ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕТА

на диссертацию Тимофеенко Ивана Алексеевича

«Порождающие мультиплеты инволюций линейных групп над кольцом целых чисел»,

представленную на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Группы, заданные порождающим множеством элементов и определяющими соотношениями, естественным образом возникают и эксплуатируются в геометрии, топологии и других разделах математики. К поиску хорошего множества порождающих элементов, в частности, троек инволюций, редуцируется известная обратная задача Галуа, задача отыскания групп автоморфизмов карт на плоскости и др.

В диссертации исследуются вопросы порождаемости А) тремя инволюциями — $(2,2,2)$-порождаемость, Б) тремя инволюциями, две из которых перестановочны, — $(2\times 2,2)$-порождаемость, линейных групп размерности 2 над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ и целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$, которые оказались исключительными в работах М.С. Тамбурини, П. Цукa, Я.Н. Нужина, Д.В. Левчука. В связи с вопросом 15.67 Я.Н. Нужина из Коуровской тетради, вопрос Б) исследуется для присоединенных групп Шевалле исключительного лиева типа над $\mathbb{Z}$. Также вычисляется минимальное число $n(G)$ порождающих инволюций, произведение которых равно единице для $G = GL_2(\mathbb{Z}), PGL_2(\mathbb{Z})$. Перейдем к изложению результатов диссертации по главам.

В первой главе диссертации исследуются вопросы А) и Б) для групп SL_2, PSL_2, GL_2, PGL_2 над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ и целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$, а также вопрос В) о минимальном числе порождающих инволюций, произведение которых равно единице. Показано, что попарно неперестановочные инволюции

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

порождают группу $GL_2(\mathbb{Z})$, а их образы α', β', γ' при естественном гомоморфизме порождают группу $PGL_2(\mathbb{Z})$, причем $\alpha'\beta' = \beta'\alpha'$. Группа $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ порождается множеством попарно неперестановочных инволюций

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

но не порождается любым множеством из трех инволюций, две из которых перестановочны. Установлена непорождаемость любым множеством инволюций для групп $SL_2(\mathbb{Z})$, $PSL_2(\mathbb{Z})$ (доказательство опирается на результат Р.Фрике и Ф.Клейна о разложимости $PSL_2(\mathbb{Z})$ в свободное произведение групп порядка 2 и 3), $SL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i), GL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$. Также (леммы 1.2.7 и 1.3.5) показано, что подгруппа M группы $GL_2(\mathbb{C})$ (либо $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$), порожденная тремя инволюциями, две из которых перестановочны, является произведением нормальной в M диэдральной группы на четверную группу Клейна и, таким образом, установлено, что группы $GL_2(\mathbb{Z})$ и $PGL_2(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i)$ не являются $(2\times 2,2)$-группами. Доказано, что $n(GL_2(\mathbb{Z})) = 6$ и $n(PGL_2(\mathbb{Z}))=5$. Основные результаты первой главы сформулированы в теореме 1 и предложениях 1.3.1-1.3.3, 1.3.6, 1.3.7.

Во второй главе автор реализует, развитый в работах Я.Н. Нужина, подход выбора порождающих элементов в группах лиева типа над полями и кольцами для решения вопроса о том, какие из присоединённых групп Шевалле типа G_2, E_6, E_7, E_8 над $\mathbb{Z}$ являются $(2 \times 2{,}2)$-группами. Суть подхода заключается в следующем. Во-первых, подбираются, если это возможно, диагональные элементы h_1 и h_2 таким образом, чтобы произведения $\alpha = n_{r_1} \dots n_{r_s} h_1$ и $\beta = n_{r_{s+1}} \dots n_{r_l} h_2$ были инволюциями (здесь корни $\{r_1, \dots, r_l\}$ образуют фундаментальную систему корней и каждое из множеств $\{r_1, \dots, r_s\}$, $\{r_{s+1}, \dots, r_l\}$ — состоит из попарно ортогональных корней). После подбирается (и это всегда сложная задача) инволюция γ — обычно произведение нескольких корневых и диагонального элемента, так, чтобы можно было доказать включение $x_r(\pm 1) \in \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ для некоторого корня r. Отсюда уже легко следует включение в $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ — элемента n_r, а затем и всех мономиальных элементов, соответствующих фундаментальным корням. Из транзитивности действия группы Вейля на корнях следует включение в подгруппу $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$ — элементов $x_r(1), r \in \pm\Pi$, и её совпадение с рассматриваемой группой. Используя указанный подход, автор доказал порождаемость тремя инволюциями, две из которых перестановочны, присоединеных групп Шевалле типа $E_l, l = 6{,}7{,}8$, над $\mathbb{Z}$ (теорема 3), а также универсальных групп Шевалле типа E_6, E_8 над $\mathbb{Z}$ и показал, что указанный способ выбора порождающих инволюций α и β не может быть реализован для универсальной группы Шевалле типа E_7 над $\mathbb{Z}$. Также установлена (теорема 2) $(2 \times 2{,}2)$-порождаемость над $\mathbb{Z}$ группы Шевалле типа G_2.

