

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу Тимошенко Егора Александровича «Идемпотентные радикалы в категории модулей, сsp-кольца и модули над ними», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертации Е.А.Тимошенко исследуются идемпотентные радикалы модулей, а также сsp-кольца и модули над такими кольцами. Вторая и третья главы посвящены идемпотентным радикалам. Основы теории радикалов колец и алгебр были заложены в середине XX века А.Г.Курошем и Ш.Амицуром, после чего стали рассматриваться и радикалы других алгебраических структур. Глава 2 диссертации посвящена исследованию тензорно порожденных радикалов категории абелевых групп с привлечением методов теории решеток. В главе 3 анализируются связи между идемпотентными радикалами модулей и важными понятиями $T(e)$ -модуля и $E(e)$ -модуля и ставится вопрос об аппроксимации какого-либо радикала при помощи радикала, обладающего дополнительными «хорошими» свойствами. Глава 4 посвящена сsp-кольцам и модулям над ними. Эти кольца были предложены П.А.Крыловым в качестве естественного обобщения колец псевдорациональных чисел. Последние, в свою очередь, были независимо введены П.А.Крыловым и А.А.Фоминим в конце 1990-х годов с целью изучения ряда важных классов абелевых групп (sp-группы и факторно делимые группы). Тем самым было инициировано исследование модулей сначала над кольцами псевдорациональных чисел, а впоследствии и над сsp-кольцами. Успехов в этом добились ученики А.А.Фомина (С.В.Чеглякова и А.В.Царев) и П.А.Крылова (Е. Г. Зиновьев). Данная работы в значительной степени продолжает указанные исследования. В диссертации развито также новое направление по изучению сsp-колец и их базовых полей с помощью кардинальных характеристик континуума. В работе использованы методы теорий колец и модулей, абелевых групп, решеток, а также теории множеств. Тематика диссертации, представляющая собой глубокое алгебраическое исследование, является актуальной. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списков литературы и обозначений. В главе 1 приводятся необходимые основные понятия и факты. Во главе 2 изучаются тензорно порожденные радикалы категории абелевых групп. В §7 полностью описаны тензорно порожденных радикалов, а теорема 7.6 описывает строение образуемой этими радикалами решетки. В §8 рассмотрены свойства замкнутости радикальных классов идемпотентных радикалов. Основной здесь является теорема 8.4 о том, что идемпотентный радикал тензорно порожден в точности тогда, когда его радикальный класс

замкнут относительно сервантных подгрупп. Рассмотрен также вопрос о том, когда радикальный класс тензорно порожденного радикала замкнут относительно взятия подгрупп, p -сервантных подгрупп, слабо сервантных подгрупп или относительно прямых произведений. В §9 изучаются решеточные свойства тензорно порожденных радикалов. Здесь главным результатом является теорема 9.8, показывающая, что «решеточное» пересечение таких радикалов будет совпадать с «поточечным». Отмечу пример 9.11, показывающий, что подрешетка, порожденная в большой решетке всех идемпотентных радикалов множеством всех тензорно порожденных радикалов, не является модулярной. Из этого же примера видно, что для произвольных идемпотентных радикалов категории абелевых групп теорема 9.8 не верна. В главе 3 рассматриваются идемпотентные радикалы категории модулей над произвольным кольцом. Основное внимание уделено радикалам, связанным с основными модульными функторами: тензорным произведением и функтором Hom . В §10 определяется T -радикал и E -радикал, связанные с ранее введенными в работах П.А.Крылова и М.А.Приходовского $T(e)$ -модулями и $E(e)$ -модулями, и исследуются свойства этих радикалов. В §11 решается связанная с изучением $T(e)$ -модулей и $E(e)$ -модулей задача аппроксимации радикала, порожденного (в каком-либо смысле) некоторым S -модулем, при помощи радикала, порожденного S - S -бимодулем. Ответ получен для тензорно порожденных радикалов (теорема 11.5), порожденных каким-либо модулем радикалов (теоремы 11.7 и 11.8) и для копорожденных каким-либо модулем радикалов (теоремы 11.10 и 11.11). Интересно, что полученные теоремы 11.8 и 11.11 описывают один и тот же класс колец, называемый автором классом правых br -колец. В §12 изучены свойства таких колец. Так, из теоремы 12.12 следует, что совершенные справа или слева, регулярные по фон Нейману и простые кольца являются правыми br -кольцами. Построены примеры, показывающие, что ни из примитивности, ни из локальности, ни из свойства быть левым br -кольцом в общем случае не следует свойство «быть правым br -кольцом».

