

ОТЗЫВ официального оппонента  
о диссертации Михалкина Евгения Николаевича  
"АНАЛИТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ" , представленной на соискание  
ученой степени доктора физико-математических наук по специальности  
01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Михалкина Е.Н. посвящена изучению классической задачи математики, связанной с решением алгебраических уравнений. Известное утверждение о неразрешимости в радикалах уравнений пятой и более высоких степеней и практическая необходимость использования решений алгебраических уравнений и систем в современных математических исследованиях выступают в такой ситуации диалектическим противоречием, продвигающим и развивающим математику.

Желание "решить" алгебраическое уравнение высокой степени переносится в связи с этим на изучение семейств функций, по возможности, близких к классическим элементарным функциям, в терминах которых удается реализовать идеи такого решения.

Достаточно обширный обзор результатов, полученных в этом направлении от времен Галуа до последних достижений математики, приведен во введении к диссертации. Следует, правда, отметить некоторую небрежность (недостаточно четкое введение обсуждаемых понятий, неожиданные исчезновения коэффициентов, переходы без пояснений с одних обозначений на другие), проявленную диссертантом при написании введения. Вместе с тем представление об истории развития и современного состояния задачи о решении алгебраических уравнений это введение дает, причем представление достаточно подробное. Тем самым, автор показывает себя специалистом, досконально разбирающимся в изучаемых вопросах, ориентирующимся в тонких и сложных аспектах теории специальных функций, интегральных преобразований, алгебраической геометрии.

Введение можно признать несколько затянутым и перегруженным, учитывая небольшой объем всей диссертации. Этот момент, как и упомянутая выше неаккуратность оформления введения, показывают, что диссертанту стоило бы более внимательно и тщательно работать над текстами своих трудов.

Отметим, что "естественное" или "наивное" представление о докторской диссертации, исторически устоявшееся в Российской математике еще с советских времен, подразумевало, например, решение в такой диссертации крупной научной проблемы или разработку нового направления. Видимо, было бы возможным связывать ожидания такого сорта с заявленной тематикой диссертации. Однако получение "окончательных" ответов на вопросы о том, "как решать" произвольные алгебраические уравнения, какие (универсальные) формулы и (всеохватывающие) классы функций при этом можно и нужно использовать - если и возможно, то видимо, усилиями еще не одного поколения математиков. Вместе с тем, диссертация Михалкина Е.Н. вполне удовлетворяет формулировке требований ВАК о "разработке теоретических положений, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение".

Обсуждаемая диссертация содержит четыре главы. В первой из них диссертант излагает ряд собственных результатов, близких к классическому взгляду на решение алгебраических уравнений и связанных с использованием степенных рядов и интегральных представлений для общей алгебраической функции. Можно отметить, что эти результаты получены Михалкиным Е.Н. до защиты им кандидатской диссертации.

В связи с этим основные обсуждения отзыва связаны с последующими главами диссертации. Укажем здесь все же на достаточно интересные утверждения о частных случаях алгебраических уравнений (типа триномиального уравнения  $y^n + xy^m = 1$ ), вытекающие из главы 1. В формулах, полученных Михалкиным Е.Н. в этой главе, области сходимости оказываются шире, чем, например, в известном представлении Меллина.

Основными в диссертационной работе являются ее вторая и третья главы. В них разрабатываются именно теоретические положения, связанные с задачами и целями диссертации, и положения эти представляют несомненный научный интерес.

Результаты Михалкина Е.Н., вошедшие в диссертацию, опубликованы и в его персональных статьях, и в совместных публикациях с А.К. Цихом, чьим учеником он является. Названия журналов и издательств ("Математический сборник", "Сибирский математический журнал", "Известия вузов. Математика", Springer), в которых опубликованы эти результаты, известны любому математику и в России, и за рубежом. Часть результатов Михалкина Е.Н. вошла в недавнюю монографию Садыкова Т.М. и Циха

А.К. "Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных" выпущенную издательством "Наука" при поддержке РФФИ.

Все это позволяет говорить об актуальности и научной новизне результатов, полученных соискателем. Эти результаты имеют высокий научный уровень и являются значимыми для таких разделов современной математики как комплексный анализ, алгебраическая геометрия, теория специальных функций. Совокупность этих результатов можно квалифицировать как научное достижение в соответствии с формальными требованиями ВАК.

Перейдем к обсуждению содержания диссертации по существу и к замечаниям по этому содержанию и стилю его изложения.

Отметим, во-первых, что диссертант не дает явных определений объектов, изучаемых в диссертации и, в частности, в Главах 2 и 3. Предполагается, что заявленные в названиях этих глав термины "монодромия" и "классический дискриминант" не вызовут двусмысленностей и неоднозначных толкований. Вместе с тем обсуждение диссертации постоянно использует эти термины, а потому появление первого напоминания о смысле термина "дискриминант" лишь на 48 странице работы можно считать оплошностью диссертанта. Такого сорта оплошности в определенной степени простительны для кандидатской диссертации, тогда как в докторской они очень нежелательны.

Еще одной особенностью изложения материала диссертации можно назвать "молчаливое" введение необходимых обозначений там, где они используются. Некоторые уточнения, связанные с обозначениями и с деталями обсуждений, можно найти во введении, но в целом такой стиль изложения трудно признать логичным. Так, в названии раздела 2.1.3 (с. 52) главы 2 фигурируют и далее во второй главе активно используются без напоминания разрезы  $\Sigma_{\pm}$ . А содержательный смысл этих разрезов обсуждается лишь во введении и в теореме 1 главы 1 (с. 29-33).

