

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию Галушкиной Елены Николаевны «О многомерных аналогах эллиптических функций», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук (специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Диссертация Е. Н. Галушкиной посвящена многомерным аналогам эллиптических функций и их применению в задаче о подсчёте числа точек решётки максимального ранга в n -мерном комплексном пространстве \mathbb{C}^n , содержащихся в заданной области.

Отметим, что тематика диссертации несомненно актуальна. Теория эллиптических функций одного комплексного переменного является одним из основных разделов комплексного анализа. Она имеет важные применения как в самой теории функций комплексного переменного (римановы поверхности, конформные отображения, теория приближений), так и в других областях математики (алгебра, теория чисел, геометрия и пр.).

Для случая многих комплексных переменных можно предложить различные обобщения теории эллиптических функций. В работе Е. Н. Галушкиной в качестве основного выбран подход итальянского математика П. Заппы, который в 1983 г. предложил аналоги \mathcal{Z} - и ζ -функций Вейерштрасса, основанные на сдвигах формы Боннера-Мартинелли при помощи векторов заданной решётки. Отметим, что эти обобщения эллиптических функций являются дифференциалами (не мероморфными!); в силу специфики формы Боннера-Мартинелли они имеют особенности на дискретном множестве — в точках решётки.

Автором работы изучены некоторые свойства многомерного аналога ζ -функции Вейерштрасса, с их помощью найдены формулы для вычисления количества точек заданной решётки, располагающихся в фиксированной области с кусочно-гладкой границей; это делается с помощью интеграла по границе этой области от некоторого периодического дифференциала, построенного на базе указанного аналога.

Опишем кратко содержание работы, которая состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы.

Первая глава посвящена изложению некоторых классических результатов из теории эллиптических функций одного комплексного переменного. Следует заметить, что отбор этих результатов достаточно хаотичен, описываемые факты, по большей части, не используются в дальнейшем. В то же время, некоторые важные результаты, которые могли быть применены в работе, отсутствуют. К таковым можно отнести, например, известное свойство ζ -функции Вейерштрасса:

$$\zeta(z + \omega_k) - \zeta(z) = 2\zeta(\omega_k/2), \quad k = 1, 2. \quad (*)$$

Здесь ω_1 и ω_2 — базисные периоды, т. е. векторы, порождающие решётку периодов Γ .

В заключительном параграфе главы на основании формулы, установленной Р. Диасом и С. Робинсоном, получено представление числа π в виде суммы ряда (теорема 1, формула (1.10)).

Во второй главе исследуется многомерный аналог ζ -функции Вейерштрасса (формула (2.6)). Как и в одномерном случае, для определения этого аналога используется ряд, взятый по элементам решётки периодов Γ , однако в качестве базового объекта берётся дифференциальная форма Боннера-Мартинелли ψ_{BM} . В п. 2.2 автор подробно исследует сходимость ряда, представленного в правой части (2.6), отмечает некоторые свойства введённой ζ -формы. В п. 2.3 ζ -форма несколько корректируется с помощью дифференциальной формы $\eta(z)$, коэффициенты которой линейно зависят от компонент z_j вектора

z и комплексно сопряжённых к ним — \bar{z}_j . В результате разность $\tau(z) := \zeta(z) - \eta(z)$ оказывается периодической относительно решётки Γ формой.

В третьей главе решается основная задача диссертации. В теореме 4 получена формула для нахождения количества точек решётки, заключённых внутри заданной области D . Формула связывает данную характеристику, объём области D и интеграл по границе ∂D от формы $\tau(z) \wedge dz$. Далее (п. 3.2) показано, как модифицировать эту теорему для случая вещественного пространства \mathbb{R}^n . Наконец, в заключительном пункте 3.3 полученная формула применяется для вычисления объёмов многогранников, вершины которых располагаются в точках решётки Γ .

Приведем замеченные нами недостатки диссертации.

1) Во введении утверждается, что не существует функций на плоскости с более чем двумя линейно независимыми над \mathbb{R} периодами. Следует добавить, что это справедливо, если функция непостоянна и обладает некоторыми дополнительными свойствами, например, если она мероморфна (теорема Якоби).

2) В формуле (1.9) пропущен знак «минус» перед интегралом. Кроме того, в силу равенства $\mathfrak{P}(z) = -\zeta'(z)$ сразу находим

$$-\int_0^1 \mathfrak{P}(x-p)dx = \zeta(x-p)|_{x=0}^1 = \zeta(1-p) - \zeta(-p) = \zeta(1-p) + \zeta(p),$$

что эквивалентно (1.10). Далее, используя (*), получаем $\zeta(1-p) - \zeta(-p) = 2\zeta(1/2)$. Таким образом, формула Диаса-Робинса просто утверждает, что $\zeta(1/2) = \pi/2$. Указанный факт любопытен, но использовать равенство (1.10) для вычисления числа π неразумно (не любое тождество, содержащее константу, следует использовать для её приближённого вычисления!). Совершенно очевидно, что ряд в (1.10) сходится слишком медленно, а при $p = 1/2$ должна быть наилучшая сходимость. Как раз при этом p мы получаем в правой части значение $2\zeta(1/2)$.

