ОТЗЫВ
официального оппонента

на диссертацию Михалкина Евгения Николаевича «Аналитические аспекты теории алгебраических функций», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 /Вещественный, комплексный и функциональный анализ/

Хорошо известно, что исследования первой половины XIX века и, прежде всего, труды Коши сыграли особую роль в становлении теории аналитических функций. Существенное продвижение в изучении многозначных функций и их интегралов связано с мемуаром Пьюизо об алгебраических функциях. В этом труде показано, что методы исследования, разработанные Коши для изучения теории интегрирования и разложения в ряды однозначных функций, пригодны и для многозначных. При этом Пьюизо раскрыл значение чисто алгебраических и топологических средств для дальнейшего развития теории. Наконец, в начале 1880-х годов из теории аналитических функций постепенно начинает выделяться, превращаясь в самостоятельную область, и сама теория алгебраических функций. Этот процесс объясняется главным образом тем, что Дедекинду и Веберу удаётся по-новому построить соответствующую теорию, пользуясь аналогией алгебраических функций с алгебраическими числами. С той поры, благодаря усилиям целой плеяды выдающихся математиков, теория алгебраических функций обогатилась огромным количеством разнообразных результатов, хотя и в наше время множество нерешённых задач все ещё ждёт своих исследователей.

Диссертационная работа Е.Н. Михалкина посвящена изучению аналитических аспектов теории алгебраических функций. Заявленная цель работы – получение новых аналитических формул для решения общего алгебраического уравнения, разработка новой эффективной техники и конструктивных методов вычисления монодромии соответствующих решений, исследование взаимосвязей сингулярных стратов классического дискриминантного множества с A-дискриминантными множествами и пр. Вот почему тема диссертационной работы Е.Н. Михалкина представляется актуальной.

Остановимся кратко на содержании диссертации Е.Н. Михалкина, изложенной на 175 страницах. Работа состоит из введения, четырёх глав и списка литературы, в котором перечислены 109 наименований, а также списка работ автора по теме диссертации. В последнем приводятся ссылки на 12 работ автора, 4 из которых выполнены в соавторстве, а ещё 4 статьи относятся к кандидатской диссертации Е.Н. Михалкина, защищённой в 2006 г.

Во введении автор кратко описывает историю развития той части теории алгебраических функций, которая тесно связана с комплексно-аналитической проблематикой, и дает краткую сводку основных результатов своей работы.

В Теореме 1 первой главы автор, используя интегральную формулу Меллина (1921), выводит формулу для решения приведённого общего алгебраического уравнения

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \ldots + x_1 y - 1 = 0. \tag{1}$$

При этом доказывается, что область сходимости соответствующего интеграла есть не что иное, как дополнение к вещественной гиперповерхности, которая явно задаётся однопараметрическим набором комплексных гиперплоскостей. Эта гиперповерхность представляет собой разрезы, которые примыкают к дискриминантному множеству и вне которых можно выделить однозначную ветвь решения уравнения. Явный аналитический вид разрезов позволяет автору получить важные применения в главе 2. В качестве еще одного следствия автор выражает решения *триномиального* уравнения

$$y^n + xy^m - 1 = 0 \tag{2}$$

при $n > m$ через обобщённые гипергеометрические ряды, затем разбирает случай алгебраических уравнений степени 3 и 4, а также формулы Кардано.

Вторая глава диссертации посвящена описанию монодромии общей алгебраической функции. В первой части этой главы, используя параметризацию границы области сходимости $\mathcal{D}$ гипергеометрического ряда для решения уравнения (1) в Теореме 6 автор получает параметризации n «струн», по которым разрезы примыкают к области $\mathcal{D}$. Одновременно «струны» лежат на дискриминантном множестве, и в Теореме 7 вычислена монодромия ветвлений решения вокруг «струн».

В конце второй главы описывается новый, так называемый логарифмический метод аналитического продолжения ветвей общей алгебраической функции. Результат, полученный с помощью этого метода, сформулирован в Теореме 12. Суть его состоит в том, что общая алгебраическая функция допускает представление в виде набора степенных рядов и набора интегралов Меллина-Барнса. Известно, что области сходимости рядов поликруговые, а области сходимости интегралов – полиугловые. Поскольку любая пара таких областей имеет непустое пересечение, то, следовательно, аналитическое продолжение можно построить, проходя через это пересечение. Ввиду того, что модуль и аргумент комплексного числа отвечают соответственно за вещественную и мнимую части комплексного логарифма, автор называет способ такого аналитического продолжения логарифмическим методом. В этой же главе приводится полный набор всех центрированных в нуле степенных разложений решения приведённого алгебраического уравнения. Области сходимости этих рядов описываются в терминах амебы дискриминантного множества в Теореме 11.