В целом во второй главе изучаются аналитические продолжения общей аналитической функции и, в частности, метод продолжения, называемый в диссертации логарифмическим. Для описания продолжений диссертант активно использует технику наглядного представления многомерных ветвлений, связанную с "амебами" и "коамебами" алгебраических множеств. Профессиональное владение этими понятиями, разложениями и переразложениями изучаемых функций в гипергеометрические ряды и аккурат-

ный анализ ветвей позволяют Михалкину Е.Н. описывать качественные свойства требуемых продолжений.

Наряду с начальной поликруговой областью  $D$  сходимости гипергеометрического ряда, описывающего решения алгебраического (приведенного) уравнения  $n$ -ой степени, в главе 2 рассматривается также дискриминантное множество  $\nabla$  этого уравнения. Показывается, что пересечение границы области  $D$  с множеством  $\nabla$  распадается на  $n$  вещественных алгебраических поверхностей размерности  $n - 2$ . При этом в основной теореме 7 этой главы доказано, что каждая ветвь решения имеет ветвление лишь на двух из этих  $n$  компонент. Изучены также взаимные переходы ветвей друг в друга при продолжении вдоль различных путей и петель.

Логарифмические продолжения; как показано далее, позволяют связывать разные ветви решения через секториальные области сходимости интегралов Меллина-Барнса.

В главе 3 основной является, как видно из текста этой главы и из введения в диссертацию, Теорема 17 о мономиальных соответствиях между стратами дискриминантного множества алгебраического уравнения (относительно одной переменной) и т.н.  $A$ -дискриминантными множествами (для уравнений с большим числом переменных).

При этом само определение  $A$ -дискриминантных множеств приводится со ссылкой на книгу Гельфанда-Капранова-Зелевинского и "не адаптируется" должным образом к работе диссертанта. Например, фрагмент этого определения касается случая коразмерности  $\nabla_A$ , равной единице.

При постоянном интересе диссертанта к различным деталям обсуждений, особенно связанным с размерностями, вопрос о возможных других случаях коразмерности обходится молчанием. Тогда, видимо, можно было бы опустить и этот фрагмент определения ?

Еще один момент, связанный с теоремой 17, явно следовало бы прокомментировать более подробно сразу после ее формулировки либо в ней самой. Вместо слов о "некоторых дискриминантных множествах  $\nabla_A$ " желательны были бы пояснения о связи этих множеств с исходным уравнением относительно одной переменной. Во введении имеются пояснения о количествах неизвестных, в терминах которых обсуждаются  $A_j$ -дискриминантные множества, но этих пояснений явно не достаточно.

Необходимую соответствующую информацию можно извлечь из нетри-

виального доказательства этой теоремы, но сделать это нелегко. Считаю, что одной из основных задач соискателя при написании диссертации является сопровождение доказательств излагаемых им результатов четкими и, по возможности, прозрачными комментариями.

Примеры такой четкости имеются в диссертации, например, в изложении и комментариях к Теореме 16 о факторизации дискриминантов. Сама эта теорема может оказаться полезной, например, в задачах описания однородных многообразий в терминах коэффициентов определяющих их уравнений. Однако статус такого утверждения, доказанного лишь в трех случаях, связанных со степенями изучаемых многочленов, не сравним с более общей формулировкой Теоремы 17.

В краткой четвертой главе обсуждаются особые точки алгебраических уравнений и систем уравнений и предлагаются формулы для параметризации множеств таких точек.

Строго говоря, эти формулы являются алгоритмами, причем, достаточно трудоемкими. При их получении диссертантом также допущены некоторые отступления от математической строгости. Так, простой подстановкой предлагается проверить, что выписываемые в предложении 4.1 формулы являются решением системы (4.4). Но ни одного комментария о том, что этими формулами исчерпываются **все** решения этой системы, в главе 4 нет.

Само содержание главы 4 подсказывает направленность ее результатов на какие-либо приложения (например, к гипотезе о Якобиане). Однако никаких комментариев об этом в тексте нет, и отсутствие обсуждений современных перспектив разрабатываемой теории (при наличии в диссертации детальных рассмотрений, например, формул Кардано) можно отнести к недочетам диссертационной работы.

Еще одно общее замечание можно высказать в связи с имеющимися в тексте диссертации шероховатостями русского языка, например, с часто используемым соискателем оборота "иметь в виду" (записываемым в два, а не в три слова).

В итоге можно констатировать, что рассматриваемая диссертация является актуальной научно-исследовательской работой, имеющей несомненную научную значимость. Исследование Михалкина Е.Н. соответствует

предъявляемым к докторским диссертациям требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г.

Высказанные выше замечания касаются в основном оформления работы и не затрагивают ее научного содержания. В связи с этим считаю, что автор диссертации, Михалкин Евгений Николаевич, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01- «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

### Официальный оппонент

доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики ФГБОУ ВО "Воронежский государственный архитектурно-строительный университет".

Почтовый адрес: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84,  
тел. 89611828278, E-mail: lobvgasu@yandex.ru

 Лобода Александр Васильевич

Дата 19.01.2016

Подпись официального оппонента Лободы А.В. заверяю  
Проректор по научной работе  
Воронежского государственного  
архитектурно-строительного университета  
д.т.н., проф.



Мищенко В.Я.