Отзыв официального оппонента на диссертацию Дмитрия Владимировича Кручинина "Метод получения явных выражений полиномов на основе степеней производящих функций", представленную в диссертационный совет Д 999.040.02 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Д.В.Кручинина посвящена получению новых явных формул и изучению свойств широкого класса специальных полиномов (Бернулли, Лагерра, Эрмита, Хумберта, Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча, Махлера, Мотта), являющихся важным инструментом математического анализа, на основе степеней производящих функций. Также им получены новые комбинаторные тождества для полиномов Бернулли и Мотта.

Автор вводит важное, центральное понятие композиты производящей функции - последовательности коэффициентов некоторой фиксированной степени этой производящей функции и развивает своеобразную арифметику, исчисление композит, связанных с операциями сложения, умножения,сдвига, суперпозиции и обращения производящих функций, что позволяет ему далее эффективно получать явные формулы специальных полиномов и доказывать комбинаторные тождества. В этом состоит новизна метода диссертанта.

Диссертация состоит из введения, где сформулирована цель и обоснована актуальность исследований, трех глав, заключения, списка литературы и приложения с актом о внедрении результатов работы Д.В.Кручинина в учебный процесс.

Перечислим замечания.

1. В выводах из первой главы (стр.20) и на стр.7 автореферата написано, что "единого и прямого метода в получении явных формул для специальных полиномов до настоящего времени не было предложено". Ответом на это может служить цитата из монографии Н.Я Виленкина "Специальные функции и теория представлений групп 1991 г. :"С первого взгляда теория специальных функций (в частности,многочленов Якоби, Лагерра, Эрмита ...) представляется хаотическим набором формул. Установить какой-либо порядок в этом хаосе формул кажется совершенно безнадежной задачей. Однако, Э.Картаном в 1929 г. была впервые открыта связь между специальными функциями (полиномами) и представлениями групп. Целью книги является систематическое изложение теории специальных функций с групповой точки зрения".

2. При перечислении способов задания специальных полиномов (стр.14) стоит добавить "с помощью интегральных представлений", см., например, цитированную в диссертации монографию Г.П.Егорычева "Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм", 1977 г.

3. На стр.21 приводится цитата из учебника А.И.Маркушевича о трудностях,связанных с получением суперпозиции двух функций, но еще в декабре

1855 г. опубликована формула Франческо Фаа ди Бруно n-ой производной сложной функции,откуда следует возможность разложения этой функции в степенной ряд. Формула эта приводится на стр.54 учебника А.Кофмана "Введение в прикладную комбинаторику", 1975 г. наряду со списком полиномов Белла. Есть она и в цитированных в диссертации монографиях Риордана, Стенли и Комте.

4. На стр.24 в Теореме 1 приводится рекуррентное выражение коэффициентов k-ой степени степенного ряда $A(x)$,но не упоминается явная формула возведения в степень степенных рядов:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(k! \sum_{\left\{\begin{array}{c} k = i_0 + \ldots + i_n \\ n = 1i_1 + \ldots + ni_n \end{array}\right\}} \frac{a_0^{i_0} a_1^{i_1} \ldots a_n^{i_n}}{i_0! i_1! \ldots i_n!}\right) x^n .$$

5. Для деления рядов (стр.37, определение 12 взаимных производящих функций) не упоминается и не используется удобная формула из цитированной в диссертации книги А.И.Маркушевича:

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta[n]}{b_0^{n+1}} x^n ,$$

где

$$\Delta[n] = \left|\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n \\ 0 & b_0 & b_1 & \ldots & d_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & b_0 & \ldots & b_{n-3} & b_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 \end{array}\right| .$$

6. При обращении степенных рядов (стр.40), неплохо бы кроме цитируемой формулы Лагранжа использовать удобную формулу Сильвестра 1854 г.: если $w = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k (a_1 \neq 0)$,то $z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n$, где

$$c_n = \frac{1}{n! a_1^n} \sum_{1i_2 + \ldots + (n-1)i_n = n-1} \frac{(n + i_2 + \ldots + i_n - 1)!}{i_2! \ldots i_n!} (-\frac{a_2}{a_1})^{i_2} \ldots (-\frac{a_n}{a_1})^{i_n} .$$

Эта формула эффективна в применении к функции $F(x) = x - x^2 - x^3$ на стр.42 данной диссертации.

