УТВЕРЖДАЮ

Ректор Ярославского государственного
университета имени П.Г. Демидова,
профессор

_____ А.И.Русаков

_____ марта 2019 г.

ОТЗЫВ
ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертации Нировой Марины Сефовны «Дистанционно регулярные графы, связанные с ними симметричные структуры и их группы автоморфизмов», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация М.С.Нировой посвящена разделу математики, имеющему многочисленные связи с геометрией, топологией, теорией графов и теорией конечных групп. В связи с завершением классификации конечных простых групп возникла задача единообразного представления конечных простых неабелевых групп с помощью групп автоморфизмов конечных геометрий. В качестве мостика, соединяющего указанные разделы математики, послужила знаменитая работа Д.Хигмана о транзитивных группах подстановок ранга 3 (1964 г.). Позднее была осознана связь групп автоморфизмов определенных классов геометрий с группами лиева типа (Билдинги Титса, 1974 г.).В конечном счете понятным стала необходимость исследования конечных геометрий, на которых соответствующая группа действует флаг-транзитивно, причем все такие геометрии допускают классификацию.

В случае, когда такой геометрией служит граф, обладающий важными свойствами симметричности, флагами оказываются пары (вершина, ребро) или (вершина, неинцидентное ей ребро). Таковыми, к примеру, являются дистанционно транзитивные графы диаметра 2. Их группы автоморфизмов действуют транзитивно и на множестве вершин, и на множестве ребер. Роль дистанционно транзитивных графов диаметра 2 (групп ранга 3)в классификации конечных простых групп велика. Около половины спорадических простых групп было реализовано в качестве групп автоморфизмов групп подстановок ранга 3 (см. лекции Ш.Прегер и Л.Сойфера, 1997г.).

Напомним, что граф Γ называется дистанционно транзитивным, если для любых вершин x, y, u, v графа, для которых расстояния $d(x, y)$ и $d(u, v)$ совпадают, существует такой автоморфизм $g \in Aut(\Gamma)$, что $(x, y)^g = (u, v)$. Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией* порядка (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точку, а каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой. При этом любые две прямые пересекаются не более, чем в одной точке и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L. Соответствующая геометрия обозначается через $pGQ_\alpha(s, t)$. При $\alpha = 1$ эта геометрия называется

обобщенным четырехугольником и обозначается $GQ(s,t)$. Точечным графом частичной геометрии является граф, у которого вершины – точки геометрии, а две вершины смежны, если они лежат на одной прямой (коллинеарны). Такой граф частичной геометрии сильно регулярен и имеет $v = (s+1)(1+st/\alpha)$ вершин, каждая из которых степени $k(s+1)$. При этом каждое ребро графа лежит ровно в $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$ треугольниках, а любые две вершины на расстоянии 2 имеют ровно $\mu = \alpha(t+1)$ общих соседей. Соответствующий граф называется псевдогеометрическим графом для $pGQ_\alpha(s,t)$.

Граф Шилла это дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением $\theta_1 = a$, где число a делит k и параметр $b = b(\Gamma) = k/a$.

Пусть Γ – граф диаметра d и e – натуральное число. Подмножество C вершин графа называется e-кодом, если расстояние между любыми двумя вершинами из C не меньше $2e+1$.

В теории дистанционно регулярных графов традиционным является направление, связанное с нахождением параметров алгебр Боуза-Меснера, соответствующих гипотетических графов, нахождение серий массивов пересечений указанных алгебр и построение графа или доказательство несуществования его. Т.е. для известного графа Гс симметрической структурой Σ прямой задачей является определение параметров Σ по массиву пересечений графа Г. Новым направлением в рассматриваемом круге вопросов является (термин Д.В.Падучих)является обратная задача: восстановление параметров графа Г по параметрам Σ.

Цель диссертационного исследования заключается в изучении определенных классов геометрий и сопутствующих им графов, их расширений и групп автоморфизмов. В частности, исследование дистанционно регулярных локально $GQ(4,t)$-графов, локально псевдоциклических графов, дистанционно регулярных графов с параметром $\lambda = 2$ и числом вершин не более 4096, реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин не более 100.

Выбранное направление исследований лежит в русле интенсивно развивающейся теории, одним из ведущих центров которой является Институт Математики и Механики УрО РАН. В связи с завершением классификации конечных простых групп интересы алгебраистов в настоящее время переключаются на приложения теории групп и исследования математических структур, обладающих высокой степенью симметрии. Класс графов в этом отношении занимает весьма важное место, поскольку является достаточно бедной структурой и потому,согласно Гегелю, обладает большими возможностями для различных приложений. Не случайно в орбиту интересов в этой области включаются элементы теории кодирования. Исследования в данном направлении являются, несомненно, актуальными.

