности, их расширений, найти новые классы канонических подгрупп, существенно расширить многие известные результаты, входящие в ядро современной теории групп и их формаций, а также решить основные проблемы в данной области алгебры, поставленные в разное время известными специалистами, в том числе:

- Проблему (совместно с В.А.Ведерниковым) Виландта 1958 г. о дополняемости в конечной группе $\mathfrak{F}$-корадикала без условия абелевости ее силовских подгрупп для ω-локальной (локальной) формации Фиттинга $\mathfrak{F}$;
- Проблему Дёрка-Хоукса 1992 г. о расширении универсума, в котором работает теория проекторов, за пределы класса всех конечных разрешимых групп;
- Проблему Л.А. Шеметкова 1978 г. об описании $\mathfrak{H}_\theta$-критических формаций для n-кратно ω-веерных, τ-замкнутых ω-веерных, τ-замкнутых Ω-расслоенных формаций;
- Проблему В.А. Ведерникова 1999 г. о построении теории ω-веерных и теории Ω-расслоенных формаций;
- Проблему А.Н. Скибы и Л.А. Шеметкова, поставленную ими на Гомельском алгебраическом семинаре в 1999 г., о применении частично локальных, в частности, ω-локальных формаций к изучению подгруппового строения конечных непростых групп.

Считаю, что диссертация Марины Михайловны Сорокиной «Формации конечных групп и их применения» соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор, Марина Михайловна Сорокина заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук.

Официальный оппонент: АВас Васильев Александр Федорович

Профессор кафедры алгебры и геометрии
учреждения образования «Гомельский
государственный университет имени
Франциска Скорины»,
доктор физико-математических
наук, доцент

Почтовый адрес:
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
ул. Советская, 104, г. Гомель, Республика Беларусь, 246019
Тел. 8-10-375-232-398-86-36
E-mail: formation56@mail.ru

Подпіс А.Ф. Васильев
ЗАВЯРАЮ
Начальнік аддзела кадраў
установы адукацыі "Гомельскі дзяржаўны
ўніверсітэт імя Францыска Скарыны"
( )

1.02.2018

Установа адукацыі "Гомельскі дзяржаўны ўніверсітэт імя Францыска Скарыны" Рэспублікі Беларусь
АДДЗЕЛ КАДРАЎ