7. На стр.32 нужно выделить конец доказательства теоремы 10, тогда следующая фраза пойдет как следствие или замечание.

8. На стр.34 должны стоять композиты F^{Δ}.

9. На стр.49 непонятна фраза "в частных дифференциальных уравнений".

10. На стр.3 автореферата сообщается, что "можно найти и другие, более громоздкие формулы для коэффициентов", на стр. 56 и 63 диссертации автор отмечает, что его новые явные формулы для полиномов Бернулли 2-го рода и полиномов Лагерра сложнее уже известных (первая так намного сложнее). Хорошо бы напрямую вывести эквивалентность этих формул известным, используя, например, метод доказательства тождеств Г.П.Егорычева и промотивировать необходимость и пользу такой сложности и громоздкости.

11. Нужно объяснить, что значит "убывающий факториал" для вещественного аргумента на стр.61.

12. На страницах 65, 67 в подробных доказательствах вдруг появляется фраза "после простых манипуляций".

13. На стр.69 опущено требование $C \neq 0$, хотя это очевидно из контекста.

14. На стр.82, видимо, имеется в виду "произвольного вещественного параметра α", а написано "произвольного иррационального параметра α", и тут же взято $\alpha = \frac{1}{2}$.

Все результаты второй главы получаются и перечисленными классическими формулами (Сильвестра, Фаа ди Бруно, возведения в степень и т.д.), но затем становятся ясными удобство,простота и высокая эффективность вычислений в терминах нового понятия композиты и необходимого аналитического аппарата, своеобразного исчисления, разработанного в диссертации Д.В.Кручинина. Во всем блеске это проявляется в третьей главе. Даже удивительно как такое, в общем-то простое понятие - коэффициент степени степенного ряда - позволяет легко выводить явные громоздкие трудоемкие при других подходах формулы обобщенных полиномов Эрмита, полиномов Стирлинга, Петерса, Наруми, Лерча, Махлера, Мотта и т.д., искусно выбирая каждый раз нужный вид производящей функции, чтобы стали применимы формулы из списка второй главы.

После впечатляющих явных формул композиции автору можно обратиться к работам типа Von Ernst Schroder "Über iterirte Functionen Math.Ann., 1869. Одно упоминание о таких задачах есть на стр.45 диссертации. Интересно бы увязать этот эффективный подход к специальным функциям с методом теории представлений групп Картана, Гельфанда, Виленкина и др.

Все научные положения и результаты, выносимые на защиту, обоснованы, доказаны и опубликованы в 9 изданиях из списка рекомендованных ВАК. Автореферат полностью отражает содержание диссертации. Сделанные замечания не влияют на существо диссертационной работы.

Считаю, что диссертационная работа "Метод получения явных выражений полиномов на основе степеней производящих функций"удовлетворяет требованиям п.9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней" по специальности 01.01.01 - вещественный комплексный и функциональный анализ, а ее автор - Кручинин Дмитрий Владимирович заслуживает присуждения ему степени кандидата физико- математических наук.

Кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО "Сибирский федеральный университет",
кафедра высшей математики 1, доцент
Степаненко Виталий Анатольевич

Почтовый адрес:
ФГАОУ ВО "Сибирский федеральный университет",
пр. Свободный, 79, г. Красноярск, 660041, Россия
тел. (391) 206 21 16
e-mail:v-stepanen@mail.ru

ФГАОУ ВО СФУ
Подпись Степаненко В.А. заверяю
Начальник общего отдела
«29» 04 2016