

Отзыв официального оппонента на диссертацию Насыбуллова Тимура Ринатовича
«Алгебраические системы, возникающие при решении уравнения

Янга–Бакстера, их приложения и свойства»,

представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертации Т. Р. Насыбуллова исследуются алгебраические системы, связанные с решениями *теоретико-множественного* уравнения Янга–Бакстера, изучаются свойства и связи этих решений и систем, а также приложения этих систем к решению ряда известных проблем алгебры и топологии. Основные результаты, полученные в диссертации, являются алгебраическими, диссертация соответствует специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Замечательное своими простотой и изяществом понятие теоретико-множественного уравнения Янга–Бакстера было введено в 1992 году Дринфельдом. Им же был сформулирован вопрос о классификации решений этого уравнения. Как правило, при изучении решений теоретико-множественного уравнения Янга–Бакстера, удовлетворяющих тому или иному дополнительному специальному свойству, в качестве базового множества берется множество, усиленное той или иной алгебраической системой. Первые решения теоретико-множественного уравнения Янга–Бакстера были построены на классических алгебраических системах — группах и полугруппах, кольцах, полях, модулях, векторных пространствах, алгебрах (как ассоциативных, так и неассоциативных). Затем в процессе развития теории к построению решений привлекались брейсы, косые брейсы, квандлы, биквандлы, циклические множества. Эти алгебраические системы имеют приложения и за пределами теории решений теоретико-множественного уравнения Янга–Бакстера. К примеру, квандлы были введены Джойсом и Матвеевым как инвариант классических узлов и зацеплений. Этот инвариант является сильным инвариантом классической теории узлов в том смысле, что два узла K_1, K_2 слабо эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им квандлы $Q(K_1), Q(K_2)$ изоморфны. Позднее Фенн, Джордан–Сантана и Кауффман ввели понятие биквандла, которое обобщает понятие квандла, для построения инвариантов виртуальных узлов и зацеплений. (Гипотеза о том, что биквандл виртуального узла однозначно определяет этот узел, насколько мне известно, до сих пор открыта.)

Алгебраические системы с заданными на них (и связанными с их структурой) решениями теоретико-множественного уравнения Янга–Бакстера используются, среди прочего, для построения представлений групп кос. Уже одного этого факта достаточно, чтобы оценить тематику диссертации как весьма актуальную, — эти представления имеют массу приложений в различных областях математики.

В диссертации Т. Р. Насыбуллова, кроме представлений групп кос, исследуются также представления групп виртуальных кос, инварианты классических узлов и зацеплений, инварианты виртуальных узлов и зацеплений, инварианты узлов и зацеплений

с двойными спайками и узлов и зацеплений в линзовых пространствах, аддитивные и мультиликативные группы косых брэйсов, классы скрученной сопряженности в группах. Сформулирую часть исследующихся в диссертации вопросов конкретнее.

- (A) В части исследования представлений в диссертации исследуются вопросы о построении для групп кос и групп виртуальных кос точных представлений автоморфизмами алгебраических систем. В частности, исследуется вопрос о линейности групп кос и групп виртуальных кос.
- (B) В части узлов и зацеплений в диссертации исследуется вопрос о распознавании (алгоритмической классификации) классических зацеплений /виртуальных зацеплений/ /зацеплений со спайками/ /зацеплений с двойными спайками по их диаграммам.

В направлении исследования связей между аддитивными и мультиликативными группами косых брэйсов в диссертации исследуются следующие вопросы, сформулированные Вендранином, Смоктунович и Лебедь в Коуровской тетради (вопросы 19.49, 19.90).

- (C.1) Пусть A – косой брэйс с левоупорядочиваемой мультиликативной группой. Верно ли, что аддитивная группа косого брэйса A левоупорядочивается?
- (C.2) Пусть A – косой брэйс с разрешимой аддитивной группой. Верно ли, что мультиликативная группа косого брэйса A разрешима?
- (C.3) Пусть A – косой брэйс с нильпотентной мультиликативной группой. Верно ли, что аддитивная группа косого брэйса A разрешима?

В направлении исследования классов скрученной сопряженности в группах в диссертации исследуется следующий вопрос, сформулированный Фельштыным и Хиллом в 1994 году.

- (D.1) Какие группы обладают свойством R_∞ ?

Также в диссертации изучается следующий вопрос, сформулированный Фельштыным и Гонсалвесом, который уточняет вопрос (D.1).

- (D.2) Какие классические линейные группы обладают свойством R_∞ ?

Т. Р. Насыбуллову удалось достичь выдающегося продвижения в решении комплекса указанных задач.