3) Целью п. 2.3 является нахождение дифференциала $\eta(\gamma) = \zeta(z+\gamma) - \zeta(z)$. Для этого предлагается интегрировать дифференциалы коэффициентов ζ_m формы ζ вдоль ломаных со сторонами, параллельными векторам решётки Γ . Полученные формулы содержат константы α_{mk}, β_{mk} , выражющиеся через интегралы от частных производных функций ζ_m , в которые входит и переменное z . Как на практике отыскивать эти интегралы, в работе не обсуждается. На наш взгляд, можно было бы использовать для нахождения $\eta(\gamma)$ простые соображения, аналогичные тем, которые применяются в одномерном случае при выводе соотношений (*). Эти соображения основаны на том, что коэффициенты формы ζ являются нечётными функциями. Из равенства $\eta(\gamma) = \zeta(z+\gamma) - \zeta(z)$ при $z = -\gamma/2$ получаем

$$\eta(\gamma) = \zeta(\gamma/2) - \zeta(-\gamma/2) = 2\zeta(\gamma/2).$$

4) В работе рассматривается случай произвольной решётки периодов Γ , но иногда без дополнительных комментариев берётся целочисленная решётка \mathbb{Z}^{2n} . Это касается и одномерного и многомерного случаев. Например, результаты п. 1.5 относятся к случаю решётки \mathbb{Z}^2 , доказательство леммы 1 на стр. 39–40 предполагает, что $\Gamma = \mathbb{Z}^{2n}$.

5) Отметим еще некоторые мелкие неточности, опечатки и пр.

- На стр. 36 пропущены множители $(-1)^{k-1}$ перед произведением $\gamma_k \bar{\gamma}_k$ в последней строке равенства (2.7) и в 8-й строке снизу. Также пропущен аналогичный множитель на стр. 37 в первой строке.

- На стр. 38 в последней строке неправильно записано выражение для модуля $\Omega(z, \gamma)$. В 4-й строке снизу следует написать, что применяется не (2.8), а его аналог с показателем степени $2n$ вместо $2n + 2$.
- На стр. 39 выражение под знаком суммы, состоящее из трёх слагаемых, следует заключить в скобки.
- На стр. 39 сформулирована лемма из работы [8]. Приводится доказательство только достаточности условия $2n < d$; доказательство необходимости отсутствует.
- На стр. 41 в последней строке вместо ω_{BM} должно быть ψ_{BM} . Отметим также, что развернутую формулу (2.13) для $\zeta(z)$ можно было бы привести гораздо раньше, расписав также выражения $\frac{\partial \psi_{BM}(\gamma)}{\partial z_1}$ и $\frac{\partial \psi_{BM}(\gamma)}{\partial z_2}$.
- На стр. 42 отмечено, что интегрируется полный дифференциал. Поскольку имеется именно полный дифференциал, а не просто точный, рассуждения о том, что точки не мешают гомотопии путей, выглядят странно.
- На стр. 56 непонятна фраза: «Граница полученной области больше не является односвязной.»

Указанные недостатки не снижают существенно научных достоинств диссертации. В ней исследованы свойства многомерных аналогов эллиптических функций Вейерштрасса и на их основе получены формулы для количества точек в заданной области многомерного комплексного пространства, принадлежащих данной решётке, а также для объёмов решётчатых многогранников. Несомненно, эти результаты имеют значение для развития теории функций многих комплексных переменных и её приложений.

Полученные в работе основные результаты являются новыми, они строго обоснованы, снабжены подробными доказательствами.

Основные результаты диссертации опубликованы в 7 работах автора, в числе которых три статьи — в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете, Сибирском федеральном университете, Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН.

Автореферат, в целом, правильно отражает содержание работы.

Считаю, что диссертация Е. Н. Галушкиной «О многомерных аналогах эллиптических функций» соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, в частности, требованиям пункта 9 «Положения о присуждении учёных степеней», а её автор Галушина Елена Николаевна заслуживает присвоения ей учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физ.-мат. наук, профессор,
заведующий кафедрой математического анализа
ВО «Казанский (Приволжский)
Федеральный университет»

Семён Рафаилович Насыров

10.04.2018 г.

420000, г. Казань, ул. Кремлёвская, д. 35, тел. +7(917)9268975, e-mail: snasyrov@kpfu.ru.



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ	
ФГАОУ ВО «КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»	
УТВЕДОМЛЕНИЕ №02841391 УПРАВЛЕНИЕ ДОКУМЕНТООБОРОТА И КОНТРОЛЯ	
ПОДПИСЬ	
Насырова С.Р. <i>[Signature]</i> <small>заверяю</small>	
Родионова И.Н. <i>[Signature]</i>	
Документоэмиссионный	3