ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертацию

Кравцовой Ольги Вадимовны

«Вопросы строения конечных квазиполей и групп коллинеаций полуполевых проективных плоскостей»,

представленную на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

В диссертации Кравцовой О. В. исследуются конечные недезарговы проективные плоскости трансляций вместе с их группами коллинеаций. Для координатизации таких плоскостей с начала прошлого века применяют понятия полуполя (отказываясь в понятии поля от коммутативности и ассоциативности) и квазиполя (ослабляется также двусторонняя дистрибутивность до односторонней).

Центральной для диссертационного исследования является гипотеза 1959 года Д. Хьюза о разрешимости группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости. С 1960-х годов гипотеза подтверждалась для плоскостей ранга два над двумя из трех полу-ядер, для p-примитивных полуполевых плоскостей порядка p^4 и др.

Гипотеза редуцируется к вопросу о разрешимости группы автотопизмов (то есть, коллинеаций, фиксирующих треугольник).

Для исследования конечных квазиполей и ассоциированных плоскостей систематически используются методы компьютерной алгебры.

Если неразрешимая группа коллинеаций существует, то ее минимальная неразрешимая подгруппа G имеет факторгруппу, являющуюся минимальной простой неабелевой группой. Давний интерес вызывал случай, когда G – простая неабелева группа наименьшего возможного порядка.

Мультипликативную лупу ненулевых элементов квазиполя Q обозначим через Q^*. Если ее исчерпывают левоупорядоченные степени фиксированного элемента, то Q и Q^* называют левопримитивными; аналогично определяют правопримитивность.

С 1991 года известна гипотеза Г. Венэ: всякое конечное полуполе левопримитивно или правопримитивно. В 2004 году контрпример к гипотезе Венэ (полуполе Кнута–Руа) нашел И. Руа в классе полуполей порядка 32. Другой контрпример дает полуполе Хентзела–Руа порядка 64 (2007 г.). С другой стороны, гипотеза подтверждена для полуполей порядков 81, 125, 243. Контрпримеры полуполей нечетного порядка до сих пор не найдены.

Л. Диксон выделил широкий класс почти-полей $DF(p^l, n)$ (почти-поля Диксона) с центром $GF(p^l)$, где n – степень расширения почти-поля над центром. В 1936 году Г Цассенхауз доказал, что кроме почти-полей Диксона существует только семь исключительных конечных почти-полей.

По аналогии с конечными полями, для любого почти-поля Q из класса $DF(p^l, n)$ в 1971 году С. Данкс установила биективное соответствие между под-почти-полями и делителями числа ln. Для любого конечного почти-поля У. Фелгнер доказал единственность максимального подполя, содержащего центр. Естественным является вопрос о возможном числе максимальных подполей.

Основные методы исследования.

Метод регулярного множества применяется как для построения проективных плоскостей, так и для построения координатизирующих полуполей и квазиполей. Наряду с методами компьютерной алгебры используются общие методы линейной алгебры, теории групп, колец и конечных полей.

Пусть Π – недезаргова полуполевая проективная плоскость порядка p^N, где p – простое число и $N = 2^m \cdot s$, где s нечетно. Размерность N координатизирующего полуполя над его простым подполем в дальнейшем называется рангом.

Основные результаты диссертации.

При $p > 2$ в группе автотопизмов плоскости П нет подгрупп, изоморфных знакопеременной группе A_5. Если p сравнимо с 1 по модулю 4 и либо $m < 2$, либо $N = 4$, то нет и подгрупп, изоморфных $SL(2,5)$.

При $p > 2$ в группе автотопизмов плоскости П нет подгрупп, изоморфных группе Судзуки $Sz(2^n)$ для всех $n > m$.

При p, сравнимом с 1 по модулю 4, в группе автотопизмов плоскости П нет диэдральной группы порядка 8 без гомологий.

При p, несравнимом с -1 по модулю 4, в группе автотопизмов плоскости П нет подгрупп, изоморфных $PSL(2,q)$, q сравнимо с 1 по модулю 2^{m+2}.

Вопросы (A)–(D) В.М. Левчука о строении конечных квазиполей завершены для полуполей порядка 16 и решены для полуполей Кнута–Руа и Хентзела–Руа, для полуполей порядков 3^4, 5^4, 13^4 с ограничениями.

На вопрос А. В. Заварницина о существовании квазиполей, мультипликативная лупа которых есть лупа Муфанг, дан отрицательный ответ для квазиполей порядка 25.

Доказано существование минимальных собственных почти-полей произвольной простой степени расширения $n > 2$ над центром.

