ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Шлепкина А.А. «Группы, насыщенные конечными группами специального вида», представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

В диссертационной работе А.А.Шлепкина рассматриваются два класса бесконечных групп — периодические группы и группы Шункова, обладающие насыщающими множествами, состоящими из конечных групп специального вида. Класс групп Шункова (обобщение класса периодических групп) был введен В.П. Шунковым в 70-е годы прошлого века, и первоначально сам В.П. Шунков называл такие группы сопряженно-бипримитивно конечными.

Группа G называется группой Шункова (сопряженно-бипримитивно конечной группой), если для любой конечной подгруппы H из G в фактор группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка по- рождают конечную группу.

Как стало ясно из работ А.В.Рожкова и других математиков, группы Шункова отличны от локально конечных групп. Кроме того, они не обязательно являются периодическими. Наиболее близким к классу конечных групп является класс локально конечных групп, явившийся в значительной степени объектом изучения в 60-х годах прошлого века (О.Кегель, В.П.Шунков, М.И.Каргаполов). Позднее, в связи с проблемой У.Бернсайда, появилось значительное количество работ, посвященных промежуточным классам групп между классами локально конечных и классом всех периодических групп (группы С.П.Новикова и С.И. Адяна, Е.С.Голода,С.В.Алешина, Р.И.Григорчука, А.Ю.Ольшанского, И.Г.Лысенка, С.В.Иванова, А.И.Созутова)

Анализ исследований, посвященных бесконечным группам с различными условиями конечности позволил выделить ряд важных подходов и понятий, связанных с этими направлениями. Прежде всего, можно отметить понятие локальной системы подгрупп (О.Кегель, А.И.Мальцев) и покрытия в группах (П.Г.Конторович, А.С.Пекелис и А.И.Старостин). Наконец, в 1993 г. было введено понятие насыщенности (А.К.Шлепкин).

В случае локально конечной группы понятия насыщенности и локальной системы подгрупп эквивалентны. Однако в общем случае, как показывают примеры групп П.С.Новикова и С.И.Адяна, это не так.

Один из естественных вопросов, которые возникают в связи исследованиями О.Кегеля, В.В.Беляева, А.В.Боровика, Б.Хартли и представителей Красноярской алгебраической школы следующий:

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа? (Коуровская тетрадь, вопрос 14.101).

В связи с тем, что класс групп Шункова шире класса периодических групп, естественным является следующий вопрос, центральный для диссертации:

Вопрос А Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа?

В связи с исследованиями, посвященными вопросу 14.101 из "Коуровской тетради были получены частичные решения Вопроса А для групп Шункова, насыщенных конечными простыми группами ранга 1 в работах К.А.Филиппова и А.Г.Рубашкина (когда насыщающее множество состоит из групп $L_2(q)$), Д.В.Лыткиной, Л.Р.Тухватуллиной (когда насыщающее множество состоит из групп $U_3(2^n)$) и К.А.Филиппова (для случаев $L_2(2^l), U_3(2^{2^k}), Sz(q), Re(q)$). Более полный обзор имеется в статье А.А.Кузнецова и К.А.Филиппова ([11]в автореферате диссертации). Уже из этого небольшого введения ясно, что работа является интересной и актуальной.

Целью диссертации является исследование бесконечных групп с фиксированным множеством подгрупп и заданным способом их вложения в рассматриваемую группу. В частности, для групп, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1, решить вопрос 14.101 из Коуровской тетради. Сформулированный выше Вопрос А для групп Шункова решить для случая, когда насыщающее множество состоит из конечных простых неабелевых групп лиева типа ранга 1.

Методы исследования. Для исследования групп с заданным множеством конечных групп и заданным способом вложения конечных групп применяются методы локального анализа конечных групп. Кроме того, используются методы исследования групп с различными условиями конечности

Диссертация изложена на 142 страницах и состоит из введения, семи глав и списка литературы, содержащего 105 наименований. Во введении приводится обзор темы диссертации, рассказывается об истории рассматриваемых задач, приводится краткое описание основных результатов диссертации и ее структуры, вклада соавторов в доказательства.

