ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
А.С. Пейчевой «О спектральных свойствах
операторов, ассоциированных с некоэрцитивными
смешанными задачами для эллиптических систем»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.01 –
вещественный, комплексный и функциональный анализ

Центральными в теории краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными являются вопросы о существовании, единственности и регулярности решений. Кроме того, немаловажен и аспект нахождения (конструктивного построения) их решений. В XX-ом столетии все эти вопросы были тщательно изучены в рамках концепции обобщенных решений, а спектральная теория обеспечила удобные разложения по собственным функциям для классических краевых задач для уравнений математической физики в пространствах Соболева (Бесова, Лизоркина, Орлича и т.д.). Для эллиптических уравнений и систем были найдены простые условия, гарантирующие не только существование и единственность решений, но и их максимальную ожидаемую регулярность (так называемые условия Шапиро-Лопатинского). Тем не менее, в 60-х годах двадцатого столетия были также обнаружены и естественные классы (смешанных) задач для эллиптических систем, где регулярность решений существенно снижается вблизи границы. Такова, например, задача с наклонной (косой) производной, естественно возникающая в астрономии (см. работы А. Пуанкаре, Б. Панеяха и многих других) или комплексная задача Неймана, появившаяся при решении переопределенных комплексных уравнений (см. работы Л. Хермандера и Дж. Кона). При этом, если в задаче с наклонной производной максимальную регулярность решений все еще можно гарантировать за счет выбора условий на векторные поля, порождающие граничные условия, то в комплексной задаче Неймана падение регулярности неизбежно по самой природе задачи. Такие задачи известны в литературе под названием субэллиптических, поскольку внутренняя регулярность решений остается максимальной, а падение гладкости вблизи границы можно контролировать. Фактически, центральную роль при их решении играют подходящие теоремы о непрерывном и компактном вложениях для пространств соболевского типа. После работ В.А. Кондратьева стало ясно, что при решения смешанных задач наиболее естественно использовать весовые функциональные пространства, где вес выбран так, чтобы контролировать поведение решения вблизи множества, на котором граничные условия меняют свой тип. Недавно Н. Тарханов и А. Шлапунов в серии работ описали один естественный класс субэллиптических смешанных задач для скалярных комплексных сильно эллиптических операторов в обычных и весовых пространствах Соболева.

В диссертации А.С. Пейчевой речь идет о смешанных краевых задачах для матричных сильно эллиптических операторов в (весовых) пространствах соболевского типа. В ней рассмотрены как вопросы существования, единственности и регулярности решений, так и вопросы нахождения собственных функций и чисел одного класса субэллиптических задач с граничными условиями робеновского типа. Исследования проведены методами функционального и комплексного анализа.

Диссертационная работа состоит из Введения, трех глав (разделенных на параграфы), заключения и списка литературы. Работа изложена на 130 страницах, библиография включает 81 наименование.

Во **Введении** обосновывается актуальность исследований диссертационной работы, дается достаточно подробный обзор современного мирового состояния проблемы, кратко излагается содержание работы, формулируются основные результаты, а также приводятся необходимые сведения, характеризующие диссертацию, автора и полученные результаты

В **первой главе** вводятся необходимые в работе определения и обозначения, а также доказывается один из основных результатов диссертации – теорема вложения для пространств соболевского типа, порожденных одним классом эрмитовых форм, в шкалу стандартных пространств Соболева-Слободецкого. Описанный класс эрмитовых форм является новым, но достаточно узким - он соответствует обобщенным лапласианам эллиптических систем. Однако на практике, этот класс фактически охватывает большинство операторов математической физики (оператор Лапласа, оператор Ламе и их различные возмущения). В главе приводятся и немедленные следствия данной теоремы по отношению к спектральной теории смешанных задач для подходящих (в том числе, несамосопряженных) возмущений обобщенных лапласианов. Также интересным, с точки зрения оппонента, является применение полученных результатов для построения приближенных решений некорректной задачи Коши для эллиптических систем.

