ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕТА
на диссертацию Тарасова Юрия Сергеевича
«Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания»,
представленную на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел.

Группы подстановок конечных множеств — классический объект исследования не только в теории групп, но и алгебры в целом. Имеется богатая теория и многочисленные приложения конечных групп подстановок как в самой математике, самое известное из которых — теория разрешимости уравнений в радикалах, так и в смежных науках — физике, химии, где они используются для описания симметрий различных объектов. Переход к изучению групп подстановок бесконечных множеств мотивирован несколькими причинами. Во-первых, распространение результатов на бесконечные группы и разработка универсальных методов. Во-вторых, представление бесконечных групп группами подстановок специального вида. В-третьих, группы подстановок бесконечных множеств позволяют, с одной стороны, строить примеры групп с экзотическими свойствами, с другой стороны, дают возможность построения общих теорий для групп, примеры которых носят изолированный характер. Естественно, эти исследования не обходятся без классических вопросов, таких как порождаемость и нормальное строение, которым посвящена настоящая диссертация.

Диссертация изложена на 54 страницах и состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы, состоящего из 17 источников, списка работ автора по теме диссертации, состоящего из 8 публикаций.

Во введении обосновывается актуальность исследуемых в диссертации вопросов, кратко излагается содержание работы, формулируются основные результаты, перечисляются апробации результатов.

Первая глава начинается с определения основных понятий теории групп подстановок произвольного множества Ω. Даются определения финитарной подстановки — переставляет конечное число элементов из Ω, ограниченной подстановки — для каждого элемента $x \in \Omega$, где $\Omega = Z$ или $\Omega = N$, расстояние между ним и его образом не превосходит некоторой константы. В группе подстановок $S(N)$ выделяются подгруппа $Fin(N)$ и её естественное расширение — подгруппа $Lim(N)$, образованные соответственно всеми финитарными и ограниченными подстановками. Затем автор, следуя работам Н.М. Сучкова, дает определения рассеянного и вполне рассеянного множеств — основных в этой главе. Приведём графовую интерпретацию этих понятий. Пусть $L = \{x_1, x_2, \dots\}$ — произвольное бесконечное подмножество множества N. Зафиксируем натуральное число m и построим граф Γ_m с множеством вершин $x_1, x_2, \dots$, две различные вершины x_i и x_j соединяем ребром тогда и только тогда, когда $|x_i - x_j| \leqslant m$. Если для каждого m порядки всех связных компонент графа Γ_m конечны, то множество L является рассеянным, а если они ещё и ограничены в совокупности, то L является вполне рассеянным множеством.

В теореме 1.1, которая является основным результатом первой главы, автор показывает, что нормальное замыкание T инволюции

$$a = (x_1 x_1 + 1)(x_2 x_2 + 1) \dots (x_n x_n + 1) \dots,$$

где $x_i + 1 < x_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$, в группе $Lim(N)$ тогда и только тогда является собственной подгруппой группы $Lim(N)$, когда $L = \{x_1, x_2, \dots\}$ — рассеянное множество. Кроме этого, если L — рассеянное, но не вполне рассеянное множество, то T — смешанная группа. Теорема 1.1, в частности, показывает, что в отличии от группы финитарных подстановок, которая содержит единственную нетривиальную нормальную подгруппу, группа $Lim(N)$ имеет более богатую нормальную структуру.

Для доказательства достаточности строятся вложенные друг в друга покрытия $W_m = \{W_{mi}\}_{i=1}^{\infty}$, $m = 1, 2, \dots$, множества L, состоящие из объединений отрезков с центрами в точках множества L и длины $2m$; по каждому покрытию W_m строится подгруппа Q_m группы $Lim(N)$, состоящяя из подстановок тривиальных вне W_m и относительно которых множества W_{mi}, $i = 1, 2, \dots$, переходят в себя. По построению $a \in Q_1$, а объединение возрастающей цепочки подгрупп Q_m является собсвенной нормальной подгруппой в $Lim(N)$. Доказательство достаточности условий проводится методом от противного. При этом используется ряд интересных приёмов удаления циклов при сопряжении подстановок, которые, конечно, не имеют аналогов в конечном случае.

Во второй главе изучаются расширения $Disp(N)$ и $Disp(Z)$ групп $Lim(N)$ и $Lim(Z)$ соответственно, образованные всеми подстановками $g \in S(M)$, $M = N, Z$, для которых

$$\max(\max_{\alpha \in M} |M_\alpha(g)|, \max_{\alpha \in M} |L_\alpha(g)|) < \infty,$$

здесь

$$M_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in M, \beta \leqslant \alpha < \beta^g\}, \qquad L_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in M, \beta^g \leqslant \alpha < \beta\}.$$

Полезным здесь оказалось понятие равномерной подстановки. Подстановка $g \in S(M)$ называется равномерной, если $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| < \infty$ для всех $\alpha \in M$. Множество всех равномерных подстановок образует группу, совпадающую с $S(N)$ в случае, когда $M = N$. Подгруппу всех равномерных подстановок группы $S(Z)$ обозначим через R.