Автором найден оригинальный подход к изучаемому комплексу вопросов и получены новые глубокие и трудные результаты, составляющие содержание развиваемой им теории.

Перейдем к анализу содержания диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав основного текста и списка литературы объемом из 93 наименований, в том числе, 17 статей и 12 тезисов докладов. Все статьи опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Из 17 статей 8 написаны без соавторов, а в остальных одним из соавторов был научный консультант работы А.А.Махнев. Для всех совместных работ автором аккуратно обозначен вклад каждого из соавторов.

Общий объем диссертации составляет 201 страницу. Отметим одну интересную особенность работы. В самом конце диссертации на стр.193 – 194 приведен список нерешенных вопросов для каждой из глав, которые, по мнению автора было бы полезно изучить для

дальнейшего развития затронутых в соответствующем разделе тем.

Во Введении изложены история вопроса, даны необходимые определения, обозначены наиболее значимые достижения, полученные в направлении, связанном с исследованиями диссертанта.

В главе 1 получено описание параметров $s-2$-однородных расширений частичных геометрий $pGQ_\alpha(s,t)$ и классифицированы дистанционно регулярные локально $GQ(4,t)$-графы. Изучены 4-изорегулярные графы, их сильно регулярные подграфы и автоморфизмы. Последний результат получен совместно с А.Х.Журтовым и А.А.Махневым, которым принадлежат постановка и идея доказательства, а само доказательство найдено М.С.Нировой.

По аналогии с теорией групп говорят, что для класса $\mathcal{F}$ граф Γ является локально $\mathcal{F}$-графом, если окрестность любой вершины графа принадлежит $\mathcal{F}$.

Ф.Бьюкенхаутом и К.Юбо найдены локально $GQ(s,t)$-графы при $s=2$. В случае $s=3$ описание локально $GQ(s,t)$-графов получено А.А.Махневым. М.С.Нировой в §1.2 завершена классификация дистанционно регулярных локально $GQ(4,t)$-графов.

В §1.3 найдены параметры 6 сильно регулярных графов, являющихся подграфами графа $Iso(r)$ и возможные порядки автоморфизмов g указанных графов при определенных ограничениях на подмножество $\Omega = Fix(g)$.

А.А.Махневым доказано, что псевдогеометрического графа для графа $pGQ_2(5,32)$ (это окрестность вершины в графе $Iso(3)$) не существует. Отсюда следует, что и графа $Iso(3)$ не существует. Однако сильно регулярный граф с параметрами второй окрестности вершины графа $Iso(3)$ мог бы и существовать. Эти параметры $(640,243,66,108)$. Ранее исследователями были найдены параметры окрестности некоторой вершины такого (предположительно, существующего) графа и параметры второй окрестности вершины графа. Затем были получены порядки автоморфизмов исследуемых подграфов и подграфы, состоящие из неподвижных точек этих автоморфизмов. При этом решалась совершенно новая задача восстановления автоморфизма графа по его действию на окрестности и антиокрестности неподвижной точки. Как следствие, в §1.4 было получено доказательство того факта, что граф с указанными параметрами не может быть реберно симметричным.

Глава 2 посвящена важному классу локально псевдоциклических групп дистанционно регулярных графов. Граф называется псевдоциклическим, если он регулярный степени 2. В главе 2 перечислены массивы пересечений локально псевдоциклических дистанционно регулярных графов с числом вершин не более 4096. Для примитивных графов с числом вершин не более 1000 найдены их автоморфизмы. Доказано, что новых реберно регулярных графов с числом вершин не более 100 не существует. Ранее В.П.Буриченко и А.А.Махневым найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с числом вершин не более 1000 и значением параметра $\mu > 1$. Задача нахождения массивов пересечений антиподальных графов диаметра 3 с $\lambda \leq 2$ и $\mu = 1$ рассмотрена в §2.1. Как результат, был получен список массивов пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ и не более, чем 4096 вершинами. В §2.2 завершается описание графов из заключения теоремы 2.1 (1). Ни один из этих графов не является реберно симметричным. В §2.4 решается проблема Лама: существуют ли новые реберно симметричные сильно регулярные графы с числом вершин не более 100? Из работы Бахбахани и Лама следует, что количество возможных таких графов не превосходит 11. Работа по решению проблемы Лама начата в совместной работе М.С.Нировой и А.А.Махнева в 2012 г. и завершена в работе М.С.Нировой в 2018 г.