Так, разработанный им метод мульти-переключателей позволяет по специальным решениям теоретико-множественного уравнения Янга–Бакстера на алгебраических системах строить представления групп кос и групп виртуальных кос, а также инварианты

классических и виртуальных узлов и зацеплений. Для зацеплений с двойными спайками диссертанту удалось построить полный быстро вычислимый инвариант (со значениями в свободной абелевой группе бесконечного ранга). Для зацеплений в линзовых пространствах в диссертации построен инвариантный виртуальный квандл (порождающие и определяющие соотношения которого находятся из диаграммы зацепления в линзовом пространстве), в некоторых случаях различающий зацепления с эквивалентными поднятиями, что является заметным продвижением в части вопроса распознавания узлов и зацеплений в линзовых пространствах.

В диссертации построены примеры, дающие отрицательные ответы на вопросы (С.1), (С.2) в общем виде, а также получены положительные результаты по вопросам (С.2), (С.3) при дополнительных ограничениях. В отношении классов скрученной сопряженности и свойства R_∞ в группах диссертантом доказан следующий важный результат: если G — группа Шевалле одного из типов A_n, B_n, C_n, D_n над алгебраически замкнутым полем F нулевой характеристики, то G обладает свойством R_∞ тогда и только тогда, когда степень трансцендентности F над \mathbb{Q} конечна. Данный результат дает исчерпывающий ответ на вопрос (Д.2) для групп Шевалле классических серий.

Таким образом, в своей диссертации Т. Р. Насыбуллову удалось полностью решить или существенно продвинуться в решении ряда известных проблем, имеющих важное значение в алгебре и топологии. Отмечу, что отличительной особенностью диссертации является ее целостность по форме и содержанию, — все изложение подчинено решению четко выделенного комплекса взаимосвязанных (обозначенных выше) проблем. Все результаты, полученные в диссертации, являются оригинальными, абсолютно новыми и представляют несомненный научный интерес для специалистов в алгебре (более точно, в теории алгебраических систем и теории представлений) и топологии (в теории узлов и теории неподвижных точек Нильсена–Райдемайстера). Доказательства полученных в диссертации результатов корректны и достаточно подробны, ошибок мной не обнаружено. Результаты диссертации опубликованы в двенадцати работах в журналах первого и второго квартиля, в достаточной мере апробированы на международных конференциях.

Стиль изложения достаточно ясный, математическая грамотность и качество изложения в целом — высокие. При этом текст диссертации не лишен недостатков. Так, некоторые фразы текста диссертации могли бы быть существенно улучшены редакторской правкой, встречаются грамматические ошибки и опечатки, ряд фрагментов оформлен в определенной степени небрежно. К примеру, при определении узлов и зацеплений не упоминается ни того, что изложение ведется в кусочно-линейной (или гладкой?) категории, ни того (в качестве возможной альтернативы), что рассмотрение ограничивается ручными узлами и зацеплениями. При определении виртуальных узлов и зацеплений схожим образом не уточняется категория и не исключается случай диаграмм с бесконечным числом особых точек, а требование «в каждой точке пересечения пересекаются ровно две кривые» (а не, скажем, «ровно две дуги кривых или одной и той же кри-

вой») в соседстве с тут же упомянутыми «замкнутыми кривыми» формально выводит из рассмотрения компоненты с самопересечениями и все нетривиальные виртуальные однокомпонентные зацепления (т. е. все виртуальные узлы), в частности. Другой пример: в определении косого брэйса на стр. 24 пропущен второй по счету знак мультиплексивной операции (перед знаком обратного элемента); такой вариант записи естествен в случае, когда аддитивная группа косого брэйса абелева, однако в общем случае такая запись формально утрачивает корректность. Аналогичное замечание возникает и к определению двустороннего косого брэйса (формула (6.3) на стр. 190 диссертации). При этом определение двусторонних брэйсов естественней было бы расположить до формулировок результатов, их касающихся.

Указанные недостатки не влияют на смысловое содержание диссертации и не портят общего положительного впечатления о работе. В частности, описанная легкая небрежность в определениях даже упрощает чтение, укорачивая текст, если читатель с определениями знаком. И, конечно же, эти неточности никак не влияют на корректность и значимость результатов. Результаты, полученные в диссертации, вносят существенный вклад в развитие классического научного направления – применение алгебраических систем для изучения геометрических и топологических объектов.

Полагаю, что диссертация Т. Р. Насыбуллова «Алгебраические системы, возникающие при решении уравнения Янга–Бакстера, их приложения и свойства» удовлетворяет требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, сформулированным в пп. 9–11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней (постановление №842 от 24 сентября 2013 года), а ее автор Тимур Ринатович Насыбуллов заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

ФГБУН Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
заместитель директора по научной работе,
доктор физико-математических наук
Малютин Андрей Валерьевич

Малютин
Подпись руки Малютин
Андрей Валерьевич
УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
по кадрам ПСМИ РАН
«18» 04 2022 г.
В.Э. Владимирова

Почтовый адрес: Наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия
Телефон: +7 (921) 992 7641, E-mail: malyutin@pdmi.ras.ru