

## Отзыв

официального оппонента на диссертацию Е.П. Магденко  
«Решение линейных сопряженных задач для уравнений вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрических областях»,  
представленной на соискание ученой степени  
кандидата физико – математических наук  
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация Е.П. Магденко посвящена исследованию линейных краевых задач сопряжения эллиптического и параболического типов, описывающих осесимметрические движения вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрических областях с границей раздела. Работа является завершенным исследованием, имеет научную ценность и практическую значимость.

**1.Актуальность темы.** Среди постановок начально-краевых задач для уравнений движения вязких теплопроводных жидкостей особое место занимают задачи, описывающие движения с поверхностью раздела, например, система нефть-вода, внутренние волны, пленочные течения, системы охлаждения. К этим задачам относятся движения, порождаемые термокапиллярным эффектом, когда поверхностное натяжение зависит от температуры, что является важным для технологических процессов в невесомости, а так же в тонких слоях в земных условиях. Математические трудности: высокий порядок системы уравнений, нелинейность уравнений, граничные условия на поверхности раздела, приводят исследователей к актуальной задаче качественного исследования уравнений подмоделей, содержащих меньшее число независимых переменных и специальных представлений искомым функций. Такие редукции получаются применением группового анализа дифференциальных уравнений. Более простые задачи иногда становятся линейными, что позволяет использовать развитую теорию линейных краевых задач. Точные решения играют существенную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей исследуемых явлений. Они служат для проверки корректности и оценки точности различных асимптотических, приближенных и численных методов и при изучении устойчивости течений.

В диссертации исследуются линейные краевые и начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического и параболического типов, описывающих осесимметрические движения вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрических областях.

**2. Содержание работы.** Математическая модель есть уравнения Обербека-Буссинеска, которая записана в цилиндрических координатах, и инвариантна относительно вращения.

В первой главе исследуется краевая задача сопряжения двух контактирующих по плоскости несмещающихся покоящихся жидкостей в конечном цилиндре. Решена стационарная задача. Представлены условия, при

которых решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим с экспоненциальной оценкой.

Во второй главе исследуется спектральная задача по параметру Марангони о потере устойчивости равновесия двух жидкостей, которые контактируют, не смешиваясь, по плоской деформируемой поверхности раздела в конечном цилиндре, и однослойной жидкости с верхней деформируемой свободной границей.

В третьей главе исследовано простое частично инвариантное решение ранга два дефекта три системы уравнений Обербека-Буссинеска, описывающее двухслойное движение вязких теплопроводных жидкостей в цилиндре с подвижной недеформируемой поверхностью раздела. Задача сводится к линейной, и определяются интегралы. Для определения новых функций интегралов решается обратная задача. Доказанные априорные оценки позволяют утверждать, что искомые функции экспоненциально стремятся к нулю.

В четвертой главе поверхность раздела между двумя несмешивающимися вязкими теплопроводными жидкостями является цилиндром и фиксирована. Из доказанных априорных оценок следует, что решение задачи экспоненциально стремится к стационарным значениям.

**3. Научные результаты и их новизна.** В работе Магденко Е.П. получены следующие основные результаты.

1. Построены решения в виде рядов по функциям Бесселя краевой задачи сопряжения для системы параболического типа в конечном цилиндре с заданной температурой на границе. Определены условия, когда решение является классическим и стремится к стационарному режиму.

2. Поставлена спектральная задача о потере устойчивости по параметру Марангони для задачи сопряжения двух жидкостей при наличии плоской деформируемой поверхности раздела. Утверждается, что получены явные зависимости спектрального параметра от геометрии области и физических параметров жидкости.

3. Получены априорные оценки линейных задач сопряжения для осесимметричного термокапиллярного движения для малых чисел Марангони для двух вязких жидкостей в цилиндрической области. Даны достаточные условия сходимости решений к стационарному режиму.

**4. Достоверность и обоснованность результатов** обеспечивается использованием классических математических моделей движения вязких теплопроводных жидкостей и хорошо разработанных математических методов исследования линейных краевых задач, а также согласованием аналитических решений и данных численных расчетов.

