ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию
Шлёпкина Алексея Анатольевича
“Группы, насыщенные конечными группами специального вида”,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Актуальность темы диссертации

В теории групп хорошо известно и весьма тщательно изучено во многих случаях направление о влиянии строения подгрупп на строение самой группы. Особенно исследованы те случаи, в которых множество подгрупп достаточно велико. Видимо, самым ярким проявлением этого влияния являются знаменитые локальные теоремы, доказательство которых связано с именами Куроша, Черникова и Мальцева. Однако замечательные результаты Новикова и Адяна показывают насколько трудно бывает уловить это влияние. С другой стороны стоит отметить важный результат Боровика, Беляева и др.

Теорема. *Если локально конечная группа G локально покрывается множеством конечных простых неабелевых групп лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, то и сама группа G является группой лиева типа над походящим локально конечным полем.*

Однако, вполне очевидно, что существование локального покрытия не всегда может наблюдаться в периодических группах.

А.К. Шлёпкиным было введено понятие насыщенности группы группами из заданного множества групп. Это понятие оказалось очень полезным и плодотворным, что вызвало довольно обширный поток исследований по данной тематике в Красноярске, захвативший и другие города. Диссертация Шлёпкина Алексея Анатольевича относится к этому активно разрабатываемому научному направлению в теории бесконечных групп. Толчком к исследованиям диссертанта (как и впрочем многим другим) послужила следующая проблема.

> **Вопрос 14.101 из Коуровской тетради.** *Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама будет простой группой лиева типа над под подходящим локально конечным полем?*

При решении данной проблемы возникла необходимость исследования групп насыщенных не обязательно конечными простыми неабелевыми группами лиева типа, а различными конечными группами (группами специального вида). Группы, насыщенные различными множествами конечных групп, изучали Б. Амберг, Л.С. Казарин, Д.В. Лыткина, В.Д. Мазуров, А.И. Созутов, К.А. Филиппов, А.К. Шлёпкин и другие. Также были поставлены следующие проблемы.

Вопрос 18.113 из Коуровской тетради. *Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечным множеством конечных простых неабелевых групп сама будет конечной простой неабелевой группой?*

Вопрос Л.С. Казарина и Б. Амберга *Будет ли локально конечной группа насыщенная прямыми произведениями групп диэдра при условии ограниченности периода группы и ограниченности числа множителей прямого произведения. Если число множителей равно* 1, *то это так.*

В данном направлении начали возникать задачи, связанные с видоизменением условия насыщенности, в частности, С. Вей, В. Го, Д.В. Лыткина, В.Д. Мазуров рассматривали группу G, содержащую инволюцию и обладающую тем свойство, что любая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в подгруппе группы G изоморфной некоторой группе из насыщающего множества (т.е. требовалось, в отличии от условия насыщенности, вложимость не произвольных конечных подгрупп группы G, а конечных подгрупп чётного порядка).

Общая характеристика работы

Диссертация занимает 142 страниц текста и состоит из введения, семи глав и списка литературы содержащего 110 наименований, в том числе, 19 наименований работ автора, опубликованные в изданиях из списка ВАК (15 работ без соавторов).

Диссертация А.А. Шлёпкина посвящена исследованию бесконечных групп (периодических групп и групп Шункова) обладающих насыщающим множеством, состоящим из конечных групп специального вида (сплетённые группы, конечные простые неабелевы группы, различные расширения конечных простых неабелевых групп, группы диэдра). В рамках данной тематики сформулированы и поставлены важные проблемы, получены интересные результаты, а само направление интенсивно разрабатывается в настоящее время, что говорит об его актуальности.

Изложим кратко содержание диссертационной работы. Полученные результаты далее будут изложены подробно. Введение содержит историю вопроса с обзором результатов предшественников, мотивировку исследования, основные результаты диссертации, информацию по апробации диссертации, описание основных этапов исследования. Глава 1 является вводной. В ней приведены определения и обозначения используемых математических понятий и содержатся формулировки известных результатов. Отметим, что на с. 5 приводится небольшое, но важное уточнение понятие насыщенности. Представляется, что весьма возможно, что это уточнение будет очень полезным. В частности, оно снимает некоторые вопросы, которые возникали (лично у оппонента) на докладах по данной тематике. Во второй главе изучаются группы, насыщенные сплетёнными группами, и их приложения. В третьей главе рассматриваются локально конечные группы, периодические группы и группы Шункова, насыщенные группами $GL_2(q)$, $PGL_2(q)$. В четвёртой главе изучаются периодические группы и группы Шункова, насыщенные линейными и унитарными группами степени 3 над конечными полями. В пятой и шестой главах рассмотрены периодические группы и группы Шункова, насыщенные различными группами лиева типа ранга 1. В главе 7 изучаются периодические группы и группы Шункова 2-ранга 2, насыщенные конечными простыми неабелевыми группами.