Третья глава диссертации посвящена исследованию сингулярной стратификации классического дискриминантного множества, т.е. множества нулей дискриминанта общего алгебраического уравнения

$$x_0 + x_1 y + \ldots + x_n y^n = 0. \tag{3}$$

В Теореме 18 диссертации найдена параметризация критических стратов C^j, а в Теореме 19 доказано, что критические страты C^j совпадают с сингулярными стратами по кратности $\mathcal{M}^{j+2}$. При доказательстве последней теоремы найдена параметризация для кратных корней уравнения (3) в виде элементарной функции, которая зависит от переменных, задающих параметризацию Горна-Капранова дискриминантного множества этого уравнения.

Основной результат третьей главы сформулирован в Теореме 17: страты $\mathcal{M}^j$ с помощью мономиальных преобразований приводятся к A-дискриминантным множествам. Это позволяет автору диссертации утверждать, что на семействе сингулярных стратов A-дискриминантных множеств определена естественная иерархическая структура. В этой же главе изучена структура многогранника Ньютона дискриминанта приведённого многочлена. Известно, что многогранник Ньютона дискриминанта для многочлена n-ой степени комбинаторно эквивалентен $(n-1)$-мерному кубу. Для приведённого уравнения у многогранника имеется по $n-1$ координатных и некоординатных граней. В Теореме 15 диссертации доказано, что две некоординатные грани являются призмами размерности $n-2$. Более того, Теорема 16 устанавливает и такой замечательный факт: для степеней $n = 4, 5, 6$ «срезки» дискриминанта исходного многочлена степени n на грань g_k факторизуются в виде произведения дискриминантов многочленов (1) степеней k и $n-k$.

В заключительной четвертой главе приводятся формулы для особых точек алгебраических A-гиперповерхностей, т.е. общих алгебраических гиперповерхностей, заданных фиксированным набором A-показателей. В Теореме 20 описана параметризация особых точек A-гиперповерхности.

Обсудим теперь более подробно некоторые аспекты представленной диссертационной работы. Прежде всего заметим, что в статье [M. Kato, M. Noumi, *Monodromy groups of hypergeometric functions satisfying algebraic equations*. Tohoku Math. Journal, Vol. 55 (2003), 189–205] детально исследованы решения алгебраических *триномиальных* уравнений более общего вида, чем в диссертации:

$$y^{mn} + xy^{mp} - 1 = 0, \tag{2*}$$

где $m \geq 1$ и $n > p$, получено явное описание монодромии, найдены отображения Шварца соответствующих дифференциальных уравнений и рассмотрен целый ряд приложений, в том числе и формулы Кардано.

Некоторые результаты, описанные в первых двух главах диссертации, либо являются частными случаями, либо полностью совпадают с формулами из указанной статьи (например, Теорема 3 из диссертации и Предложение 2.8 из статьи, формулы Кардано (1.31) и Лемма 5.1 и т.д.), но в диссертационной работе необходимых ссылок на эту статью нет.

Аналогичное замечание относится и к публикации лекций [G.Belardinelli, *Risoluzione analitica delle equazioni algebriche generali*. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano. V. 29, № 1, p. 13–45, Birkhäuser-Verlag, 1959], в которой решения как самого уравнения (1), так и все частные случаи, рассмотренные в диссертации, изучаются с помощью тех же формул Меллина.

В самом начале диссертационной работы отмечено, что она лежит в русле идей Меллина и его последователей, которые направлены на поиск представлений решений общих алгебраических уравнений типов (1) и (3) в виде гипергеометрических функций и их аналогов. На самом деле, преобразования Меллина, Лапласа и многие им подобные часто используются для сведения интегро-дифференциальных уравнений в алгебраические и наоборот, что позволяет представлять соответствующие решения в нужном виде. Легко, например, с помощью несложных рассуждений упомянутую задачу описания решений уравнений (3) или (1) свести к анализу решений систем дифференциальных уравнений типа Пикара-Фукса и, в самом общем контексте, к анализу связности Гаусса-Манина, ассоциированной с деформациями особенностей. Действительно, сравнивая формулы на странице 284 статьи [K. Mayr, *Über die Auflösung algebraischer Gleichungssysteme durch hypergeometrische Funktionen*, *Monatshefte für Mathematik und Physik*. B. 45 (1937), 280–313] и на странице 203 работы [В.П. Паламодов, *Деформации комплексных пространств*. Итоги науки и техники, сер. Соврем. пробл. математики. Фундам. направления, 1986, Т. 10, 123–221], нетрудно понять, что корни уравнения (3) как функции от коэффициентов этого уравнения и *контурные интегралы* по исчезающим циклам фундаментальной дифференциальной формы, заданной на расслоении Милнора соответствующей A_{n-1}-особенности гиперповерхности, удовлетворяют *одинаковым* дифференциальным соотношениям. С другой стороны, через эти интегралы выражается фундаментальное решение соответствующей системы Пикара-Фукса, причем для таких интегралов известно несколько *эквивалентных* представлений, связанных подходящими интегральными преобразованиями: в виде интегралов по отрезку или полуоси, в виде интегралов обобщённой функции