Основные результаты, история вопроса и мотивировка исследования аккуратным образом изложены во Введении. Здесь же обоснованы методы и основные этапы работы.

В первой главе рассматриваются известные факты и вспомогательные утверждения. Помимо чисто служебной роли глава 1 является и полезным ориентиром для понимания логики исследования.

Во второй главе изучаются группы, насыщенные не только конечными простыми группами. В §2.1 исследуются периодические группы, насыщенные сплетенными группами. В§2.2 получена следующая

Теорема 2.2.1 Пусть группа Шункова G насыщена группами из множества конечных простых неабелевых групп, и в G есть инволюция z такая, что $C_G(z)$ содержит конечное число элементов конечного порядка. Тогда G обладает периодической частью, изоморфной конечной простой неабелевой группе. В частности, если G — бесконечная группа, то G — не простая группа.

В §2.4 исследовались группы, насыщенные подгруппами из множества $L_2(q)$ (где $q \equiv \pm 3 \pmod 8$) и группы диэдра с силовской подгруппой порядка 2). В теореме 2.4.1 доказано, что такая группа изоморфна группе $L_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q, либо локально диэдральной группе с силовской 2-подгруппой порядка 2.

В третьей главе исследуются группы, насыщенные группами $GL_2(q)$, $PGL_2(q)$ над полями произвольной характеристики. В §3.1 доказана теорема 3.1.1 о локально конечных группх, насыщенных группами $GL_2(q)$. В §3.2 исследованы группы Шункова, насыщенные группами $GL_2(q)$ и $PGL_2(q)$ над конечными полями фиксированной характеристики. Доказанные теоремы 3.2.1, 3.2.7 и 3.2.13 содержатся в совместной статье с

И.В.Сабодах, но теоремы 3.2.7 и 3.2.13 принадлежат автору диссертации, тогда как оформление теоремы 3.2.1 принадлежит
И.В.Сабодах, а идея доказательства – автору. В §3.4 исследованы периодические группы Шункова, насыщенные группами $GL_2(p^n)$ уже над произвольным полем (числа p и n не фиксироваы). Теорема 3.4.1 принадлежит автору диссертации.

В четвертой главе исследуются группы, насыщенные унитарными и линейными группам степени три над полями произвольной характеристики. В теоремах 4.1.7 и 4.2.1 доказано, что группа Шункова, насыщенная указанными группами, обладает периодической частью, изоморфной $L_3(Q)$ или $U_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q. Теорема 4.3.1, в которой условие насыщенности указанными подгруппами,накладывалось на периодическую группу, опубликована в совместной работе с консультантом диссертации Д.В.Лыткиной, с которой обсуждалась идея доказательства. Но детальная проработка доказательства принадлежит диссертанту.

В пятой главе рассмотрены группы Шункова, насыщенные группами лиева типа ранга 1. В параграфе 5.1 рассмотрены группы Шункова, насыщенные группами из множества

$$\{J_1, L_2(q), Re(q), U_3(q), Sz(q)\}.$$

Доказаны теоремы 5.1.1 и 5.2.1. В теореме 5.1.1 описаны группы Шункова, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами, причем в любой ее конечной 2-подгруппе K все инволюции из K лежат $Z(K)$. В этом случае заключение теоремы состоит в том, что G имеет периодическую часть, изоморфную одной из следующих групп:

$$J_1, L_2(Q), Re(Q), U_3(Q), Sz(Q),$$

где Q – подходящее локально конечное поле.

Теорема 5.2.1 Группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подхо- дящим локально конечным полем Q.

В главе 6 рассмотрены периодические группы, насыщенные группами лиева ранга 1. В §6.1 рассмотрены периодические группы, насыщенные группами $L_2(r)$ и $U_3(q)$, где rq нечетно. В теореме 6.1.1, полученной совместно с Д.В.Лыткиной, доказано, что соответствующая бесконечная периодическая группа изоморфна $L_2(R)$ или $U_3(Q)$ для соответствующего локально конечного поля нечетной характеристики.В теореме 6.2.1 , принадлежащей диссертанту, доказано, что периодическая группа G, насыщенная конечными простыми группами лиева типа ранга 1, изоморфна группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем.