Основные и значимые результаты

Перечислим основные и значимые результаты в порядке их появления, а не в порядке их важности.

Глава 2. Доказано, что

— бесконечная 2-группа, насыщенная сплетёнными группами, изоморфна сплетению бесконечной локально циклической 2-группы и группы порядка 2 (теорема 2.1.1).

Построен пример 2.1.11, показывающий, что это утверждение неверно для произвольных периодических групп. Тем не менее, такое обобщение справедливо для локально конечных групп и групп Шункова (теоремы 2.1.12 и 2.1.13). Представляется, что теорему 2.1.1 ждёт неплохое будущее, поскольку сплетённые группы возникают весьма часто как подгруппы линейных групп.

Теорема 2.2.1 является обобщением замечательного результата В.П. Шункова о периодических группах с почти регулярной инволюцией на группы, содержащие элементы бесконечного порядка.

Глава 3. Пусть $\mathfrak{J} = \{GL_2(q)\}$, где $q = p^n$. Отметим, что ни характеристика поля p, ни натуральное n не фиксируются. Тогда доказано, что

— локально конечная группа, насыщенная группами из множества $\mathfrak{J}$, изоморфна $GL_2(P)$ для некоторого локально конечного поля P (теорема 3.1.1).

Пусть $q = p^n$, $\mathfrak{S}$=$\{GL_2(p^n)\}$ и $\mathfrak{M} = \{PGL_2(p^n)\}$, где p — простое фиксированное число, а натуральное n не фиксируется. Доказано, что *периодическая группа Шункова, насыщенная группами*

— из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики p (теорема 3.2.7);

— из множества $\mathfrak{S}$, изоморфна $GL_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики p (теорема 3.2.13).

Также доказано, что

— периодическая группа, насыщенная группами из множества $\{PGL_2(q) \mid q$ — степень простого числа$\}$, изоморфна $PGL_2(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле (теорема 3.3.1);

— периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\{GL_2(p^n)\}$ (здесь p и n не фиксируются), изоморфна $GL_2(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q (теорема 3.4.1).

Теоремы 3.3.1 и 3.4.1 — основные результаты диссертации.

Глава 4. Пусть $\mathfrak{M} = \{U_3(p^n)\}$, где p — простое нефиксированное число, n — натуральное нефиксированное число. Доказано, что

— периодическая группа Шункова, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, имеет периодическую часть, изоморфную группе $U_3(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q (теорема 4.1.7).

Далее доказано, что

— группа Шункова, насыщенная группами из множества $\{U_3(q), L_3(q) \mid q$ — степень простого нечётного числа$\}$, обладает периодической частью, которая изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q (теорема 4.2.1 — основной результат диссертации);

— периодическая группа, насыщенная группами из множества $\{U_3(q), L_3(q) \mid q$ — степень простого числа, $q \geqslant 3\}$, изоморфна $U_3(Q)$ или $L_3(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q (теорема 4.3.1 — основной результат диссертации, получен совместно с Д.В. Лыткиной).

Глава 5. Доказано, что

— группа Шункова, насыщенная конечными простыми неабелевыми группами, и со свойством, что в любой её конечной 2-подгруппе все инволюции из лежат в центре этой подгруппы, обладает периодической частью, которая изоморфна одной из групп J_1, $L_2(Q)$, $Re(Q)$, $U_3(Q)$, $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q (теорема 5.1.1);

— группа Шункова насыщенная группами из множества конечных простых групп лиева типа ранга 1, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем Q (теорема 5.2.1 — основной результат диссертации, получен автором лично).

Глава 6. Доказано, что

— периодическая группа, насыщенная группами из множества конечных простых групп $\{L_2(r), U_3(q) \mid r, q$ нечётные, $r > 3\}$, изоморфна $L_2(R)$ или $U_3(Q)$, где R и Q — локально конечные поля нечётной характеристики (теорема 6.1.1. — также основной результат диссертации, получен совместно с Д.В. Лыткиной);

— периодическая группа G насыщена конечными простыми группами лиева типа ранга 1 изоморфна группе лиева типа ранга 1 над подходящим локально конечным полем (теорема 6.2.1 — основной результат диссертации, получен автором лично).

Отметим, что теорема 6.2.1 даёт положительный ответ на вопрос 14. 101 из Коуровской тетради для периодических групп, насыщенных конечными простыми группами лиева типа ранга 1. Можно, без преувеличения, считать, что данная теорема является ***самым значительным*** результатом диссертации.

Глава 7. Пусть $\mathfrak{G}$ — множество всех групп 2-ранга 2, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Доказано, что

— каждая периодическая группа из $\mathfrak{G}$ изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, A_7, $L_3(P)$, $U_3(R)$, M_{11}, или $U_3(4)$, где Q, P и R — всевозможные локально конечные поля нечётных характеристик, причём $|Q| > 3$ (теорема 7.1.1, совместно с А.И. Созутовым и Д.В. Лыткиной);

— каждая группа Шункова из $\mathfrak{G}$ обладает периодической частью $T(G)$, которая изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, A_7, $L_3(P)$, $U_3(R)$, M_{11}, или $U_3(4)$, где Q, P и R — всевозможные локально конечные поля нечётных характеристик, причём $|Q| > 3$ (теорема 7.2.1).

