ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации Алены Олеговны Лихачевой
«КОВРЫ И КОВРОВЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПОВ B_l, C_l, F_4»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная
математика (физико-математические науки)

Настоящая диссертация посвящена изучению подгрупп групп Шевалле, определяемых системой корней и наборами аддитивных подгрупп. Наборы идеалов или аддитивных подгрупп ассоциативного кольца K, удовлетворяющие определенным условиям, называются коврами или сетями, а связанные с ними кольца и группы – ковровыми или сетевыми. Ранее ковровые подгруппы применялись при решении следующих задач: описание центральных и коммутаторных рядов, силовских p-подгрупп некоторых матричных групп (Ю. И. Мерзляков, 1964 г.); групп, лежащих между матричными группами над кольцом и его подкольцом (Н. С. Романовский 1970 г.); параболических подгрупп и надгрупп диагональных подгрупп в общей и специальной линейных группах (З. И. Боревич, 1976 г.).

Понятия ковра и ковровой подгруппы были перенесены на группы Шевалле нормальных и скрученных типов различными способами (К. Сузуки, Н. А. Вавилов, В. М. Левчук). Ковровые подгруппы можно рассматривать как обобщение исходных групп Шевалле и изучать их структуру. Элементарная группа Шевалле типа A_{n-1} над коммутативным кольцом K изоморфна подгруппе специальной линейной группы $SL_n(K)$, порожденной всеми трансвекциями $t_{ij}(u)$, $u \in K$.

Целью диссертационной работы является описание неприводимых ковров аддитивных подгрупп лиева типа B_l, C_l, F_4 над полями. В частности, доказать существование незамкнутых неприводимых ковров лиева типа над коммутативными кольцами, ассоциированных с любой системой корней; описать неприводимые ковры аддитивных подгрупп над локально конечными полями ранга больше единицы.

Перейдем к детальному описанию результатов диссертации.

Глава 1 содержит основные определения, используемые в диссертации. Также в ней строятся примеры незамкнутых ковров над различными классами коммутативных колец. Основным результатом является теорема 1.4.1, утверждающая, что если K – коммутативное кольцо с единицей 1, $\mathbb{Z}$ – его аддитивная подгруппа, порожденная 1, и в K существует ненулевой идеал I такой, что $\mathbb{Z} + I \neq K$, то для любой системы корней Φ существует неприводимый незамкнутый ковер типа Φ над K. Напомним, что ковер называется замкнутым, если его ковровая подгруппа не содержит новых корневых элементов, и он неприводим, если все его аддитивные подгруппы ненулевые.

В **главе 2** рассматриваются ковры лиева типа над локально конечными полями. Основным результатом является теорема 2.3.1: Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi \}$ – неприводимый ковер типа Φ ранга $l \geq 2$ над локально конечным полем K. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле, все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, совпадают с некоторым подполем P поля K, в частности, ковер $\mathfrak{A}$ замкнут.

Глава 3 посвящена описанию ковров типа B_l, C_l, F_4 над полями характеристики 0 и 2. Основным результатом является доказательство того, что такие ковры являются замкнутыми и могут параметризоваться парой аддитивных подгрупп только при $p = 2$, причем для типов B_l и C_l одна из этих двух аддитивных подгрупп может не быть полем.

Все основные результаты диссертации являются новыми. Они опубликованы в 14 работах. Часть результатов получена автором самостоятельно, а часть – в неразделимом соавторстве. Диссертация изложена на 71 странице. Она состоит из введения, трех глав, заключения, глоссария и списка литературы из 42 наименований.

Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на Красноярском алгебраическом семинаре (Сибирский федеральный университет, 2016–2023 гг.) и следующих конференциях.

1. Международная конференция «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2016 г.).

2. XI школа-конференция по теории групп, посвященная 70-летию со дня рождения А. Ю. Ольшанского (Красноярск, 2016 г.).

3. Российская научная конференция «Алгебра, анализ и смежные вопросы математического моделирования» (Владикавказ, 2017 г.).

4. Международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 2018 г.).

5. Международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 110-летию со дня рождения С. Н. Черникова (Нальчик, 2022 г.).

6. XIV Международная школа-конференция по теории групп, посвященная памяти В. А. Белоногова, В. А. Ведерникова и Л. А. Шеметкова (Брянск, 2022 г.).

В целом, диссертация написана хорошо, автореферат полностью отражает содержание диссертации. Тем не менее, сделаю ряд замечаний.

– В теоремах 2.3.1 и 2.4.1 используется выражение: «все аддитивные подгруппы совпадают с некоторым подполем». Понятно, что группа не может совпадать с полем. По-видимому, имеется в виду совпадение множеств.

– не понимаю первую вынесенную формулу на с. 18. По формуле (1.1.1) $t_{ij}(x_i x_j^{-1} u) = dt_{ij}(u)d^{-1}$.

– с. 29: не понял предложения: «В группе M то вытекает из следующих равенств:»;

– с. 31: на мой взгляд обозначение $\mathbb{Z}$ для аддитивной подгруппы кольца, порожденного 1 является неудачным так как если характерика кольца равна $p > 0$, то имеем равенство $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$. Кроме того, в словаре терминов на с. 61 сказано, что $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел;

– с. 32: в последней строке автор определяет $\mathfrak{A}_p = \mathbb{Z} + I$, но осталось непонятным, что такое I;

–с. 36, 4-я строка снизу: вместо α, по-видимому, должно стоять t;

– с. 61: общая линейная группа $GL_n(K)$ над кольцом K определяется как множество матриц с определителем, не равным нулю. Для кольца это, вообще говоря, неверно. Примером является $GL_n(\mathbb{Z})$. Лучше говорить про множество обратимых матриц.

Отмеченные замечания не носят принципиального характера и легко устранимы.

Считаю, что диссертация А. О. Лихачевой «Ковры и ковровые подгруппы групп Шевалле типов B_l, C_l, F_4» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, сформулированным в пп. 9-11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней (постановление №842 от 24 сентября 2013 года), а ее автор Алена Олеговна Лихачева заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5 — математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки).

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
Валерий Георгиевич Бардаков
660090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
телефон: +7 383-3297646
e-mail: bardakov@math.nsc.ru
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
главный научный сотрудник
лаборатории обратных задач математической физики В. Г. Бардаков
18 августа 2023 г.

Подпись В. Г. Бардакова заверяю:
Ученый секретарь ИМ СО РАН
кандидат физико-математических наук Н. А. Даурцева
21 августа 2023 г.