В главе 7 рассмотрены периодические группы 2-ранга 2 и группы Шункова, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами. Тогда (теорема 7.1.1)группа G содержится в следующем списке групп над подходящими полями:

$$L_2(Q), A_7, L_3(P), U_3(R), M_{11}, U_3(4).$$

Теорема 7.1.1 получена в совместной работе с Д.В.Лыткиной и А.И.Созутовым. В теореме 7.2.1 доказано, что группа Шункова G 2-ранга 2, насыщенная конечными простыми неабелевыми группами, обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна одной из групп теоремы 7.1.1.

Основные достижения диссертации следующие.

1. Доказано, что периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{GL_2(q)\}$, где q — степень простого числа, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q— подходящее локально конечное поле.

2. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{PGL_2(q)|q\}$ — степень простого числа, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле.

3. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества$\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q)|q\}$ — степень простого числа, $q > 3$, изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

4. Доказано, что группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M} = \{U_3(q), L_3(q)|q\}$ — степень простого числа, $q > 3$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q.

5. Доказано, что периодическая группа G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, изоморфна про-

стой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем.

6. Доказано, что группа Шункова G, насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, изоморфной простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 19 работах в рецензируемых изданиях, удовлетворяющих требованиям, предъявляемым пп. 11-12 Положения о присуждении ученых степеней от 24.09.2013 N 242.

Изложение материала в диссертации соответствует всем требованиям, предъявляемым к математическим текстам: все выносимые на защиту основные результаты снабжены достаточно полными и строгими доказательствами, все используемые в тексте результаты других авторов снабжены ссылками на цитируемые источники. Текст диссертации написан ясным математическим языком и имеет аккуратное оформление. Отмечу, что исследования автора поддержаны грантами РФФИ в 2016 – 2018 годах и грантом Президента РФ в 2015-2016 годах.

Оформление, однако, не лишено недостатков.

1. Автореферат и диссертация не свободны от опечаток. Например, автотеорема 2.3.1 в диссертации. В фамилии Тухтавуллиной (стр. 8 автореферата), ссылки на работы Blacburn,a и Burnside (стр 139), Brauer'a, Huppert'a Ph. Hall'a, M.Suzuki (стр.140) диссертации

2.В Предложении 1.4.23 пропущено соотношение $v^2 = 1$.

3. Было бы полезно зафиксировать источник обозначений для конечных групп, используемых в тексте.

Указанные недостатки вовсе не снижают общего впечатления от диссертации, являющейся существенным вкладом в развитие теории бесконечных групп.

Результаты диссертации являются новыми, полностью доказаны и своевременно опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК.

Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание. Результаты докладывались автором на многих международных конференциях и научных семинарах в Москве, Новосибирске, Екатеринбурге, Казани, Красноярске, Перми.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Сибирском федеральном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, в Москве в Математическом институте им. В. А. Стеклова, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова, в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН и др. учреждениях, а также в специальных курсах для студентов-математиков.

Считаю, что диссертация А.А.Шлепкина «Группы, насыщенные конечными группами специального вида» содержит решения задач, имеющих важное значение для теории групп и удовлетворяет требованиям п. 9-14 «Положения о присуждении ученых степеней». Автор диссертации Алексей Анатольевич Шлепкин, без сомнений, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
Д-р физ.- мат. наук, профессор
профессор, заведующий кафедрой алгебры
и математической логики Ярославского государственного
университета им. П.Г. Демидова

Лев Сергеевич Казарин

Подпись Казарина Л.С. удостоверяю
Директор центра кадровой политики

Куфирина Л.Н.

5 апреля 2019 г.

ул. Советская, 14, Ярославский государственный университет, 150003,
ЯрГУ им. П.Г.Демидова

Тел.: +7 (4852) 797702, e-mail: rectorat@uniyar.ac.ru