Обозначим через t инволюцию группы $S(Z)$, для которой $\alpha^t = -\alpha$ для всех $\alpha \in Z$, а через d — сдвиг: $\alpha^d = \alpha + 1$ для всех $\alpha \in Z$. Связь между группами $Disp(N)$ и $Disp(Z)$ выявляет

Теорема 2.1. $Disp(Z) \cap R = Fin(Z) \cdot (Disp(N) \times Disp(N)^t)$.

Следующая теорема 2.2 показывает, что группа $Disp(Z)$ раскладывается в полупрямое произведение подгруппы равномерных подстановок и бесконечной циклической группы.

Теорема 2.1. $Disp(Z) = (Disp(Z) \cap R) \leftthreetimes \langle d \rangle$.

В процессе доказательства указанных теорем получен ряд интересных свойств множеств $M_\alpha(g)$, $L_\alpha(g)$ и достаточные условия равномерности подстановки.

Завершается глава теоремой о расположении конечных подмножеств в группах $Disp(N)$ и $Disp(Z) \cap R$. А именно, установлена следующая

Теорема 2.3. В группах $Disp(N)$ и $Disp(Z) \cap R$ любое конечное подмножество содержится группе $Q = AB$, где A, B — локально финитно аппроксимируемые подгруппы из G.

В третьей, заключительной, главе решается задача нахождения систем порождающих групп $Disp(M)$, $M = N, Z$. Показано, что группа $Disp(N)$ порождается подстановками множества N, которые имеют параметр рассеивания 1 и разлагаются в произведение конечных независимых циклов (теорема 3.2). Доказана порождаемость группы $Disp(Z)$: 1) подстановками множества Z с параметром рассеяния 1; 2) множеством $\{g, g^t \mid g \in Disp(N), \lambda(g) = 1\}$ и сдвигом d (теоремы 3.1 и 3.3).

Отправным пунктом исследований здесь является следствие теоремы 2.3 о порождаемости группы $Disp(N)$ подстановками разлагающимися на конечные независимые циклы. Сначала автор характеризует конечные циклы $(\alpha_1 \dots \alpha_r)$, запись цикла начинается с минимального элемента, с параметром рассеяния 1, как циклы, элементы $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ которых удовлетворяют неравенствам $\alpha_1 < \dots < \alpha_n > \alpha_{n+1} > \dots > \alpha_r$, где $\alpha_n = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Затем показывает, что параметр рассеяния подстановки g множества N, разлагающейся на конечные независимые циклы, равен 1 тогда и только тогда, когда это разложение имеет вид $g = x_1 x_2 \dots$, где $x_1 < x_2 < \dots$ и $\lambda(x_i) = 1$, $i = 1, 2, \dots$. Здесь $x = (\alpha_1 \dots \alpha_r) < y =$

$(\beta_1 \dots \beta_m)$ в том и только том случае, если $\alpha_i < \beta_j$ для всех $i = 1, \dots, r$ и $j = 1, \dots, m$. Доказательства обоих результатов — несложный анализ множеств $M_\alpha(t)$. Далее предложена схема построения по произвольному конечному циклу x такого конечного цикла $\bar{x}$, что $supp(\bar{x}) \subseteq supp(x)$, $\lambda(\bar{x}) = 1$ и $\lambda(x\bar{x}^{-1}) = \lambda(x) - 1$. Это позволило автору установить для произвольной подстановки $g \in Disp(M)$, разложимой на конечные независимые циклы $g = x_1 x_2 \dots$, индукцией по $l = \max_i \lambda(x_i) \leq \lambda(g)$, разложимость g в произведение $g = g_1 \dots g_s$, где каждая подстановка g_i, $i = 1, \dots, s$ лежит в $Disp(M)$ и разлагается в конечные независимые циклы с параметром рассеяния 1. В заключении, для каждой подстановки $g \in Disp(N)$, разложимой на конечные независимые циклы с параметром рассеяния 1, индукцией по $\lambda(g)$, устанавливается её разложимость в произведение подстановок с параметром рассеяния 1, каждая из которых раскладывается на конечные независимые циклы.

Перечисленные результаты и отмеченные идеи их доказательств позволяют сделать вывод о том, что автор владеет широким набором методов как общей теории групп, так и групп подстановок.

Хорошо продумана последовательность изложения материала в работе, она легко читается. Тем не менее, есть ряд опечаток и замечаний, которые приведены ниже.

1) Стр. 9, первый абзац. Напечатано: "из работ [13]", должно быть: "из работы [13]".