**5. Значимость для науки и практики выводов.** Примененная методика априорных оценок для начально-краевых задач может быть использована для изучения движений многих жидкостей и с другой симметрией, основанной на многочисленных подгруппах допускаемых моделью. Полученные результаты имеют также и практическую значимость ввиду их приложений в природных

(слои в океанах и атмосфере) и технологических (пленки, покрытия, системы охлаждения, рост кристаллов) процессах.

6. Автореферат диссертации соответствует ее содержанию.

7. Основные результаты диссертации доложены на всероссийских и международных конференциях и опубликованы в 13 научных работах, которые соответствуют теме диссертации и с достаточной полнотой отражают содержание, выводы и заключение диссертации. Из них 5 статей напечатаны из списка ВАК РФ для предоставления результатов кандидатской диссертации.

#### **8. Недостатки по содержанию и оформлению диссертации.**

1. Для модели вязкой жидкости рассматриваются подмодели, заданные радиально симметричным уравнением теплопроводности в цилиндрических областях. Движение жидкости фактически отсутствует.
2. По части переменных применяется метод Фурье, по времени – преобразование Лапласа. Решение краевой задачи представлено рядами, в коэффициентах которых имеются обратные преобразования Лапласа найденных функций. Хотя сходимость рядов доказана, но нет даже приближенных формул для коэффициентов рядов. Это затрудняет практическое применение полученных результатов.
3. Обнаружены две ошибки в формулах (3.1.2). Они не влияют на дальнейшие рассуждения, поскольку рассматривается частный случай задачи, обнуляющий допущенные ошибки.
4. Рисунок 7 не верен: свободная поверхность есть поверхность вращения.
5. Опечатки на странице 58 и в формуле (3.1.8).
6. Не приведено уравнение для вычисления критического числа Марангони, хотя утверждается, что оно получено в явном виде. Утверждения Лемма 2.1.1 и Лемма 2.1.2 не доказаны. Откуда следует, что существует действительное критическое число Марангони для любых значений других параметров задачи. Что означают другие корни не приведенного уравнения.

#### **9. Соответствие работы требованиям, предъявляемым к диссертациям.**

Несмотря на замечания, в диссертации имеются многочисленные аналитические вычисления для получения априорных оценок линейных краевых задач, диссертация написана грамотным языком теории линейных дифференциальных уравнений, получены оригинальные утверждения об устойчивости стационарных решений. Все утверждения в диссертации математически грамотно сформулированы и способ доказательства там, где оно есть, строго обоснован.

Диссертация Магденко Е. П. выполнена на актуальную тему, обладает научной новизной и частично решает задачи устойчивости простейших движений задач сопряжения для уравнений вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрических областях.

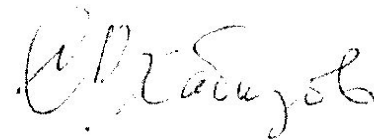
Диссертационная работа является завершённым научным исследованием, выполнена на высоком научном уровне. Учитывая актуальность тематики, новизну и практическое значение полученных результатов, считаю, что

диссертация «Решение линейных сопряженных задач для уравнений вязких теплопроводных жидкостей в цилиндрических областях» соответствует всем требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» ВАК России, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Евгений Петрович Магденко заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Главный научный сотрудник,  
заведующий лабораторией  
дифференциальных уравнений механики,  
ФГБУН Института механики им. Р.Р. Мавлютова  
Уфимского научного центра РАН,  
доктор физ. - мат. наук, профессор

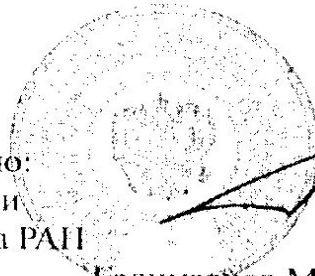
450054, Уфа, пр. Октября, 71.  
Тел. 347 2355255, [habirov@anrb.ru](mailto:habirov@anrb.ru)

Подпись Хабирова Салавата Валеевича заверяю:  
Ученый секретарь ФГБУН Института механики  
им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН  
к.ф.-м.н.



Хабиров Салават Валеевич

22.04.2016.



Галимзянов Марат Назипович