Глава 4 посвящена csp -кольцам и модулям над ними. В §13 и §14 рассматривается вопрос о том, в каких случаях заданное поле реализуется в качестве базового поля csp -кольца. Для этого активно применяются так называемые кардинальные характеристики континуума, что можно охарактеризовать как принципиально новый подход к изучению колец и полей. В частности, Е. А. Тимошенко для исследования базовых полей вводит новую кардинальную характеристику ie и исследует ее свойства. Особо следует отметить, что теоремы реализации для базовых полей, полученные в §13 и §14, можно рассматривать также как теоремы реализации для колец эндоморфизмов

абелевых групп в подходящих категориях (рассмотрение подобных проблем реализации давно представляет собой одну из важнейших частей теории колец эндоморфизмов). В §15 полностью описаны проективные модули над csp -кольцами. В теореме 15.9 показано, что предложенная А. В. Царевым для такого описания система кардинальных инвариантов является полной. В процессе доказательства теоремы 15.9 использованы новые подходы, связанные с использованием определителей и матриц с элементами из csp -колец. Теорема 15.10 говорит о том, какие условия должны быть наложены на набор кардиналов, чтобы он мог служить системой инвариантов некоторого проективного модуля. §16 посвящен исследованию тензорных произведений в категории модулей над csp -кольцом. Здесь главными результатами являются теорема 16.7, описывающая все плоские модули, и теорема 16.8, которая дает критерий чистоты подмодуля (в смысле Кона). Последний §17 посвящен идемпотентным радикалам в категории модулей над csp -кольцом. Теорема 17.9 дает описание решетки, которая образована такими радикалами. Получено описание кручений и кокручений в указанной категории (теоремы 17.12 и 17.14). Доказан также ряд результатов, служащих аналогами результатов о радикалах абелевых групп из второй главы: так, теорема 17.19 - это аналог теоремы 9.8.

Все основные результаты диссертационной работы являются новыми. Они снабжены подробными доказательствами, которые не вызывают сомнений в своей достоверности. Главные результаты диссертации докладывались на ряде международных и всероссийских конференций и симпозиумов, а также на семинарах по алгебре в Томском государственном университете, в Сибирском федеральном университете и в ИМ СО РАН. Структура работы хорошо продумана и удобна для чтения, приведены все необходимые обозначения и определения.

Отмечу некоторые недостатки.

- 1) Во введении к диссертации на страницах 4–5 сказано, что в работе А. А. Фомина 2001 года факторно делимые группы рассматриваются как модули над кольцом псевдорациональных чисел. Здесь автору следовало бы выразиться более аккуратно, поскольку лишь некоторые факторно делимые группы являются такими модулями, а в общем случае факторно делимая группа вкладывается в некоторую группу, которая затем рассматривается как модуль над кольцом псевдорациональных чисел.
- 2) При перечислении свойств кардинальной характеристики ie как во введении к диссертации, так и в автореферате пропущено как минимум одно важное свойство (предложение 13.13).


3) Условие (B) в теореме 15.10 можно было бы сформулировать гораздо короче: те кардинальные числа \mathfrak{M}_p , которые строго меньше, чем кардинал \mathfrak{M} , образуют последовательность, сходящуюся к \mathfrak{M} .

Указанные недостатки не снижают научных достоинств диссертации и не влияют на общее благоприятное впечатление о работе.

Диссертация «Идемпотентные радикалы в категории модулей. csp-кольца и модули над ними» является завершенной научно-исследовательской работой, содержащей глубокие результаты. Диссертационная работа представляет собой заметный вклад в теорию модулей и теорию абелевых групп, а также может быть использована при чтении спецкурсов. Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертации. Поэтому считаю, что работа отвечает требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор – Тимошенко Егор Александрович – заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Профессор кафедры высшей математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «МЭИ»»,

111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, 14,
доктор физико-математических
наук по специальности 01.01.06,
профессор


Туганбаев Аскар Аканович
e-mail: tuganbaev@gmail.com

30.12.2015г.

Подпись А.А. Туганбаева заверяю



начальник управления кадров

Сергей Е. В. Баранов