Глава 3 посвящена важному классу AT4(p,q,r)-графов. Если Γ – дистанционно регу-

лярный граф диаметра $d \geq 3$, а $\theta_0 > \theta_1 \cdots > \theta_d$ – его собственные значения, то имеется фундаментальная граница для параметров этого графа, приведенная в работе Юришича и Куулена (2000г.). Недвудольный граф, для которого достигается фундаментальная граница, называется плотным. Если Γ – плотный антиподальный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$ и индекс антиподальности r, то все параметры графа выражаются через параметры p, q, r. В этом случае Γ называется антиподальным плотным графом диаметра 4 (AT4(p, q, r)-графом). Имеется список из 10 известных AT4-графов, у каждого из которых определен список параметров и присвоены имена исследователей, открывших указанные графы. Кроме того, есть список возможных AT4-графов из 11 наименований. Согласно гипотезе Юришича, для AT4(p, q, r)-графа параметры p, q, r могут принимать лишь следующие значения:

$$(1)(qs, q, r), r \in \{2, q-1\}; (2)(q-2, q, r), r \in \{2, q-1\}; (3)(1, 2, 3); (20, 4, 3); (351, 9, 3).$$

Предложение 3.1 показывает, что вторая окрестность вершины в AT4$(4, 6, 5)$-графе является дистанционно регулярным графом с определенными параметрами. Дальнейшие рассуждения позволяют найти порядки автоморфизмов дистанционно регулярных графов с задаными массивами пересечений (§3.1-§3.2). В §3.3 изучались дистанционно регулярные графы диаметра 3, для которых граф Γ_3 сильно регулярен. В §3.4 было продолжено решение обратной задачи для случаев, когда графы Γ_3 или $\bar{\Gamma}_2$ являются псевлогеометрическими для обобщенных четырехугольников.

В главе 4 изучены общие свойства дистанционно регулярного графа диаметра 3, для которого графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны. В §4.1 установлены общие свойства таких графов. Имеется список массивов пересечений таких графов, состоящий из 26 наборов. В §4.2 найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, для которых графы Γ_2 и Γ_3 сильно регулярны, Γ_3 не содержит треугольников и параметр $\mu \leq 11$. В случае конкретизации одного из параметров в теореме 4.1 ($r = 4$)получаем граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10, 1, 14, 60\}$. Строение соответствующего графа в предположении, что группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин графа получено в следствии 4.1.

Юришич и Видали доказали, что дистанционно регулярный граф диаметра 3, содержащий локально регулярный максимальный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, либо имеет собственное значение $\theta = -1$, либо является графом Шилла с параметрами $b_2 = c_2$. В главе 5 изучаются дистанционно регулярные графы с собственным значением $\theta = -1$ и графы Шилла с условием $b_2 = c_2$. В теореме 5.1 дается ответ на вопрос о существовании дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{7.7, 6; 1, 1.2\}$. В следствии 5.1 описано строение графов с параметрами $(176, 49, 12, 14)$, у которых группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин. Однако существование дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{7.7, 6; 1, 1.2\}$ осталось под вопросом. Имеется большой список массивов пересечений небольших примитивных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_3, но не Γ_2. В теореме 5.2 получено уточнение классических оценок Хоффмана-Дельсарта. Применение теоремы 5.2 дало возможность исключить один из массивов пересечений.

Во второй части главы 5 рассматриваются графы Шилла, т.е. такие дистанционно регулярные графы диаметра 3, у которых второе собственное значение $\theta_1 = a_3$. Теоремы 5.5, 5.6 и 5.7 дают описание графов Шилла с $b_2 = c_2$ при дополнительных ограничениях.

Основные методы исследования, применяемые в работе – это теоретико-графовые и комбинаторные методы, методы линейной алгебры и теории конечных групп. В частно-

сти, применение подхода Г.Хигмена, использующего теорию обыкновенных характеров для выяснения порядков автоморфизмов графов. Иногда удается получить весьма содержательную информацию только по порядкам автоморфизмов рассматриваемых графов. Весьма удачным представляется применение алгебры Боуза-Меснера для получения результатов о структуре графов.

Основные достижения диссертации следующие.