$$(x_0 + x_1 y + \ldots + x_n y^n)^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

в виде *версальных интегралов* и т.д. Соответствующая техника, разработанная в работах японских математиков K.Aomoto, M.Noumi, M.Kato, S.Ishiura, а также В.П.Паламодова, Х.Маликова и многих других ещё в 1970-х годах, применима как к изучению систем Пикара-Фукса, так и к описанию решений алгебраических уравнений и систем таких уравнений, связанных с разнообразными типами изолированных особенностей. Например, в статье [J.-F. Loiseau et al. *Hyperelliptic integrals and multiple hypergeometric series*. Mathematics of Computation, V. 50 (1988), no. 182, p. 501–512] решения уравнения типа (1) представляются в виде гипергеометрических функций с помощью гиперэллиптических интегралов и описываются их области сходимости, в статье [Х. Маликов, *Переопределенные системы дифференциальных уравнений версальных интегралов типа A, D и E*. Дифф. уравнения Т. 18 (1982), № 8, 1394–1401] получены системы дифференциальных уравнений для версальных интегралов, связанных с дискриминантами уравнений гиперповерхностей типа A, D, E, причём в случае A-дискриминантов эти уравнения опять-таки *совпадают* с упомянутыми выше дифференциальными соотношениями из работ K. Mayr и В.П. Паламодова, аналогичные результаты известны для полных и неполных пересечений и т.д.

Далее, для 2-х и 3-х параметрических деформаций уравнений (3) и (1) решения соответствующей системы дифференциальных уравнений для версальной деформации особенности типа A_{n-1} явно выписываются с помощью элементарных преобразований версальных или контурных интегралов через обобщённые гипергеометрические функции Горна подходящей размерности в статьях [Х.Маликов, *Уравнения Пикара-Фукса ассоциированные с критическими точками типа A_k*. Доклады АН Тадж. ССР, Т. 30 (1987), № 3, с. 135–138] и [A.G.Aleksandrov, A.N.Kuznetzov, *Regular singular holonomic systems of differential equations with given integrals*. Journal Appl. Funct. Anal. 2 (2007), № 1, p. 21–56], что, в свою очередь, позволяет получить и явное описание монодромии.

Важно также отметить, что изучение решений *приведенного* алгебраического уравнения типа (1) сводится к изучению *главных деформаций* особенности гиперповерхности

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \ldots + x_1 y = t. \tag{1*}$$

Это заметил К.Саито еще в 1980-х годах, что и привело его к развитию теории высших вычетов [K.Saito, *Period mapping associated to a primitive form*. Publ. RIMS, Kyoto Univ. Vol. 19 (1983), 1231-1264], а затем и к формированию современной теории фробениусовых многообразий. Среди прочего, в теории высших вычетов описываются свойства решений соответствующих уравнений, их монодромия и тесные взаимосвязи всех этих понятий для дискриминантов *произвольных* изолированных особенностей гиперповерхностей, включая A_{n-1}-особенности типа (3) как весьма частный и специальный случай.

В самом начале главы 3 автор справедливо отмечает то, что изучению дискриминантных множеств самого разного типа посвящено большое количество работ. И действительно, многие вопросы, затронутые в этой главе, достаточно хорошо изучены самыми разными методами и, как правило, в более общем контексте.

Начнём с того, что изучение "семейства сингулярных стратов" легко свести к изучению более тонкой стратификации Самуэля; детальное обсуждение основных свойств этой стратификации, включая "иерархию между сингулярными стратами семейства всех A-дискриминантных множеств", можно найти во многих работах (см., например, [A.Dimca, R.Rosian, *The Samuel stratification of the discriminant is Whitney regular*. Geometriae Dedicata V. 17 (1984), p. 181–184]).

