ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
Михалкина Евгения Николаевича
"Аналитические аспекты теории алгебраических функций",
представленную на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.01
– вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность темы. Теория алгебраических функций является одним из интенсивно развиваемых направлений в современной математике, находящихся на стыке комплексного анализа и алгебраической геометрии. Основные проблемы теории алгебраических функций по своей природе носят алгебро-геометрический характер, и эффективность методов комплексного анализа, применяемых для их решения, показывает глубокую взаимосвязь этих двух областей фундаментальной математики. Это отражено как в монографической и учебной литературе – достаточно привести в пример монографию Ф.Гриффитса и Дж.Харриса "Принципы алгебраической геометрии", написанную целиком на языке комплексного анализа, – так и в новейших исследованиях по кэлеровой, гиперкэлеровой и симплектической геометрии и многим другим актуальным направлениям, к числу которых принадлежит и теория алгебраических функций и в которых комплексный анализ играет важнейшую роль. В частности, в классических работах по теории алгебраических функций, принадлежащих Эрмиту, Кронеккеру, Линдеманну, Меллину, Биркеланду, были получены формулы, выражающие алгебраические функции в терминах эллиптических функций, гипергеометрических рядов, а также кратных контурных интегралов от нескольких комплексных переменных, называемых интегралами Меллина-Барнса. Изучение интегральных представлений алгебраических функций интенсивно проводилось в последние десятилетия, в частности, после открытия М.М.Капрановым их связи с гипергеометрическими функциями. В частности, целый ряд результатов в этом направлении был получен в работах отечественной красноярской школы комплексного анализа, руководимой А.К.Цихом.

Настоящее диссертационное исследование представляет собой новое интересное развитие комплекса идей, связанных с применением многомерного комплексного анализа в теории алгебраических функций. Первая глава диссертации начинается с построения нового представления алгебраической функции как общего решения приведенного алгебраического уравнения в виде ветвящегося интеграла по отрезку от явного выражения, конструируемого из элементарных функций от координаты в отрезке и комплексного логарифма (теорема 1 диссертации). Это новое представление алгебраических функций отличается от ранее известных интегрального представления Меллина-Барнса и представления Меллина гипергеометрическим рядом, имеющих секториальную и соответственно поликруговую области сходимости. Найденное диссертантом представление и обладает тем несомненным преимуществом, что оно определено на плотном подмножестве пространства коэффициентов уравнения, задающего алгебраическую функцию, то есть на максимально широкой области, на которой имеет смысл рассматривать алгебраические функции в рамках комплексного анализа. При этом в первой главе точно описаны соответствующие многомерные разрезы, разделяющие ветви агебраической функции. Эти разрезы представляют собой полуаналитическую вещественную гиперповерхность, заметаемую одномерным вещественным семейством комплексных гиперповерхностей, распадающихся в объединения гиперплоскостей. Кроме того, в этой же главе найдена модификация полученного интегрального представления для решений приведенного алгебраического уравнения второго типа. Найдены также новые формулы для решений широкого класса так называемых триномиальных и тетраномиальных уравнений.

Вторая глава диссертации посвящена описанию монодромии алгебраических функций. Это описание оказывается тесно связанным с дискриминантным множеством исходного уравнения - комплексной гиперповерхностью в пространстве коэффициентов. Дискриминантная гиперповерхность обладает многозначной параметризацией открытыми кусками комплексного проективного пространства, и рассматривается образ при отображении параметризации соответствующей открытой части вещественного проективного пространства как вещественного подмногообразия в комплексном проективном пространстве. Этот образ есть набор вещественных подмногообразий в дискриминантной гиперповерхности, называемых струнами. Автор рассматривает аналитическое продолжение алгебраической функции, задаваемой гипергеометрическим рядом Меллина, за границу области сходимости ряда. Один из основных результатов второй главы – теорема 7 – утверждает, что при таком продолжении каждая ветвь алгебраической функции имеет простейшее ветвление в паре соседних струн. Другое описание монодромии основано на разработанном автором логарифмическом методе, связанном с интегральным представлением алгебраических функций, полученным в первой главе. Этот метод использует свойства амебы и коамебы, получаемых соответственно из областей сходимости гипергеометрического ряда и интеграла Меллина-Барнса, представляющих алгебраическую функцию. Во втором основном результате второй главы – теореме 11 – описываются аналитические продолжения гипергеометрического ряда в виде многозначных рядов Пюизо и указываются их области сходимости. Это дает полный спиок всех центрированных в нуле степенных разложений алгебраических функций как решений приведенного уравнения.

