

## ОТЗЫВ

научного руководителя о кандидатской диссертации  
Пейчевой Анастасии Сергеевны «О спектральных свойствах операторов,  
ассоциированных с некоэрцитивными смешанными задачами для  
эллиптических систем», представленной к защите по специальности 01.01.01  
– вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научно-исследовательская работа А.С. Пейчевой проводилась на кафедре теории функций Сибирского федерального университета под моим научным руководством — сначала в бакалавриате (2012 г), затем в магистратуре (2013-2014 г.) и в аспирантуре (2015-2018 гг.). За это время она показала себя как настойчивый и достаточно самостоятельный исследователь.

В общей сложности по теме диссертации А.С. Пейчевой опубликовано 4 работы из списка изданий, рекомендованных ВАК для публикации результатов диссертации. Одна из них в нераздельном соавторстве со мной, а еще одна — со мной и А. Лаптевым; вклады соавторов в совместные работы равнозначны. Результаты также были рассказаны авторам на нескольких международных конференциях и научных семинарах.

Что касается содержания диссертации, то теория смешанных краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка активно развивалась в течение всего последнего столетия. Различные варианты таких задач рассматривались многими математиками с начала XX века. Так, еще в 1910 году С. Заремба в своей работе описал условия разрешимости смешанной задачи для оператора Лапласа в области с гладкой границей и непрерывными начальными данными Неймана и Дирихле на разных кусках границы.

Бурное развитие теории эллиптических задач пришлось на начало второй половины XX века, чему способствовали работы таких математиков как С. Агмон, А. Дуглис и Л. Ниренберг, Ж.-Л. Лионс и Э. Мадженис, Ф. Браудер, С. Кампанато и многие другие.

Одним из результатов явилось то, что, как оказалось, в случае, когда граница области является гладкой и выполнено условие коэрцитивности, то

фредгольмовость задачи эквивалентна так называемому условию Шапиро - Лопатинского. Однако, в случае негладкой границы необходимо более детальное исследование проблемы.

Стоит отметить, что при решении смешанных задач чаще всего пользуются либо методом потенциалов, либо методом эрмитовых форм и слабых решений.

Идя вторым путем, на соответствующую эрмитову форму часто накладывают условие коэрцитивности, которое автоматически позволяет получить достаточно гладкое решение задачи вплоть до границы области, где ищется решение, если данные задачи также являются достаточно гладкими. Однако, Ж. Кон в своей работе при изучении  $\overline{\partial}$ -задачи Неймана столкнулся с феноменом так называемой субэллиптичности. Именно, в этой задаче, при выполнении условия сильной эллиптичности, происходит потеря гладкости решения вблизи границы. Тем не менее, Ж. Кону удалось доказать фредгольмовость задачи на шкале пространств соболевского типа в псевдо-выпуклых областях с гладкой границей.

В настоящей работе рассматриваются операторные уравнения, порожденные некоэрцитивными эрмитовыми формами, соответствующими некоэрцитивным смешанным краевым задачам с граничными условиями робеновского типа для сильно эллиптических дифференциальных операторов в произвольных областях с липшицевой границей. При этом вместо условий на геометрические свойства области мы накладываем некоторые ограничения на граничные операторы, более слабые, чем условия Шапиро-Лопатинского. Таким образом, ослабляя условия на граничные дифференциальные операторы, мы, тем не менее, доказываем фредгольмовость соответствующих операторных уравнений в специальных пространствах соболевского типа (с некоторой потерей гладкости, по сравнению с классическими результатами теории смешанных краевых задач), и при этом не накладывая ограничений на геометрические свойства области.

Наряду с теорией разрешимости операторных уравнений, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами, мы также изучаем их спектральные свойства и доказываем полноту корневых векторов соответствующих операторов в рассматриваемых пространствах. Рассмотрены и примеры применения построенной теории к некоторым прикладным задачам.

В первой главе, для одного достаточно широкого класса эрмитовых форм доказывается теорема вложения ассоциированного с ним пространства соболевского типа, в шкалу пространств Сobleва-Слободецкого. Затем рассматривается, вообще говоря, субэллиптическая (некоэрцитивная) смешанная задача для матричного сильно эллиптического дифференциального оператора второго порядка, доказывается ее фредгольмовость и также изучены спектральные свойства рассматриваемых операторов в пространствах соболевского типа и указаны условия полноты их корневых векторов. Для коэрцитивных смешанных задач такие результаты хорошо известны (см. работы С. Агмона, Ф. Браудера, М.И. Вишика, М.В. Келдыша, М.С. Аграновича и др.). Наконец, в конце главы теоремы о смешанных задачах применяются к регуляризации некорректной задачи Коши для эллиптических систем уравнений.

Глава 2 посвящена трем примерам применения теории, развитой в главе 1, к эллиптическим операторам типа Ламе с различными граничными операторами. Результаты главы 1 перенесены также на весовые пространства Сobleва-Слободецкого. В стандартных пространствах Сobleва такую коэрцитивную смешанную задачу для системы Ламе решил Г. Фикера, а некоэрцитивную рассматривал С. Кампанато, но не смог ее решить в виду отсутствия коэрцитивной оценки.

В третьей главе рассмотрен пример краевой задачи с граничными условиями типа Зарембы для оператора Лапласа в единичном круге на комплексной плоскости. В ней указан один способ нахождения собственных значений с помощью функций Бесселя.

Считаю, что диссертация А.Н. Пейчевой «О спектральных свойствах операторов, ассоциированных с некоэрцитивными смешанными задачами для эллиптических систем» соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, удовлетворяет всем требованиям, предъявленным ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор, Пейчева Анастасия Сергеевна, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель:  
доктор физ.-мат. наук, профессор,  
профессор кафедры теории функций  
ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный  
университет»

Александр Анатольевич  
Шлапунов

Почтовый адрес: пр. Свободный, 79,

Красноярск, 660041

Телефон: 89029222639 E-mail: ashlapunov@sfu-kras.ru

