Федеральное государственное бюджетное
учреждение науки
**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения
Российской академии наук**
(ИМ СО РАН)
630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
Для телеграмм: Новосибирск, 90, Математика
Тел.: (8-383) 333-28-92. Факс: (8-383) 333-25-98
E-mail: im@math.nsc.ru

15.03.2018 № 314-2-35

На № ______________ от __________

"УТВЕРЖДАЮ"

____

15 марта 2018 года

Заместитель директора
по научной работе ИМ СО РАН,
доктор физико-математических наук
Вдовин Евгений Петрович

Отзыв ведущей организации
о диссертации Полковникова Александра Николаевича
«О спектральных свойствах операторов, порожденных
некоэрцитивными эрмитовыми формами»,
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертации Полковникова Александра Николаевича «О спектральных свойствах операторов, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами» изучаются свойства решений некоэрцитивных смешанных краевых задач для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка с комплексными коэффициентами. Автор рассматривает такие краевые задачи для областей с липшицевой границей. В диссертации вводятся и изучаются подходящие функциональные пространства соболевского типа, в которых для таких общих задач удается доказать существование решений и их фредгольмовость. Используя эти пространства, автор также исследует задачи с параметром, изучает спектральные свойства операторов, соответствующих рассматриваемым краевым задачам, применяет полученные им результаты для исследования разрешимости некорректной задачи Коши для системы Коши — Римана и для построения формулы Карлемана для ее решений.

Актуальность изучения свойств решений дифференциальных операторов, порожденных эрмитовыми формами, обусловлена многочисленными приложениями соответствующих результатов теории уравнений в частных производных как к различным математическим задачам, так и к различным задачам естествознания, в том числе, описывающих важные прикладные модели. Бурное развитие направление теории эллиптических задач пришлось на начало второй половины XX века, чему способствовали работы С. Агмона, А. Дуглиса, Л. Ниренберга, Ж. Л. Лионса, Э. Маджениса, Ф. Браудера, С. Кампанато, С. Л. Соболева, Л. Н. Слободецкого, О. А. Ладыженской, Н. Н. Уральцевой и многих других. Один из важнейших результатов общей теории краевых задач для линейных эллиптических систем состоял в том, что если рассматриваемая область имеет гладкую границу, то фредгольмовость рассматриваемой краевой задачи эквивалентна условию Шапиро — Лопатинского. В частности, это так, если комплекснозначная матрица $a_{ij}(x)$ из рассматриваемого уравнения $-\sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u(x)) + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u(x) + a_0(x)u(x) = f(x)$ удовлетворяет условию сильной коэрцитивности, т. е. $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\overline{w}_i w_j \geq m|w|^2$ для $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$

и некоторого $m > 0$, а граничный оператор есть конормальная производная, ассоциированная с этим уравнением. Методом эрмитовых форм и слабых решений этот результат был расширен для некоэрцитивных задач на случай областей с липшицевой границей. Более точно, в диссертационной работе ослабляется условие коэрцитивности (неравенство сильной коэрцитивности заменяется на пару более слабых неравенств) и, в частности, расширяется класс допустимых граничных условий (в случае областей с гладкой границей, этот класс содержит операторы, не удовлетворяющие условиям Шапиро —Лопатинского). Во-первых, рассматриваемая квадратичная форма должна быть неотрицательно определена, т. е. $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\overline{w}_i w_j \geq 0$, $w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, и, во-вторых, должно выполняться неравенство $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq m_0|\xi|^2$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ — вектор с действительными компонентами и $m_0 > 0$ — некоторая константа, что эквивалентно сильной эллиптичности соответствующего оператора.

Дж. Кон в 1979 году в своей работе на примере $\overline{\partial}$-задачи Неймана показал, что может происходить потеря гладкости решения краевой задачи для рассматриваемого в диссертации типа уравнений вблизи границы (субэллиптичность), но требуя дополнительные условия на геометрические свойства области (условие псевдовыпуклости), он установил фредгольмовость рассматриваемой задачи в шкале пространств соболевского типа. Диссертант получает подобные результаты без особых требований на геометрию области. Центральным результатом диссертационной работы является теорема вложения для пространств, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами, в шкалу пространств Соболева — Слободецкого. Это позволило ему доказать разрешимость и другие утверждения в классах Соболева — Слободецкого меньшей чем 1 «гладкости». Полученные в диссертации результаты недавно были обобщены в работах Н. Н. Тарханова, А. А. Шлапунова и А. С. Пейчевой в более широком контексте весовых пространств соболевского типа. Большинство результатов диссертации так или иначе опираются на полученную теорему вложения. Отдельный интерес представляют результаты о фредгольмовых семействах операторных уравнений (теоремы 6 из второй главы), которые уже в коэрцитивном случае дают некоторое обобщение работы М. С. Аграновича и М. И. Вишика 1964 года об эллиптических с параметром задачах.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Во введении приводится обзор темы диссертации, рассказывается об истории рассматриваемых задач, приводится краткое описание основных результатов диссертации и ее структуры.

Первая глава «Предварительные сведения» состоит из двух параграфов. В параграфе 1.1 приводятся основные используемые обозначения и понятия. В параграфе 1.2 приводится обзор литературы и полученных ранее результатов по теме диссертации, а также формулируются основные определения.