2) Стр. 9, второй абзац. Напечатано: "называется подстановкой множества Ω если", должно быть: "называется подстановкой множества Ω, если".

3) Стр. 9, второй абзац. Напечатано: "Относительно этой операции $S(\Omega)$-группа.", должно быть: "Относительно этой операции $S(\Omega)$ — группа.".

4) Стр. 10, строка 1. Напечатано: "$\alpha_m^h = h_1$", должно быть: "$\alpha_m^h = \alpha_1$".

5) Стр. 13, строка 13. Напечатано: "Группы $Lim(N)$.", должно быть: "группы $Lim(N)$.".

6) Стр. 13, строка 17. Напечатано: "вполне рассеяное множество", должно быть: "вполне рассеянное множество".

7) Стр. 17, строки 6,7. Напечатано: "c^e", должно быть: "c^l".

8) Стр. 19, строка 16. Напечатано: "$\Delta_n = U^{\beta_{2n+1}}_{\beta_{2n+1}}$, $\Delta_{n+1} = U^{\beta_{2n+3}}_{\beta_{2n+1}+1}, \dots$", должно быть: "$\Delta_n = U^{\beta_{2n+1}}_{\beta_{2n-1}}$, $\Delta_{n+1} = U^{\beta_{2n+3}}_{\beta_{2n+1}}, \dots$".

9) Стр. 20, строка 5. Напечатано: "γ_n, β_{2j_n} принадлежат отрезку Δ_n и $|\Delta_n| \leqslant 2m$,", должно быть: "γ_n, β_{2j_n} принадлежат отрезку Δ_{j_n} и $|\Delta_{j_n}| \leqslant 2m$,".

10) Стр. 24, строка 3. Напечатано: "$\gamma^{yx} = \beta$.", должно быть: "$\gamma_1^{yx} = \beta$.".

11) Стр. 24, строка 16. Напечатано: "индукции по $|M_\alpha(h)|$.", должно быть: "индукцией по $|M_\alpha(h)|$.".

12) Стр. 29, строка 5. Напечатано: "**Теорема 2.6.**", должно быть: "**Теорема 2.3.**".

13) Стр. 40, строка 17. Напечатано: "$\alpha_n > \alpha_{n+1} > \dots >> \alpha_r > \alpha_1$.", должно быть: "$\alpha_n > \alpha_{n+1} > \dots > \alpha_r > \alpha_1$.".

14) Стр. 41, строка 10. Предложение "Рассмотрим счётное ..." должно начинаться с красной строки.

15) Стр. 41, строка 4 снизу. Напечатано "индекс $j > 0$,", должно быть "индекс $j < 0$,".

16) Стр. 42, строка 5 снизу. Напечатано: "$\beta_0 << \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$.", должно быть: "$\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < \dots$.".

17) Стр. 43, строка 7 снизу. Напечатано: "$\lambda(u) == \lambda(v) = 1$.", должно быть: "$\lambda(u) = \lambda(v) = 1$.".

Замечания. В формулировке леммы 3.8 утверждается, что каждый сомножитель разложения элемента $g \in Disp(M)$ также лежит $Disp(M)$. В доказательстве леммы об этом не говорится ни слова. Доказательство теоремы 3.2 начинается со ссылки на теорему 1 из работы [18], хотя эта теорема под номером 2.3 сформулированна и доказана в самой диссертации.

Не смотря на отмеченные опечатки и замечания, в целом впечатления от представленных результатов и их изложения хорошие. Диссертация Ю.С. Тарасова представляет собой законченную научную работу. Полученные в ней результаты являются достоверными, новыми и актуальными, они вносят существенный вклад в теорию групп постановок. Список литературы хорошо отражает содержание предмета диссертационного исследования. По теме диссертации опубликовано 4 статьи в изданиях рекомендованных ВАК РФ, 3 из которых в соавторстве, и 4 публикации в сборниках тезисов докладов конференций.

Считаю, что диссертация Ю.С. Тарасова «Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания» полностью соответствует п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней"от 24 сентября 2013 г. № 842, удовлетворяет всем требованиям, предъявленным ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел, а ее автор, Юрий Сергеевич Тарасов, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Официальный оппонент: Колесников Сергей Геннадьевич

ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева» кафедра безопасности информационных технологий, заведующий кафедрой, доктор физико-математических наук, доцент.

Почтовый адрес:

660037, Сибирский федеральный округ, Красноярский край, г. Красноярск, проспект им. газеты Красноярский рабочий, дом 31.

Телефон: +7 (913) 574-72-36.

E-mail: sgkolesnikov@sibsau.ru

Подпись Колесникова С.Г. удостоверяю
УПРАВЛЕНИЕ КАДРОВ
Вед. спец. ОК
Начальник УК СибГАУ
06.09.2018 г.Красноярск