Третья глава диссертации посвящена исследованию стратификации дискриминантной гиперповерхности для общего алгебраического уравнения, в которой стратами являются локально замкнутые подмножества пространства коэффициентов, параметризующие уравнения с корнями фиксированной кратности. Замыкания этих стратов образуют фильтрацию дискриминантной гиперповерхности, причем каждый последующий член фильтрации лежит в особенностях предыдущего члена. Один из главных результатов третьей главы – теорема 17 – показывает, что члены этой фильтрации мономиальными преобразованиями сводятся к некоторым так называемым A-дискриминантным множествам в смысле Гельфанда-Капранова-Зелевинского. Другим важным результатом этой главы является теорема 19, показывающая, что члены вышеуказанной фильтрации дискриминантной гиперповерхности приведенного уравнения совпадают с критическими стратами параметризации этой гиперповерхности по Горну-Капранову. Примечательно, что эти результаты, носящие чисто алгебро-геометрический характер, доказываются средствами комплексного анализа.

Результаты четвертой главы лежат на стыке алгебраической геометрическии и теории особенностей. Они дают явные формулы для нахождения особых точек многомерных комплексных алгебраических гиперповерхностей с изолированными особенностями. В этом случае коэффициенты уравнений этих гиперповерхностей необходимо принадлежат соответствующему A-дискриминантному множеству, поэтому полученные формулы выражают координаты особенностей как функции от точки из A-дискриминантного множества (теорема 20). В этой же главе получено максимально возможное обобщение этих формул на случай особенностей нульмерного аналитического пространства, задаваемого как полное пересечение алгебраических гиперповерхностей в многомерном пространстве. Найденные формулы (теорема 23) также дают параметризацию особенностей точками соответствующего A-дискриминантного множества.

Основные результаты диссертации. Суммируя вышесказанное, отметим следующие основные результаты диссертации.

– Получена новая формула в виде ветвящегося интеграла, с помощью которой вычислена монодромия общей алгебраической функции в окрестности области сходимости представляющего ее гипергеометрического ряда Меллина.

– Построен новый, так называемый логарифмический метод аналитического продолжения алгебраических функций.

– Исследованы сингулярные страты каспидального типа для классического дискриминантного множества. Доказано, что такие страты мономиальными преобразованиями переводятся в A-дискриминантные множества, тем самым предсказано существование иерархии между стратами всех A-дискриминантных множеств.

– Впервые получены явные аналитические формулы для особых точек общих алгебраических гиперповерхностей.

Научная новизна и степень обоснованности результатов диссертации. Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Они снабжены полными и строгими математическими доказательствами. Результаты полностью опубликованы в центральных математических журналах и журналах, рекомендованных к опубликованию ВАК РФ. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Замечания. Следующие замечания носят в основном терминологический или стилистический характер.

На страницах 21 и 114 в формулировке теоремы 18 следует заменить слово "плоскости" на "подпространства".

В последней строке на странице 24 выражение "0-мерных алгебраических поверхностей" следует заменить на "0-мерных аналитических пространств".

На странице 38, в первой строке пункта 4.1, следует исправить букву p на l.

В последней строке на странице 90 следует убрать повторяющуюся фразу "дискриминантного множества уравнения (3.8)".

На страницах 50, 90, 116, 155 в написании многозначного отображения параметризации, как определенного не на всем проективном пространстве, а на его открытом плотном подмножестве, предпочтительнее использовать пунктирную стрелку " $\dashrightarrow$ " вместо обычной стрелки " $\rightarrow$ ".

В первой строке пункта 3.1.2 на странице 89 пропущено слово "обладает".

В первой строке пункта 3.4.1 на странице 115 после слова "бирационально" следует добавить фразу "на свой образ".

В строке перед формулировкой теоремы 19 фразу "гласит, что" следует заменить на "гласит следующее.", а в следующей строке писать "Теорема 19." жирным шрифтом.

Необходимо отметить, что все вышеуказанные замечания нисколько не влияют на математическое содержание диссертации.

В заключение следует заметить, что настоящая диссертационная работа является законченным математическим исследованием и представляет собой новый существенный вклад в теорию алгебраических функций и ее приложения в комплексном анализе, алгебраической геометрии и теории особенностей. Диссертация написана ясным и точным математическим языком. Считаю, что диссертация "Аналитические аспекты теории алгебраических функций" удовлетворяет требованиям пп. 9-11 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" постановления Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, а ее автор, Михалкин Евгений Николаевич, несомненно заслуживает присвоения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"
доктор физико-математических
наук по специальности 01.01.06 –
"математическая логика, алгебра и теория чисел"
профессор, факультет математики,
профессор

Тихомиров Тихомиров Александр Сергеевич
12. 01. 2016 г.

Почтовый адрес: 117312, Москва, ул. Вавилова, 7, к. 303.
тел. +7(495)7729590*44188
E-mail: astikhomirov@mail.ru

Подпись заверяю
ЗАМЕСТИТЕЛЬ НАЧАЛЬНИКА
УПРАВЛЕНИЯ ПЕРСОНАЛА
ГОРОДИСКАЯ Ю.Н.