В главе 2 «Об одном классе операторных уравнений, порождённых эрмитовыми формами» исследуется разрешимость в подходящих пространствах Соболева — Слободецкого смешанных задач для рассматриваемых в диссертации уравнений, а также доказывается фредгольмовость этих задач. Она состоит из трёх параграфов. В параграфе 2.1 доказывается основополагающий для тематики диссертации результат, который сформулирован как теорема вложения пространства соболевского типа, определенного через квадратичную форму, с помощью которой может быть записано тождество, которому удовлетворяют слабые решения рассматриваемой краевой задачи, в подходящее пространство Соболева — Слободецкого. Доказательство опирается на тонкие свойства оператора следа и оператора продолжения и некоторые другие идеи. В параграфе 2.2 доказывается разрешимость (в слабом смысле) в подходящем пространстве Соболева — Слободецкого (с потерей гладкости) рассматриваемой краевой задачи робеновского типа для рассматриваемых уравнений второго порядка с комплексными коэффициентами, а также доказывается фредгольмовость этой задачи. В параграфе 2.3 рассматривается семейство некоэрцитивных краевых задач с параметром. Формулируются условия при которых такие задачи разрешимы для достаточно больших параметров, лежащих на подходящих лучах.

Глава 3 «Спектральные свойства операторов, порождённых эрмитовыми формами» посвящена спектральным свойствам изучаемых операторов. В параграфе 3.1 доказывается полнота корневых функций слабых возмущений компактного самосопряженного оператора, соответствующего рассматриваемой краевой задаче. В параграфе 3.2 изучаются спектральные свойства эллиптических операторов с параметром. Доказывается полнота корневых функций элиптических операторов с параметром и изучается распределение характеристических значений. При этом используются условия, которые формулируются в терминах классов Шаттена.

В главе 4 «Применение и примеры» приведены некоторые применения полученных ранее в диссертации результатов, имеющие связи с важными приложениями. В параграфе 4.1 ранее полученные результаты применяются для исследования разрешимости некорректной задачи Коши для оператора Коши — Римана и для построения формулы Карлемана для ее решений. В параграфе 4.2 приводятся несколько других применений для рассматриваемых в шаре краевых задач для важных операторов, являющихся частным случаем исследуемых в диссертации общих операторов.

Изложение материала в диссертации соответствует требованиям, предъявляемым к математическим текстам: все выносимые на защиту основные результаты снабжены достаточно полными и строгими доказательствами, все используемые в тексте результаты других авторов снабжены ссылками на цитируемые источники. Текст диссертации написан достаточно четким математическим языком и имеет оккуратное оформление.

Дадим следующие замечания к работе:

1. Текст диссертации и автореферата содержит достаточно большое количество (правда, легко исправимых) опечаток: у некоторых авторов неправильно написаны инициалы, в некоторых математических формулах у функций, операторов, констант лишнии индексы, перепутаны пространство, откуда оператор действует, с пространством, куда он действует, несогласованы падежи в некоторых предложениях, много лишних запятых, а в других местах наоборот запятые, точки или тире пропущены.

2. В лемме 1 вместо $H^1(D)$ должно быть $H^1(D, S)$.

3. В теореме 4 вместо выражения «принадлежит C^∞ в окрестности X» лучше писать «является C^∞-гладкой в окрестности X».

4. На странице 33 вместо $H^{-1}(X, \partial X)$ должно быть $H^1(X, \partial X)$.

5. На странице 34 не указано на каком пространстве выполнено равенство $\mathcal{P} \circ t_1 + \mathcal{G} A_0 = I - \Pi$.

6. В формулах (2.28) вместо $\widetilde{H}^{s-1}(X)$ должно быть $H^{s-1}(X)$.

7. На странице 38 вместо $\mathcal{P} : H^r(\partial X) \to H^{r+1/2}(\partial X)$ необходимо писать $\mathcal{P} : H^r(\partial X) \to H^{r+1/2}(X)$.

8. На странице 43 вместо $v \in H^s(D)$ должно быть $v \in H^s(X)$.

9. На странице 53 должно быть $\|L_0^{-1}\| = 1$.

10. Работы [44, 51, 54, 65, 66, 68] являются переводами, и лучше было бы указывать оригиналы этих работ, а для иностранных монографий [40, 48] наоборот — хорошо известные их переводы на русском языке.

Указанные неточности имеют чисто технический характер, не влияют на правильность полученных в диссертации результатов и не умаляют достижения соискателя.

Результаты являются новыми, полностью доказаны и своевременно опубликованы в рецензируемых изданиях, рекомендованных ВАК. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание. Результаты диссертации докладывались автором на международных конференциях и научных семинарах. Диссертация носит теоретический характер.

Ее результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в Математическом институте им. В. А. Стеклова, в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова, в Институте математики им. С. Л. Соболева СО РАН и др. учреждениях, а также в специальных курсах для студентов-математиков.

В заключение отметим, что диссертация А. Н. Полковникова «О спектральных свойствах операторов, порожденных некоэрцитивными эрмитовыми формами» содержит решения задач, имеющих важное значение в теории функциональных пространств и их приложения при изучение операторов, соответствующих смешанным краевым задачам для эллиптических уравнений в частных производных, и удовлетворяет требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней». Автор диссертации Александр Николаевич Полковников без сомнений заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден на заседании лаборатории геометрической теории управления Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН 14 марта 2018 г., протокол № 1.

Доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, профессор Сергей Константинович Водопьянов,
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4,
e-mail: vodopis@math.nsc.ru, тел. 8(383)3297615,
ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
заведующий лабораторией
геометрической теории управления С. К. Водопьянов

Кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, Александр Анатольевич Егоров,
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4,
e-mail: yegorov@math.nsc.ru, тел. 8(383)3297494,
ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
старший научный сотрудник А. А. Егоров

Кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ, Николай Николаевич Романовский,
630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4,
e-mail: nnrom@math.nsc.ru, тел. 8(383)3297521,
ФГБУН Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
научный сотрудник Н. Н. Романовский

15 марта 2018 г.

Подпись С. К. Водопьянова, А. А. Егорова, Н. Н. Романовского
удостоверяю
Зав. оргтоделом Н.З. Киндалева
ИМ СО РАН
«15» 03 2018 г.