Вторая глава диссертации посвящена рассмотрению смешанных задач для систем теории линейной упругости в весовых пространствах Соболева. В ней проводится сравнение между классической смешанной задачей теории упругости, полностью исследованной ранее в работах Г. Фикеры, и одной субэллиптической смешанной задачей, поставленной известным итальянским математиком С. Кампонато. Автор успешно получает теоремы единственности и существования для этой задачи в весовых пространствах Соболева, что не удалось С. Кампонато в виду отсутствия для данной задачи классических априорных оценок типа неравенств Корна или Гординга, также доказанных в диссертации. Этот факт достаточно весомо подтверждает актуальность и силу выбранной методики исследования, а также квалификацию соискателя.

Наконец, **третья глава** посвящена нахождению спектра задачи типа Зарембы в единичном круге на комплексной плоскости. Фактически в ней рассматриваются смешанная задача с комплексной косой производной на части границы, которая решается методами комплексного анализа. Для классических задач Дирихле и Неймана на этом пути получаются простые примеры.

В диссертации А.С. Пейчевой имеются некоторые неточности редакционного характера:
на стр. 7, 1 строка, опечатка: «*k* копий …» должно быть пространства *X,* а там В-готическое;
на стр. 7, 2 строка, пропущена открывающая квадратная скобка у пространства;
в левой части неравенства из условия теоремы 1.2.1, в формуле (1.10) в левой части пропущен символ функции u ;
на стр. 8, теорема 1.2.1, пункт первый, пропущен индекс у константы в неравенстве;
на стр. 10, формула (0.6), в индексе лишняя закрывающая круглая скобка.
на стр. 27, опечатка внизу страницы, вместо В-готического должно быть *X;*
на стр. 68, формула (1.72), опечатка в индексе второго слагаемого, лишняя закрывающая скобка;
на стр. 78, формулы (2.7)-(2.9) и неравенства после них, опечатки, в индексе скалярного произведении должно стоять не обозначения пространств, а обозначение их n-копий;
на стр. 86, доказательство Леммы 2.1.5, в первом скалярном произведении опечатка в индексе пространства – стоит m, а должно быть n;
на стр. 88, 4 строка, опечатка, пространство $H^{+,\gamma}$ по построению используется без обозначения индексом n ;
на стр. 94, опечатка, в скалярном произведении внизу страницы вместо n-копий пространств взяты просто пространства;
с. 100, 4 строка, английский текст вместо русского.

Заметим также, что в главе 3 условия того, что некоторое число является собственным для изучаемой задачи, представляются громоздкими и трудно проверяемыми.

Отмеченные недостатки не влияют на общую оценку диссертации А.С. Пейчевой.

По теме диссертации опубликовано 9 научных работ, среди них 4 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертаций (последние также входят и в международную наукометрическую базу Web of Science).

Диссертационная работа А.С. Пейчевой представляет собой завершенную научную работу. Результаты диссертации являются достоверными, новыми и актуальными, вносят заметный вклад в спектральную теорию смешанных краевых задач. Все основные утверждения сопровождаются строгими математическими доказательствами. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации. Основные результаты своевременно опубликованы в изданиях, рекомендованных ВАК (всего 4 статьи) и неоднократно докладывались на различных российских и международных научных конференциях.

Считаю, что диссертация А.С. Пейчевой «О спектральных свойствах операторов, ассоциированных с некоэрцитивными смешанными задачами для эллиптических систем полностью соответствует п. 9-14 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. №842, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор, Пейчева Анастасия Сергеевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент
д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник
лаборатории дифференциальных и разностных уравнений
федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Институт математики
им. С.Л. Соболева РАН / А.И. Кожанов /
Александр Иванович Кожанов

«__5__» июня 2018 г.

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090,
Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Тел.: +8 (383) 297683, e-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Подпись А. И. Кожанова
удостоверяю
Зав. орготделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
05 06 2018 г.