Вопрос об ограниченности, в целом, числа максимальных подполей конечного почти-поля решен отрицательно даже в классе минимальных собственных почти-полей.

Содержание диссертации.

Глава 1 содержит основные определения и технические результаты, необходимые для дальнейшей работы.

Глава 2 содержит предварительное обсуждение предлагаемой программы решения проблемы Хьюза и описание основного применяемого метода.

В главе 3 для любой недезарговой полуполевой плоскости нечетного порядка выяснено отсутствие в группе автотопизмов подгрупп, изоморфных

A_5 (теорема 3.5.2), и при условии на характеристику основного поля – изоморфных D_8 (теорема 3.6.1). Для доказательства потребовалось построить матричное представление регулярного множества для полуполевых плоскостей с ограничениями на группу автотопизмов.

В параграфе 3.2 получено матричное представление элементарной абелевой 2-подгруппы в группе автотопизмов полуполевой плоскости, единообразное для случаев четного и нечетного порядка. Если такая подгруппа порядка 2^m порождена бэровскими инволюциями, фиксирующими поточечно различные бэровские подплоскости, то ранг N плоскости П делится на 2^m (теорема 3.2.1).

Отсутствие подгрупп $Sz(2^{2n+1})$ в группе автотопизмов плоскости П доказано в теореме 3.2.4 при некоторых ограничениях.

Следствие 3.3.8 выделяет группы $PSL(2,q)$, которые не могут быть подгруппами автотопизмов полуполевой плоскости данного порядка.

В главе 4 рассматриваются примеры полуполевых плоскостей, иллюстрирующие теоретические результаты главы 3.

В параграфе 4.1 перечислены минимальные примеры полуполевых плоскостей ранга 2 над ядром, допускающие S_3 в группе автотопизмов (примеры к теоремам 3.8.1 и 3.8.4).

Параграф 4.3 посвящен построению примеров полуполевых плоскостей порядка 81, допускающих бэровскую инволюцию (к теореме 3.1.2). Основной результат (теорема 4.3.1) показывает, что все построенные примеры являются 3-примитивными плоскостями.

Понятие p-примитивных полуполевых плоскостей впервые возникло в работе Й. Хирамин, М. Мацумото и Т. Ояма. Исследование было продолжено М. Кордеро, построившей примеры четырех 3-примитивных плоскостей порядка 81. С использованием результатов И. В. Шевелевой (Бусаркиной) доказано существование еще четырех 3-примитивных плоскостей вне перечня М. Кордеро.

Глава 5 посвящена решению вопросов (A)–(D) для некоторых конечных полуполей.

Глава 6 содержит решение вопросов (B)–(D) для конечных почти-полей.

Глава 7 решает вопрос (A) о максимальных подполях в конечных почти-полях (теоремы 7.1.3 и 7.1.4). В параграфе 7.2 обсуждаются минимальные собственные почти-поля, т.е. нетривиальные почти-поля, в которых каждое собственное под-почти-поле является подполем.

Результаты диссертации опубликованы в 25 статьях в рецензируемых журналах, в том числе 23 статьи в изданиях перечня ВАК. Эти результаты неоднократно докладывались на различных конференциях и семинарах (в том числе в МГУ). Автореферат диссертации полностью отражает ее содержание.

Замечания

1. В пункте Апробация диссертации автореферата неудачен оборот «Результаты диссертации апробировались...»
2. Неудачно слово «где» в следствии 3.3.8: «Группа автотопизмов плоскости П не содержит подгрупп, изоморфных $PSL(2,q)$, где $q-1$ делится на 2^{m+2}».
3. Абзац после теоремы 3.5.2 заканчивается словами «а также и некоторые другие неабелевы группы» (пропущено слово «простые»).
4. В главе 5 имеется фраза «В параграфе 4.5 представлено полное решение вопросов…».

Считаю, что диссертация О. В. Кравцовой «Вопросы строения конечных квазиполей и групп коллинеаций полуполевых проективных плоскостей» удовлетворяет требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, сформулированным в пп. 9-11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней (постановление №842 от 24 сентября 2013 года), а ее автор Ольга Вадимовна Кравцова заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

ФГБУН «Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского Уральского отделения
Российской академии наук»,
главный научный сотрудник отдела алгебры и топологии,
доктор физико-математических наук,
профессор, член-корреспондент РАН

Махнев Александр Алексеевич

Почтовый адрес: ул. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620084, Россия
Телефон: +7 (343) 3753476,
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Подпись заверяю
Врио ученого секретаря
ИММ УрО РАН Сурков Платон Геннадьевич

19.08.2022