Более того, следуя рассуждениям из этой статьи, можно показать, что свойство факторизации "срезки" A_k-дискриминантов для $k = 3, 4, 5$ из Теоремы 16, которую автор доказывает рутинными вычислениями, является одним из основных свойств дискриминантов минимальных версальных деформаций изолированных особенностей, описанных в п.п. 4.8.2 и 4.8.3 работы [B.Teissier, *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*. Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo–1976), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, p. 565–678]). При этом операция "срезки" дискриминанта соответствует выбору подходящего *распадения* исходной особенности (в конечной точке или в точке замыкания орбиты стандартного $\mathbb{C}^*$-действия на пространстве версальной деформации квазиоднородной A_k-особенности). Аналогичными свойствами обладают дискриминанты версальных деформаций изолированных особенностей многих типов; описание всех возможных распадений для *простых* особенностей можно найти в статье [О.В. Ляшко, *Распадения простых особенностей функций*. Функц. анализ и его прилож. Т. 10 (1976), вып. 2, с. 49–56].

Наконец, для полноты укажем, что способ вычисления формул параметризации подмногообразий кратных корней $\mathcal{M}^*$ уравнения (3), который использует автор диссертационной работы, подобен методу, описанному в статье [В.И. Арнольд, *Пространства функций с умеренными особенностями*. Функц. анализ и его прил. Т. 23 (1989), вып. 3, с. 1–10].

В заключение напомним, что у *нормализации* дискриминанта нет особенностей, а потому вопрос о существовании параметризации дискриминантного множества в общем случае тесно связан с проблемой *униформизации* и решается либо с помощью специальной *плоской* системы координат [T.Yano, J. Sekiguchi, *The microlocal structure of weighted homogenous polynomials associated with Coxeter systems*. I,II Tokyo J. Math. Vol. 2 (1979), p. 193–219; Vol. 4 (1981), p. 1–34], либо в рамках общей теории, суть которой доступно излагается в основополагающей работе [K.Saito, *On the uniformization of complements of discriminant loci*. RIMS Kōkyūroku Vol. 287 (1977), p. 117–137].

Среди других замечаний и менее значительных неточностей можно отметить следующие:

1. В Теореме 20 говорится лишь о перечне особых точек общей A-гиперповерхности. Однако, возникает естественный вопрос о числе особых точек у каждой фиксированной гиперповерхности из A-семейства. Здесь было необходимо сделать комментарий к Теореме 20.
2. Определённую путаницу вызывают некоторые обозначения. Так, во введении на страницах 8 и 11 одними и теми же буквами обозначены разные векторы; далее, b_j на странице 77 обозначает действительное число, а b_p на странице 80 – это вектор.
3. На странице 38 читаем: "В данном параграфе рассматривается алгебраическое уравнение (1.1) при $p = 1, ...$" Однако, в указанном уравнении индекс p не используется.
4. В разделе "Работы автора по теме диссертации" литература [117] отнесена к Антиповой И.А., причём в соответствующей ссылке [8] автореферата авторство вообще явно не указано, и т.д.

Таким образом, в работе получен ряд новых результатов, среди которых можно выделить следующие: аналитические формулы для решения алгебраических уравнений типа (1) и вычисление их монодромии, описание тесных взаимосвязей между свойствами сингулярных стратов классического дискриминантного и A-дискриминантного множеств и естественной иерархической структуры на них, а также наглядная параметризация критических стратов и подмногообразий кратных корней уравнения (3).

Полученные результаты представляют интерес для специалистов в области алгебраической геометрии, многомерного комплексного анализа и теории особенностей.

Многие результаты диссертационной работы новы и своевременно опубликованы. Сама работа написана на хорошем математическом уровне, все утверждения снабжены полными доказательствами, следует также отметить оформление и подбор материала для иллюстрации основных утверждений.

Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Перечисленные выше недостатки и замечания в целом не умаляют научную значимость работы Михалкина Евгения Николаевича «Аналитические аспекты теории алгебраических функций», которая может рассматриваться как диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук, поскольку она отвечает требованиям, установленным п. 9 «Положения о порядке присуждения учёных степеней» от 24 сентября 2013 г. за № 842 и предъявляемым к докторским диссертациям по специальности 01.01.01 /Вещественный, комплексный и функциональный анализ/, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук.

Александров Александр Григорьевич
117997, Москва, ГСП-7, Профсоюзная ул. д. 65,
тел. 495-334-8980, e-mail: alexandr@ipu.rssi.ru
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Главный научный сотрудник ИПУ РАН, д. ф.-м. н.

/А.Г.Александров/
28.12.2015г.

Подпись официального оппонента заверяю
Зам. директора ИПУ РАН, к. ф.-м. н.

/И.Н.Барабанов/