Замечания

Приводимые замечания, в основном, носят характер пожеланий, улучшающих изложение некоторых фактов. Остальные замечания вызваны небольшими неточностями и описками.

1. На с. 4 в начале третьего и начале второго снизу абзацев неточность. Первые слова этих абзацев надо заменить на "Первая" и "Вторая", соответственно.

2. На с. 5 в четвёртом абзаце написано "впоследствии оказалось". Это не совсем корректно понятия покрытия и локальной системы существовали задолго до понятия насыщенности.

3. На с. 5 обсуждения групп Новикова и Адяна, Ольшанского изложено не совсем удачно, поскольку допускается разрыв в описании множеств, что не хорошо.

4. На с. 7 не указано, что теорема 2.2.1 является обобщением замечательного результата В.П. Шункова, хотя об этом говорится в отзыве научного консультанта.

5. В доказательстве леммы 2.4.3 написано $\mathfrak{A}(1) = \varnothing\ G$ и $\mathfrak{B}(1) = \varnothing,\ G$. Это крайне неудачно, надо было перед G вставить слово "группа".

6. В формулировке леммы 3.3.2 написано *"... S — локально конечный диэдр... "*. Это неудачное выражение. Диэдр — это геометрическое понятие.

7. В формулировке теоремы 6.1.1 пропущена буква Q. Должно быть *"... где R и Q — локально конечные поля нечётной характеристики."*. Можно сравнить с формулировкой леммы 6.1.8.

8. В формулировке леммы 7.1.10 написано *“... бесконечная абелева группа ранга 2.”*. Тут необходимо уточнить, как понимается слово *“ранг”*, поскольку известно несколько понятий в абелевых группах со словом ранг.

Наконец, два общих замечания

9. В целом оформление диссертации довольно аккуратное и хорошо продуманное. Однако, довольно много TEXнических описок. Так, например, часто стоит чёрточка “–” вместо тире“—”, употребляется " вместо более подходящего сочетания “ ‘’, не используется команда `\pmod` и др.

10. С сожалением приходится констатировать, что недостаточно хорошо была проведена работа над литературой. Так вместо ссылки на тезисы [37] нужно было указать статью: А. В. Рожков, “Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев”, Алгебра и логика, 37:5 (1998), 568–605.

Заключение

Основные результаты, доказанные в диссертации, являются новыми, своевременно опубликованы в 19 изданиях из перечня ВАК, которые также входят в международные базы данных и системы цитирования. Отмечу, что основная часть (15 из 19) данных работ написана без соавторов. Диссертация прошла апробацию на ведущих алгебраических семинарах: кафедра высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова, “Теория групп”, “Алгебра и логика” Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, семинар отдела алгебры и топологии Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН), на 20 международных и всероссийских конференциях. По результатам диссертации были сделаны пленарные доклады на следующих конференциях: “Мальцевские чтения” (Новосибирск, 21–24.11.2016); “Теория групп и её приложения” (Пермь, 04–07.10.2017); “Теория групп и её приложения”, конференция, посвящённая 65-летию со дня рождения профессора А.А.Махнева (Геленджик, 13–20.05.2018); Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша (Москва, май 2018).

Диссертационная работа носит теоретический характер. Научная значимость полученных в ней результатов следует из того факта, что в ней содержится решение ряда трудных проблем не поддававшихся решению на протяжении длительного времени. Полученные результаты и разработанные методы их доказательства найдут применение в исследованиях проводимых в Московском, Новосибирском, Уральском, Сибирском федеральном, Ярославском и других университетах и научных учреждениях Российской академии наук.

Автореферат достаточно полно и правильно отражает содержание диссертационной работы.

Ввиду сказанного выше, считаю, что диссертация Шлёпкина Алексея Анатольевича *"Группы, насыщенные конечными группами специального вида"* полностью соответствует п. 9-14 «Положения о присуждении учёных степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук, а её автор, Шлёпкин Алексей Анатольевич, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06. — математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент
Доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры системного программирования
ФГАОУ ВО "Южно–Уральский государственный университет (НИУ)"

Алеев Рифхат Жалялович

Подпись Р.Ж. Алеева заверяю

25.04.2019 г.

Контактная информация:
Адрес для переписки — г.Челябинск, 454080, пр. Ленина, 76, ЮУрГУ, Высшая школа электроники и компьютерных наук, Кафедра системного программирования

Телефон — 8(351)2679089

Адрес электронной почты — `aleevrz@susu.ru`

Верно
Ведущий документовед
О.В. Гришина