1.Завершены программы исследований: а) дистанционно регулярных локально $QT(4,t)$-графов;

б)примитивных дистанционно регулярных реберно симметричных локально циклических графов с числом вершин не более 1000;

в)реберно симметричных сильно регулярных графов с числом вершин не более 100 (проблема Лама).

2. Найдены параметры сильно $s-2$-однородных расширений частичных геометрий $pG_\alpha(s,t)$ и классифицированы локально $GQ(4,t)$-графы.

3. Перечислены допустимые массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $\lambda = 2$ имеющх не более 4096 вершин.

4. Заложены основы теории решения обратных задач для дистанционно регулярных графов, связанных с экстремальными собственными значениями графов, сильно регулярными структурами и максимальными кодами.

5. Найдены автоморфизмы $AT4(4,6,5)$-графов с дополнительными ограничениями.

6. Заложены основы теории графов Шилла.

Очень полезным является упоминание о проблемах, возникающих в разрабатываемой теории.

Замечания по работе:

По содержанию диссертации и автореферата возникли следующие замечания для обсуждения на заседании диссертационного совета:

1. Встречаются опечатки и неудачные выражения. Например, стр. 4 текста диссертации: "по теорема Смита стр.6 диссертации "Еслм". На стр. 16 имеется ссылка на статью [26] С.С.Кротова с соаторами. Открывая список литературы, обнаруживаем D.Krotov. В замечании 3.1 на стр 26 пропущена ссылка на источник. 2. В доказательстве леммы 1.5 (стр 83) имеется ссылка на применение вычислительной программы. Было бы уместно сделать приложение с листингом программы и распечаткой результатов. 3. Стр 100. По контексту кажется, что сослаться надо на Предложение 2.2, а не 4.2

Впрочем, количество опечаток и неточностей невелико и не влияет на общую оценку диссертации, являющейся глубоким и содержательным исследованием на актуальную тему.

Все результаты полученые автором лично, либо в нераздельном соавторстве с научным консультантом работы А.А.Махневым и двумя участниками алгебраического семинара (А.Х.Журтовым и Д.В. Падучих) , отражены в 17 статьях в изданиях, рекомендованных ВАК и в 12 материалах и тезисах конференций. Они прошли солидную апробацию на международных конференциях и семинарах Работа автора получила положительные отклики у алгебраической общественности. Все основные результаты диссертации снабжены подробными и корректными доказательствами. В диссертационной работе отсутствует заимствованный материал без ссылки на автора или источник заимствования.

Полученные в диссертации результаты являются новыми, имеют теоретическое значение и могут быть использованы при дальнейших исследованиях в Санкт-Петербургском,

Новосибирском, Уральском, Самарском, Ярославском госуниверситетах и в научных учреждениях РАН.

Автореферат диссертации отвечает требованиям п. 25 Постановления Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. N 842 «О порядке присуждения ученых степеней» и отражает все основные результаты работы.

Считаю, что диссертация соответствует п. 9 - 14 Постановления правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 «О порядке присуждения ученых степеней».

Заключение:

Диссертационная работа М.С.Нировой «Дистанционно регулярные графы, связанные с ними симметричные структуры и их группы автоморфизмов» является законченным исследованием, выполненным автором на высоком научном уровне. Представленные в работе доказательства достоверны. В диссертационной работе отсутствует заимствованный материал без ссылки на автора или источник заимствования.

Диссертационная работа отвечает требованиям и критериям «Положения о порядке присуждения ученых степеней» (утвержденных Постановлением Правительства Российской Федерации № 842 от 24.09.2013 г.), а ее автор Нирова Марина Сефовна заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - «математическая логика, алгебра и теория чисел».

Отзыв составлен по результатам обсуждения на расширенном заседании кафедры «алгебры и математической логики», протокол № 4 от 10.12.2018 г.

Отзыв составили:

Заведующий кафедрой
«Алгебры и математической логики»
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г. Демидова
150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14
д.ф-м.н., профессор Казарин Лев Сергеевич
тел.: +7 (4852) 44-29-28
Email: lsk46@mail.ru

Л.С. Казарин

Профессор кафедры
«Алгебры и математической логики»
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г. Демидова
150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14
д.ф-м.н., профессор Тимофеева Надежда Владимировна
тел.: 89807473649
Email:ntimofeeva@list.ru

Н.В.Тимофеева

Сведения об организации: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» (Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова), 150003, Ярославль, ул. Советская, д .14 тел.: +7 (4852) 78-86-05, 79-77-02, факс: 73-21-50 Email: rectorat@uniyar.ac.ru. Официальный сайт: www.uniyar.ac.ru