В третьей главе исследуется вопрос о $(2 \times 2{,}2)$-порождаемости групп $SL_6(\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(\mathbb{Z})$. Здесь автору, с привлечение вычислительной техники, удалось решить вопрос положительно для $SL_6(\mathbb{Z})$. Аналогичный результат для группы $SL_{10}(\mathbb{Z})$ не получен, однако, доказано, что гомоморфные образы $SL_{10}(p)$, p — простое число, порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.

Отметим хорошее владение автором фактами о различных системах порождающих матричных групп (см., например, лемму 1.2.1 и её использование в предложении 1.2.2) и групп Шевалле (см. лемму 2.1.6 и её использование в теоремах 2 и 3). Знание различных гомоморфизмов между группами в ряде случаев позволило быстро, без особых вычислений установить непорождаемость рассматриваемых групп тем или иным множеством элементов.

Замечания. Непоследовательность. Утверждение о непростоте группы, порожденной четырьмя инволюциями, произведение которых равно единице, на странице 13 отмечается в тексте мимоходом как очевидное, а на странице 17 оно формулируется в виде отдельного утверждения (лемма 1.2.9) и даётся пояснение к его доказательству.

В предложении 1.2.6. указываются порождающие инволюции группы $PGL_2(\mathbb{Z})$, которые являются образами порождающих $GL_2(\mathbb{Z})$ инволюций, указанных предложении 1.2.2. В связи с этим, зачем было формулировать предложение 1.2.3?

Доказательство предложения 3.3.1, по-видимому, может быть перенесено на кольцо вычетов по модулю n взаимно простому с числом 6.

На страницах 62 и 63 в формулах для ρ_2 и ρ_3 множители β^2 равны единице и могут быть опущены.

Однако, отмеченные замечания носят стилистический характер и не умаляют достоинств диссертации.

Диссертация содержит новые результаты и вносит существенный вклад в теорию групп Шевалле над кольцами. Список литературы хорошо отражает содержание предмета диссертационного исследования.

По теме диссертации опубликовано 4 статьи, 2 из которых — в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ, и тезисы в материалах 6 научных конференций.

Все результаты автора, пределставленные в диссертации, имеют теоретическое значение и могут быть использованы при составлении курсов по теории матричных групп и групп лиева типа в высших учебных заведениях. Автореферат диссертации верно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертация Н.А. Тимофеенко «Порождающие мультиплеты инволюций линейных групп над кольцом целых чисел» соответствует п. 9 «Положения о порядке при суждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, удовлетворяет всем требованиям, предъявленным ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор, Иван Алексеевич Тимофеенко, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент: Колесников Сергей Геннадьевич

01. 12. 2017 г.

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный

университет науки и технологий

имени академика М.Ф. Решетнева»

кафедра безопасности информационных технологий,

заведующий кафедрой,

доктор физико-математических наук, доцент

Почтовый адрес:

660037, Сибирский федеральный округ, Красноярский край,

г. Красноярск, проспект им. газеты Красноярский рабочий, дом 31.

Телефон: +7 (913) 574-72-36.

E-mail: sgkolesnikov@sibsau.ru

Подпись Колесникова С.Г. удостоверяю

Ведущий спец. УК

Начальник УК СибГАУ

г.Красноярск